Le Frido 2017,
volume 4
Laurent Claessens

Plusieurs extensions et versions de ce livre.

1. La version courante, régulièrement mise à jour et qui deviendra petit à petit le Frido 2018. Téléchargeable sur

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf`

2. La version la plus complète, contenant des exercices ainsi que de la mathématique de niveau recherche sur

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/mazhe.pdf`

3. Et bien entendu les sources LaTeX sur github :

   `https://github.com/LaurentClaessens/mazhe`

Copyright 2011-2017 Laurent Claessens, Carlotta Donadello, Lilian Besson
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the chapter entitled “GNU Free Documentation License”.

ISBN : 979-10-97085-04-9

## Thèmes

Ceci est une sorte d'index thématique.

1 : intégration
2 : suites et séries
3 : polynôme de Taylor
4 : séries de Fourier
5 : normes
6 : topologie produit
7 : espaces métriques, normés
8 : norme opérateur
9 : gaussienne
10 : produit de compact
11 : densité
12 : espaces de fonctions
13 : fonctions Lipschitz
14 : formule des accroissements finis
15 : différentiabilité
16 : points fixes
17 : théorème de Stokes, Green et compagnie
18 : permuter des limites
19 : applications continues et bornées
20 : inégalités
21 : connexité
22 : suite de Cauchy, espace complet
23 : application réciproque
24 : tribu, algèbre de parties, $\lambda$-systèmes et co.
25 : déduire la nullité d'une fonction depuis son intégrale
26 : mesure et intégrale
27 : équations différentielles
28 : injections
29 : logarithme
30 : inversion locale, fonction implicite
31 : convexité
32 : dualité
33 : opérations sur les distributions
34 : transformée de Fourier
35 : convolution
36 : méthode de Newton
37 : méthodes de calcul
38 : définie positive
39 : norme matricielle et rayon spectral
40 : série de matrices
41 : rang
42 : extension de corps et polynômes
43 : décomposition de matrices
44 : systèmes d'équations linéaires
45 : racines de polynôme et factorisation de polynômes
46 : formes bilinéaires et quadratiques
47 : arithmétique modulo, théorème de Bézout
48 : polynômes
49 : invariants de similitude
50 : diagonalisation
51 : endomorphismes cycliques
52 : déterminant
53 : polynôme d'endomorphismes
54 : exponentielle de matrice
55 : sous-groupes
56 : groupe symétrique
57 : action de groupe
58 : classification de groupes
59 : produit semi-direct de groupes
60 : théorie des représentations
61 : isométries
62 : caractérisation de distributions en probabilités
63 : théorème central limite
64 : lemme de transfert
65 : probabilités et espérances conditionnelles
66 : dénombrements
67 : enveloppes
68 : équations diophantiennes

**Thème 1 : intégration**

(1) L'existence d'une primitive pour toute fonction continue est le théorème 18.10.

(2) La définition d'une primitive est la définition 12.135.

(3) Primitive et intégrale, proposition 13.204.

(4) Intégrale impropre, définition 13.217.

**Thème 2 : suites et séries** De façon un peu contre-intuitive, les suites et séries sont surtout traitées dans le chapitre sur les espaces vectoriels. Section 10.5 pour les suites et 10.6 pour les séries.

(1) La définition de la somme d'une infinité de termes est donnée par la définition 10.43.

(2) La définition de la convergence absolue est la définition 10.45.

(3) Convergence d'une série implique convergence vers zéro du terme général, proposition 10.53.
(4) Quelque séries usuelles dans $\mathbb{R}$ dans la section 10.7.3.

Pour les sommes infinies l'associativité et la commutativité dans une série sont perdues. Néanmoins, il subsiste que

(1) si la série converge, on peut regrouper ses termes sans modifier la convergence ni la somme (associativité) ;
(2) si la série converge absolument, on peut modifier l'ordre des termes sans modifier la convergence ni la somme (commutativité, proposition 9.176).

Une somme indexée par un ensemble quelconque est la définition 9.178.

**Thème 3 : polynôme de Taylor** Énoncés :

(1) Énoncé : théorème 12.263.
(2) De classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^n$, proposition 12.267.
(3) Avec un reste donné par un point dans $]x, a[$, proposition 12.271.
(4) Le polynôme de Taylor généralise à l'utilisation de toutes les dérivées disponibles le résultat de développement limité donné par la proposition 12.120.
(5) Pour les fonctions holomorphes, il y a le théorème 25.27 qui donne une série de Taylor sur un disque de convergence.

Utilisation :

(1) Il est utilisé pour justifier la méthode de Newton autour de l'équation (32.92).
(2) On utilise pas mal de Taylor dans les résultats liant extrema et différentielle/Hessienne. Par exemple la proposition 18.68.

**Thème 4 : séries de Fourier**

— Formule sommatoire de Poisson, proposition 27.9.
— Inégalité isopérimétrique, théorème 26.21.
— Fonction continue et périodique dont la série de Fourier ne converge pas, proposition 26.18.
— Nous allons montrer la convergence de $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{inx}$ vers $f(x)$ dans divers cas :
  (1) Si $f$ est continue et périodique, convergence au sens de Cesaro, théorème de Fejèr 26.5.
  (2) Convergence au sens $L^2\Big([0, 2\pi]\Big)$ dans le théorème 24.57.
  (3) Si $f$ est continue, périodique et sa série de Fourier converge uniformément, théorème 26.13.
  (4) Si $f$ est périodique et la série des coefficients converge absolument pour tout $x$, proposition 26.14.
  (5) Si $f$ est périodique et de classe $C^1$, théorème 26.15.

  Il est cependant faux de croire que la continuité et la périodicité suffisent à obtenir une convergence, comme le montre dans la proposition 26.18.

**Thème 5 : normes**

**Définition** définition 6.31.

**Équivalence de norme** (1) Définition de l'équivalence de norme 10.1.
(2) La proposition 10.2 sur l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$.
(3) Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, théorème 10.3.
(4) Montrer que le problème $a - b$ est stable dans l'exemple 32.26.
(5) La proposition 10.15 donnant $\rho(A) \leqslant \|A\|$ utilise l'équivalence de toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie.

**Norme opérateur** voir le thème 8.

**Thème 6 : topologie produit**

(1) La définition de la topologie produit est 6.5.

(2) Pour les espaces vectoriels normés, le produit est donné par la définition 10.73.

(3) L'équivalence entre la topologie de la norme produit et la topologie produit est le lemme 10.75.

**Thème 7 : espaces métriques, normés**

(1) Le théorème-définition 6.19 donne la topologie sur un espace métrique.

(2) La définition de la convergence d'une suite est la définition 6.4.

(3) Dans un espace vectoriel normé, une application est continue si et seulement si elle est bornée, proposition 10.18.

**Thème 8 : norme opérateur** Pour la norme matricielle et le rayon spectral, voir le thème 39.

(1) Définition 10.5.

(2) Définition d'une norme d'algèbre 10.9.

(3) Pour des espaces vectoriels normée, être borné est équivalent à être continu : proposition 10.18.

(4) Le lemme à propos d'exponentielle de matrice 15.94 donne :

$$\|e^{tA}\| \leqslant P\big(|t|\big) \sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}. \tag{0.1}$$

**Thème 9 : gaussienne**

(1) Le calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{0.2}$$

est fait de deux façons dans l'exemple 13.233. Les deux utilisent le théorème de Fubini 13.230.

(2) Le lemme 27.15 calcule la transformée de Fourier de $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon\|x\|^2}$ qui donne $\hat{g}_\epsilon(\xi) = \big(\frac{\pi}{\epsilon}\big)^{d/2} e^{-\|\xi\|^2/4\epsilon}$.

(3) Le lemme 27.18 donne une suite régularisante à base de gaussienne.

(4) Elle est utilisée pour régulariser une intégrale dans la preuve de la formule d'inversion de Fourier 27.20

**Thème 10 : produit de compact**

(1) Les produits d'espaces métriques compacts sont compacts ; c'est le théorème de Tykhonov. Nous verrons ce résultat dans les cas suivants.
   — $\mathbb{R}$, lemme 6.122.
   — Produit fini d'espaces métriques compacts, théorème 6.162.
   — Produit dénombrable d'espaces métrique compacts, théorème 6.164.

**Thème 11 : densité**

(1) Densité des polynômes dans $C^0\big([0,1]\big)$, théorème de Bernstein 34.133.

(2) Densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leqslant p < \infty$, théorème 24.33.

(3) Densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 29.17.

(4) Densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 29.19.
Cela est utilisé pour le théorème de trace 29.21.

(5) Les applications étagées dans les applications mesurables (qui plus est avec limite croissante), théorème fondamental d'approximation 24.36.
(6) Les fonctions continues à support compact dans $L^2(I)$, théorème 24.37.
(7) Les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(S^1)$ pour $1 \leqslant p < \infty$. Deux démonstrations indépendantes par le théorème 26.6 et le théorème 24.51.

Les densités sont bien entendu utilisées pour prouver des formules sur un espace en sachant qu'elles sont vraies sur une partie dense. Mais également pour étendre une application définie seulement sur une partie dense. C'est par exemple ce qui est fait pour définir la trace $\gamma_0$ sur les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ en utilisant le théorème d'extension 18.112.

Comme presque tous les théorèmes importants, le théorème de Stone-Weierstrass possède de nombreuses formulations à divers degrés de généralité.

— Le lemme 18.1 le donne pour la racine carré.
— Le théorème 18.6 donne la densité des polynômes dans les fonctions continues sur un compact.
— Le théorème 18.4 est une généralisation qui donne la densité uniforme d'une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ dès que $X$ sépare les points.
— Le lemme 26.1 est une version pour les polynômes trigonométriques.
— Le lemme 18.1 est une cas particulier du théorème 18.6, mais nous en donnons une démonstration indépendante afin d'isoler la preuve de la généralisation 18.4. Une version pour les polynômes trigonométriques sera donnée dans le lemme 26.1.

**Thème 12 : espaces de fonctions** En ce qui concerne les densités, voir le thème 11.

**Topologie** Les espaces de fonctions sont souvent munis de topologies définies par des semi-normes.

(1) La topologie des semi-normes est la définition 6.190.
(2) La définition 28.3 donne les topologies sur $C^\infty(\Omega)$, $\mathscr{D}(K)$ et $\mathscr{D}(\Omega)$.
(3) La topologie $*$-faible sur $\mathscr{D}'(\Omega)$ est donnée par la définition 28.10.

**L'espace $L^2\big([0, 2\pi]\big)$** C'est un espace très important, entre autres parce qu'il est de Hilbert et est bien adapté à la transformée de Fourier.

(1) Définition de $L^2(\Omega, \mu)$, 24.53.
(2) Le produit scalaire $\langle f, g\rangle$ est donné en (24.187) et la base trigonométrique est (24.188).
(3) La densité des polynômes trigonométriques dans $L^p(S^2)$ est le théorème 24.51 ou le théorème 26.6, au choix.
(4) Une conséquence de cette densité est que le système trigonométrique est une base hilbertienne de $L^2$ par le lemme 24.56.

L'espace $L^2$ est discuté en analyse fonctionnelle, en 24.5 parce que l'étude de $L^2$ utilise entre autres l'inégalité de Hölder 24.22.

Le fait que $L^2$ soit une espace de Hilbert est utilisé dans la preuve du théorème de représentation de Riesz 24.60.

**Thème 13 : fonctions Lipschitz**

(1) Définition : 12.243.
(2) La notion de Lipschitz est utilisée pour définir la stabilité d'un problème, définition 32.25.

**Thème 14 : formule des accroissements finis** Il en existe plusieurs formes :

(1) Une version adaptée aux espaces de dimension finie est le théorème 12.241.
(2) Pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en le théorème 12.129.
(3) Une généralisation pour les intervalles non bornés : théorème 12.130.
(4) Espaces vectoriels normés, théorème 12.229

**Thème 15 : différentiabilité**

(1) La recherche d'extrema d'une fonction sur $\mathbb{R}^n$ passe par la seconde différentielle, proposition 18.68.

(2) Lien entre différentielle seconde (Hessienne) et convexité en la proposition 18.90 et le corollaire 18.92.

(3) La différentielle est liée aux dérivées partielles par les formules données au lemme 12.178

$$df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \nabla f(a) \cdot u. \tag{0.3}$$

**Thème 16 : points fixes**

(1) Il y a plusieurs théorèmes de points fixes.

**Théorème de Picard** 18.23 donne un point fixe comme limite d'itérés d'une fonction Lipschitz. Il aura pour conséquence le théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37, l'équation de Fredholm, théorème 18.28 et le théorème d'inversion locale dans le cas des espaces de Banach 18.47.

**Théorème de Brouwer** qui donne un point fixe pour une application d'une boule vers elle-même. Nous allons donner plusieurs versions et preuves.

(a) Dans $\mathbb{R}^n$ en version $C^\infty$ via le théorème de Stokes, proposition 18.31.

(b) Dans $\mathbb{R}^n$ en version continue, en s'appuyant sur le cas $C^\infty$ et en faisant un passage à la limite, théorème 18.32.

(c) Dans $\mathbb{R}^2$ via l'homotopie, théorème 25.19. Oui, c'est très loin. Et c'est normal parce que ça va utiliser la formule de l'indice qui est de l'analyse complexe [1].

**Théorème de Markov-Kakutani** 18.35 qui donne un point fixe à une application continue d'un convexe fermé borné dans lui-même. Ce théorème donnera la mesure de Haar 18.36 sur les groupes compacts.

**Théorème de Schauder** 18.33 qui est une version valable en dimension infinie du théorème de Brouwer.

(2) Pour les équations différentielles

(a) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 18.43 pour les équations différentielles.

(b) Le théorème de Schauder 18.33 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 18.37) sans la condition Lipschitz, mais alors sans unicité de la solution. Notons que de ce point de vue nous sommes dans la même situation que la différence entre le théorème de Brouwer et celui de Picard : hors hypothèse de type «contraction», point d'unicité.

(3) En calcul numérique
- La convergence d'une méthode de point fixe est donnée par la proposition 32.47.
- La convergence quadratique de la méthode de Newton est donnée par le théorème 32.53.
- En calcul numérique, section 32.5
- Méthode de Newton comme méthode de point fixe, sous-section 32.6.2.

(4) D'autres utilisation de points fixes.
- Processus de Galton-Watson, théorème 36.47.
- Dans le théorème de Max-Milgram 23.56, le théorème de Picard est utilisé.

**Thème 17 : théorème de Stokes, Green et compagnie**

(1) Forme générale, théorème 14.48.

(2) Rotationnel et circulation, théorème 22.8.

Le théorème de Stokes peut être utilisé pour montrer le théorème de Brower, proposition 18.31.

1. On aime bien parce que ça ne demande pas Stokes, mais quand même hein, c'est pas gratos non plus.

**Thème 18 : permuter des limites**

(1) Les théorèmes sur les fonctions définies par des intégrales, section 14.10. Nous avons entre autres
   (a) $\partial_i \int_B f = \int_B \partial_i f$, avec $B$ compact, proposition 14.72.
   (b) Si $f$ est majorée par une fonction ne dépendant pas de $x$, nous avons le théorème 14.62.
   (c) Si l'intégrale est uniformément convergente, nous avons le théorème 14.63.
   (d) Pour dériver $\int_B g(t,z)dt$ avec $B$ compact dans $\mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, il faut aller voir la proposition 25.17.

(2) Théorème de la convergence monotone, théorème 13.129.

(3) Le théorème de Fubini permet non seulement de permuter des intégrales, mais également des sommes parce que ces dernières peuvent être vues comme des intégrales sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu des parties et de la mesure de comptage. Nous utilisons cette technique pour permute une somme et une intégrale dans l'équation (25.122).
   — le théorème de Fubini-Tonelli 13.227 demande que la fonction soit mesurable et positive ;
   — le théorème de Fubini 13.230 demande que la fonction soit intégrable (mais pas spécialement positive) ;
   — le corollaire 13.229 demande l'intégrabilité de la valeur absolue des intégrales partielles pour déduire que la fonction elle-même est intégrable.

**Thème 19 : applications continues et bornées**

(1) Une application linéaire non continue : exemple 10.20 de $e_k \mapsto ke_k$. Les dérivées partielles sont calculées en (23.131).

(2) Une autre application linéaire non continue en l'exemple 10.21 : la dérivation sur les polynômes.

(3) Une application linéaire est bornée si et seulement si elle est continue, proposition 10.18.

**Thème 20 : inégalités**

**Inégalité de Jensen** (1) Une version discrète pour $f\big(\sum_i \lambda_i x_i\big)$, la proposition 18.93.

(2) Une version intégrale pour $f\big(\int \alpha d\mu\big)$, la proposition 24.20.

(3) Une version pour l'espérance conditionnelle, la proposition 34.52.

**Inégalité de Minkowsky** (1) Pour une forme quadratique $q$ sur $\mathbb{R}^n$ nous avons $\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$. Proposition 9.254.

(2) Si $1 \leqslant p < \infty$ et si $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ alors $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. Proposition 24.26.

(3) L'inégalité de Minkowsky sous forme intégrale s'écrit sous forme déballée

$$\left[\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\Big)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\Big)^{1/p} d\nu(y). \tag{0.4}$$

ou sous forme compacte

$$\Big\| x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big\|_p \leqslant \int_Y \|f_y\|_p d\nu(y) \tag{0.5}$$

**Transformée de Fourier** Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nous avons $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$, lemme 27.6.

**Inégalité des normes** Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$, proposition 24.40.

**Thème 21 : connexité**

(1) Définition 6.84
(2) Le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est connexe par arcs : proposition 12.333.
(3) Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est connexe par arcs : proposition 12.334.
(4) Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est connexe par arcs, proposition 12.334.
(5) Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes par arcs, proposition 12.335.
(6) Le groupe $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ n'est pas connexe, lemme 12.329.
(7) Les groupe $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont connexes par arcs, lemme 12.330.
(8) Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe mais ce n'est pas encore démontré, proposition 12.331.
(9) Connexité des formes quadratiques de signature donnée, proposition 18.101.

**Thème 22 : suite de Cauchy, espace complet** Nous parlons d'espaces topologiques complets. À ne pas confondre avec un espace mesuré complet, définition 13.50.

(1) La définition 6.39 donne la notion de suite de Cauchy dans un espace métrique.
(2) La définition 6.37 donne la notion de suite de $\tau$-Cauchy dans un espace vectoriel topologique.
(3) Deux espaces métriques (avec une distance) peuvent être isomorphes en tant qu'espaces topologiques, mais ne pas avoir les mêmes suites de Cauchy, exemple 6.42.
(4) La proposition 6.52 donne l'équivalence entre les suites de Cauchy et les suites $\tau$-Cauchy dans le cas des espaces vectoriels topologiques *normés*.
(5) L'exemple 6.42 est un exemple pire que simplement une suite de Cauchy qui ne converge pas. Le problème de convergence de cette suite n'est pas simplement que la limite n'est pas dans l'espace ; c'est que la suite de Cauchy donnée ne convergerait même pas dans $\mathbb{R}$.
(6) Le théorème 18.119 est un théorème de complétion d'un espace métrique.

Quelque espaces qui sont complets sont listés ci-dessous. Attention : la complétude est bien une propriété de la norme ; le même ensemble peut être complet pout une norme et pas pour une autre. Si on vous demande «est-ce que tel espace est complet ?» vous devez répondre en demandant «pour quelle topologie ?» ... sauf si la topologie est évidente dans le contexte.

(1) Les réels $\mathbb{R}$, théorème 6.57.
(2) La proposition 12.299 donne quelque espaces complets. Soit $X$ un espace topologique métrique $(Y,d)$ un espace espace métrique complet. Alors les espaces
   (a) $\left(C_b^0(X,Y),\|.\|_\infty\right)$
   (b) $\left(C_0^0(X,Y),\|.\|_\infty\right)$
   (c) $\left(C_0^k(X,Y),\|.\|_\infty\right)$
   sont complets.
(3) Le lemme 12.300 dit que $\left(C^0(A,B),\|.\|_\infty\right)$ est complet dès que $A$ est compact et $B$ est complet.
(4) L'espace $\mathscr{D}(K)$ est complet tant pour la topologie des semi-normes que pour la topologie métrique (qui sont les mêmes). C'est la proposition 28.7.
(5) L'espace $\mathscr{S}(\Omega)$ est complet et métrisable par la proposition 28.48.

La limite uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'est pas spécialement dérivable. Même si les fonctions sont de classe $C^\infty$, la limite n'est pas spécialement mieux que continue. En effet, le théorème de Stone-Weierstrass 18.6 nous dit que les polynômes (qui sont $C^\infty$) sont denses dans les fonctions continues sur un compact pour la norme uniforme. Vous ne pouvez donc pas espérer que $\left(C^p(X,Y),\|.\|_\infty\right)$ soit complet en général.

**Thème 23 : application réciproque**

(1) Définition 6.187.
(2) Dans le cas des réels, des exemples sont donnés en 12.7.
(3) Continuité, proposition 6.189.
(4) Théorème de la bijection 12.41 (qui contient aussi de la continuité).
(5) Dérivabilité, proposition 12.42.

**Thème 24 : tribu, algèbre de parties, $\lambda$-systèmes et co.** Il existe des centaines de notions de mesures et de classes de parties.

(1) Le plus souvent lorsque nous parlons de mesure est que nous parlons de mesure positive, définition 13.23 sur un espace mesuré avec une tribu, définition 13.1.
(2) Une mesure extérieure est la définition 13.17
(3) Une algèbre de partie : définition 13.18. Une mesure sur une algèbre de parties : définition 13.20. L'intérêt est que si on connait une mesure sur une algèbre de parties, elle se prolonge en une mesure sur la tribu engendrée par le théorème de prolongement de Hahn 13.60.
(4) Un $\lambda$-système : définition 13.37.
(5) Une mesure complexe : définition 13.147.

**Thème 25 : déduire la nullité d'une fonction depuis son intégrale** Des résultats qui disent que si $\int f = 0$ c'est que $f = 0$ dans un sens ou dans un autre.

(1) Il y a le lemme 13.123 qui dit ça.
(2) Un lemme du genre dans $L^2$ existe aussi pour $\int f\varphi = 0$ pour tout $\varphi$. C'est le lemme 24.43.
(3) Et encore un pour $L^p$ dans la proposition 24.65.
(4) Si $\int f\chi = 0$ pour tout $\chi$ à support compact alors $f = 0$ presque partout, proposition 24.1.
(5) La proposition 24.17 donne $f = 0$ dans $L^p$ lorsque $\int fg = 0$ pour tout $g \in L^q$ lorsque l'espace est $\sigma$-fini.
(6) Une fonction $h \in C_c^\infty(I)$ admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$ si et seulement si $\int_I h = 0$. Théorème 18.11.

**Thème 26 : mesure et intégrale**

(1) Mesure de Lebesgue, définition 13.172
(2) Intégrale associée à une mesure, définition 13.113
(3) Mesure à densité, définition 13.137.

**Thème 27 : équations différentielles** L'utilisation des théorèmes de point fixe pour l'existence de solutions à des équations différentielles est fait dans le chapitre sur les points fixes.

(1) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 18.43 pour les équations différentielles.
(2) Le théorème de Schauder 18.33 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 18.37) sans la condition Lipschitz
(3) Le théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37 est utilisé à plusieurs endroits :
— Pour calculer la transformée de Fourier de $e^{-x^2/2}$ dans le lemme 27.15.
(4) Théorème de stabilité de Lyapunov 30.34.
(5) Le système proie prédateurs, Lokta-Voltera 30.35
(6) Équation de Schrödinger, théorème 30.41.
(7) L'équation $(x - x_0)^\alpha u = 0$ pour $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, théorème 28.56.
(8) La proposition 30.37 donne un résultat sur $y'' + qy = 0$ à partir d'une hypothèse de croissance.
(9) Équation de Hill $y'' + qy = 0$, proposition 30.39.

**Thème 28 : injections**

(1) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\bar{I})$, proposition 29.8.
(2) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$, proposition 29.8.
(3) L'espace $L^2(\Omega)$ s'injecte continument dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ (les distributions), proposition 28.13.

**Thème 29 : logarithme**

(1) L'exemple 15.63 donne une série pour $\ln(1-x)$.

(2) La proposition 9.196 dit que toute matrice complexe admet un logarithme. En particulier une série explicite est donné pour le logarithme d'un bloc de Jordan.

(3) Le logarithme pour les réels strictement positifs est donné en la définition 15.57.

(4) Sur les complexes, le logarithme $\ln\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est la définition 25.54. Attention : ce n'est pas la seule définition possible.

(5) La série harmonique diverge à vitesse logarithmique, et la série des inverses des nombres premiers, c'est encore plus lent : théorème 15.68.

**Thème 30 : inversion locale, fonction implicite**

**Des énoncés** (1) Inversion locale dans $\mathbb{R}^n$ : théorème 18.46. Pour un Banach c'est le théorème 18.47.

(2) Fonction implicite dans un Banach : théorème 18.48.

**Des utilisations** (1) Utilisé pour montrer que le flot d'une équation différentielle est un $C^p$-difféomorphisme local, voir 30.30.

(2) Pour le théorème de Von Neumann 18.60.

**Thème 31 : convexité** L'essentiel des résultats sur les fonctions convexes sont dans la sections 18.9.

(1) Définition des fonctions convexes : 18.74 et 18.88 en dimension supérieure.

(2) En termes de différentielles, 18.89 pour la différentielle première et 18.92 pour la Hessienne.

(3) Une courbe paramétrée convexe est la définition 19.84.

(4) L'enveloppe convexe d'une courbe fermée simple et convexe : 19.86.

(5) Courbure et convexité d'une courbe paramétrée : section 19.12.4.

(6) Une courbe paramétrée convexe est localement le graphe d'une fonction convexe, lemme 19.85.

(7) La convexité est utilisée dans la méthode du gradient à pas optimal de la proposition 18.98.

**Thème 32 : dualité** Ne pas confondre dual algébrique et dual topologique d'un espace vectoriel.

**Dual topologique et algébrique** Ils sont définis par 7.40. Le dual algébrique est l'ensemble des formes linéaires, et le dual topologique ne considère que les formes linéaires continues (en dimension infinie, les applications linéaires ne sont pas toutes continues).

**Topologie** Une topologie possible sur le dual d'un espace vectoriel topologique est celle $*$-faible de la définition 6.196.

**Théorèmes de dualité** Quelque théorèmes établissent des dualités entre des espaces courants.

(1) Le théorème de représentation de Riesz 23.18 pour les espaces de Hilbert.

(2) La proposition 24.60 pour les espaces $L^p\big([0,1]\big)$ avec $1 < p < 2$.

(3) Le théorème de représentation de Riesz 24.64 pour les espaces $L^p$ en général.

Tous ces théorèmes donnent la dualité par l'application $\Phi_x = \langle x, . \rangle$.

**Thème 33 : opérations sur les distributions**

(1) Convolution d'une distribution par une fonction, définition par l'équation (28.74).

(2) Dérivation d'une distribution, proposition-définition 28.15.

(3) Produit d'une distribution par une fonction, définition 28.14.

**Thème 34 : transformée de Fourier**

(1) Définition sur $L^1$, définition 27.2.

(2) La transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$ est continue, proposition 27.5.

(3) L'espace de Schwartz est stable par transformée de Fourier. L'application $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est une bijection linéaire et continue. Proposition 27.12

**Thème 35 : convolution**

(1) Définition pour $f, g \in L^1$, théorème 24.38.

(2) Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$, proposition 24.40.

(3) $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors $\varphi * \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, proposition 24.87.

(4) Les suites régularisantes : $\lim_{n\to\infty} \rho_n * f = f$ dans la proposition 27.17.

(5) Convolution d'une distribution par une fonction, définition par l'équation (28.74).

**Thème 36 : méthode de Newton**

(1) Nous parlons un petit peu de méthode de Newton en dimension 1 dans 32.6.

(2) La méthode de Newton fonctionne bien avec les fonction convexes par la proposition 32.55.

(3) La méthode de Newton en dimension $n$ est le théorème 32.61.

(4) Un intervalle de convergence autour de $\alpha$ s'obtient par majoration de $|g'|$, proposition 32.47.

(5) Un intervalle de convergence quadratique s'obtient par majoration de $|g''|$, théorème 32.53.

(6) En calcul numérique, section 32.6.

**Thème 37 : méthodes de calcul**

(1) Théorème de Rothstein-Trager 14.90.

(2) Algorithme des facteurs invariants 4.99.

(3) Méthode de Newton, théorème 32.61

(4) Calcul d'intégrale par suite équirépartie 26.8.

**Thème 38 : définie positive**

(1) Une application bilinéaire est définie positive lorsque $g(u,u) \geqslant 0$ et $g(u,u) = 0$ si et seulement si $u = 0$ est la définition 9.23.

(2) Un opérateur ou une matrice est défini positif si toutes ses valeurs propres sont positives, c'est la définition 9.167.

(3) Pour une matrice symétrique, définie positive implique $\langle Ax, x\rangle > 0$ pour tout $x$. C'est le lemme 9.170.

(4) Une application linéaire est définie positive si et seulement si sa matrice associée l'est. C'est la proposition 9.247.

Remarque : nous ne définissons pas la notion de matrice définie positive dans le cas d'une matrice non symétrique.

**Thème 39 : norme matricielle et rayon spectral**

(1) Définition du rayon spectral 10.10.

(2) Lien entre norme matricielle et rayon spectral, le théorème 10.25 assure que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}$.

(3) Lien entre valeurs propres et norme opérateur : le lemme 10.26 pour les matrices symétriques strictement définies positives donne $\|A\|_2 = \lambda_{max}$.

(4) Pour toute norme algébrique nous avons $\rho(A) \leqslant \|A\|$, proposition 10.15.

(5) Dans le cadre du conditionnement de matrice. Voir en particulier la proposition 32.104 qui utilise le théorème 10.25.

(6) Rayon spectral et convergence de méthode itérative, proposition 32.140.

Une norme matricielle donne une topologie. Il y a donc également des liens entre rayon spectral et convergence de série. Dans cette optique, pour les séries de matrices, voir le thème 40.

**Thème 40 : série de matrices**

(1) Rayon spectral et norme opérateur : thème 39.

(2) Exponentielle de matrices : thème 54.

(3) Série entière de matrices : section 15.12.

(4) Pour la série $\sum_k A^k = (1-A)^{-1}$.
— Pour un espace de Banach : proposition 10.52.
— Pour les matrices nilpotentes : proposition 9.138.
— En lien avec le rayon spectral (si et seulement si $\rho(A) < 1$) dans la proposition 15.90.
— Le lemme 15.44 parle de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{nk} = (1-z^k)^{-1}$.
Cette série est utilisée entre autres dans la proposition 32.160 pour prouver qu'une M-matrice irréductible vérifie $A^{-1} > 0$.

**Thème 41 : rang**

(1) Définition 7.22.

(2) Le théorème du rang, théorème 7.23

(3) Prouver que des matrices sont équivalentes et les mettre sous des formes canoniques, lemme 7.28 et son corollaire 7.29.

(4) Tout hyperplan de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ coupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, corollaire 7.29. Cela utilise la forme canonique sus-mentionnée.

(5) Le lien entre application duale et orthogonal de la proposition 7.45 utilise la notion de rang.

(6) Prouver les équivalences à être un endomorphisme cyclique du théorème 9.233 via le lemme 9.232.

**Thème 42 : extension de corps et polynômes**

(1) Définition d'une extension de corps 5.47.

(2) Pour l'extension du corps de base d'un espace vectoriel et les propriétés d'extension des applications linéaires, voir la section 9.13.

(3) Extension de corps de base et similitude d'application linéaire (ou de matrices, c'est la même chose), théorème 9.235.

(4) Extension de corps de base et cyclicité des applications linéaires, corollaire 9.234.

(5) À propos d'extensions de $\mathbb{Q}$, le lemme 5.111.

**Thème 43 : décomposition de matrices**

(1) Décomposition de Bruhat, théorème 12.352.

(2) Décomposition de Dunford, théorème 9.194.

(3) Décomposition polaire 12.346 et la proposition 18.56 pour la régularité.

**Thème 44 : systèmes d'équations linéaires**

— Algorithme des facteurs invariants 4.99.
— La méthode du gradient à pas optimal permet de résoudre par itérations $Ax = b$ lorsque $A$ est symétrique strictement définie positive. Il s'agit de minimiser une fonction bien choisit. Propositions 18.97 pour l'existence et 18.98 pour la méthode.

**Thème 45 : racines de polynôme et factorisation de polynômes**

(1) Si $\mathbb{A}$ est une anneau, la proposition 4.119 factorise une racine.

(2) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, la proposition 4.121 factorise une racine avec sa multiplicité.

(3) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, le théorème 4.123 factorise plusieurs racines avec leurs multiplicités.

(4) Si $\mathbb{K}$ est un corps et $\alpha$ une racine dans une extension, le polynôme minimal de $\alpha$ divise tout polynôme annulateur par la proposition 5.65.

(5) Le théorème 5.68 annule un polynôme de degré $n$ ayant $n+1$ racines distinctes.

(6) La proposition 5.114 nous annule un polynôme à plusieurs variables lorsqu'il a trop de racines.

(7) En analyse complexe, le principe des zéros isolés 25.20 annule en gros toute série entière possédant un zéro non isolé.

(8) Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

**Thème 46 : formes bilinéaires et quadratiques**

(1) Les formes bilinéaires ont été définies en 9.22.

(2) Forme quadratique, définition 9.242

**Thème 47 : arithmétique modulo, théorème de Bézout**

(1) Pour $\mathbb{Z}^*$ c'est le théorème 3.32.

(2) Théorème de Bézout dans un anneau principal : corollaire 4.77.

(3) Théorème de Bézout dans un anneau de polynômes : théorème 5.40.

(4) En parlant des racines de l'unité et des générateurs du groupe unitaire dans le lemme 3.99. Au passage nous y parlerons de solfège.

(5) La proposition 3.34 qui donne tout entier assez grand comme combinaisons de $a$ et $b$ à coefficients positifs est utilisée en chaînes de Markov, voir la définition 36.41 et ce qui suit.

(6) Calcul effectif du PGCD puis des coefficients de Bézout : sous-sections 3.5.4.1 et 3.5.4.2.

**Thème 48 : polynômes**

**Coefficients dans un anneau commutatif** (1) Les polynômes à coefficients dans un anneau commutatif sont à la section 4.10.

**Coefficients dans un corps** (1) Les polynômes à coefficients dans un corps sont à la section 5.3.

(2) Nous parlons de l'idéal des polynômes annulateurs dans le théorème 5.37.

(3) Le théorème 5.37 dit que $\mathbb{K}[X]$ est une anneau principal et que tous ses idéaux sont engendrés par un unique polynôme unitaire.

(4) Le polynôme minimal est irréductible, proposition 5.50.

**Polynôme primitif** (1) Un polynôme est irréductible sur $A$ si et seulement si irréductible et primitif sur le corps des fractions, corollaire 4.124.

**Thème 49 : invariants de similitude**

(1) Théorème 9.221.

(2) Pour prouver que la similitude d'applications linéaires résiste à l'extension du corps de base, théorème 9.235.

(3) Pour prouver que la dimension du commutant d'un endomorphisme de $E$ est de dimension au moins $\dim(E)$, lemme 9.232.

(4) Nous verrons dans la remarque 9.222 à propos des invariants de similitude que toute matrice est semblable à la matrice bloc-diagonale constituées des matrices compagnon (définition 9.216) de la suite des polynômes minimals.

**Thème 50 : diagonalisation** Des résultats qui parlent diagonalisation

(1) Définition d'un endomorphisme diagonalisable : 9.140.

(2) Conditions équivalentes au fait d'être diagonalisable en termes de polynôme minimal, y compris la décomposition en espaces propres : théorème 9.143.

(3) Diagonalisation simultanée 9.146, pseudo-diagonalisation simultanée 9.173.

(4) Diagonalisation d'exponentielle 9.197 utilisant Dunford.

(5) Décomposition polaire théorème 12.346. $M = SQ$, $S$ est symétrique, réelle, définie positive, $Q$ est orthogonale.

(6) Décomposition de Dunford 9.194. $u = s + n$ où $s$ est diagonalisable et $n$ est nilpotent, $[s, n] = 0$.

(7) Réduction de Jordan (bloc-diagonale) 9.224.

(8) L'algorithme des facteurs invariants 4.99 donne $U = PDQ$ avec $P$ et $Q$ inversibles, $D$ diagonale, sans hypothèse sur $U$. De plus les éléments de $D$ forment une chaîne d'éléments qui se divisent l'un l'autre.

Le théorème spectral et ses variantes :

(1) Théorème spectral, matrice symétrique, théorème 9.165. Via le lemme de Schur.

(2) Théorème spectral autoadjoint (c'est le même, mais vu sans matrices), théorème 9.261

(3) Théorème spectral hermitien, lemme 9.159.

(4) Théorème spectral, matrice normales, théorème 9.162.

Pour les résultats de décomposition dont une partie est diagonale, voir le thème 43 sur les décompositions.

**Thème 51 : endomorphismes cycliques**

(1) Définition 9.113.

(2) Son lien avec le commutant donné dans la proposition 9.230 et le théorème 9.233.

(3) Utilisation dans le théorème de Frobenius (invariants de similitude), théorème 9.221.

**Thème 52 : déterminant**

(1) Les $n$-formes alternées forment un espace de dimension 1, proposition 9.3.

(2) Déterminant d'une famille de vecteurs 9.6.

(3) Calcul d'un déterminant de taille $2 \times 2$ : équation (9.39).

(4) Déterminant d'un endomorphisme 9.9.

(5) Interprétations géométriques

   (a) À propos d'orthogonalité, le déterminant est très lié au produit vectoriel en dimension 3. Et il le généralise en dimension supérieure.

      i. Liaison au produit vectoriel (orthogonalité) dans la proposition 9.58.

      ii. En particulier le lemme 9.59 nous dit comment un déterminant donne un vecteur orthogonal à une famille donnée de vecteurs.

   (b) Déterminant et aires, volumes

      i. Déterminant et mesure de Lebesgue : théorème 13.223.

      ii. Aire du parallélogramme : proposition 16.49.

      iii. Volume du parallélépipède avec le produit mixte et le déterminant $3 \times 3$, 16.50.

Tant que nous en sommes dans les interprétations géométrique, il faut lier déterminant, produit vectoriel, orthogonalité et mesure en notant que l'élément de volume lors de l'intégration en dimension 3 est donné par (14.117) : $dS = \|T_u \times T_v\|$ qui est la norme du produit vectoriel des vecteurs tangents à la paramétrisation.

Nous voyons dans l'équation (14.114) que l'élément de volume pour une partie de dimension $n$ dans $\mathbb{R}^m$ (à l'occasion d'y intégrer une fonction) est donné par un déterminant mettant en jeu les vecteurs tangents de la paramétrisation.

(6) Le déterminant de Vandermonde est à la proposition 9.12. Il est utilisé à divers endroits :
   (a) Pour prouver que $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$ pour tout $p$ si et seulement si $u$ est nilpotente (lemme 9.136).
   (b) Pour prouver qu'un endomorphisme possédant $\dim(E)$ valeurs propres distinctes est cyclique (proposition 9.230).

**Thème 53 : polynôme d'endomorphismes**

(1) Endomorphismes cycliques et commutant dans le cas diagonalisable, proposition 9.230.
(2) Racine carré d'une matrice hermitienne positive, proposition 12.341.
(3) Théorème de Burnside sur les sous groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 9.238.
(4) Décomposition de Dunford, théorème 9.194.
(5) Algorithme des facteurs invariants 4.99.

**Thème 54 : exponentielle de matrice**

(1) Le lemme à propos d'exponentielle de matrice 15.94 donne :

$$\|e^{tA}\| \leqslant P\big(|t|\big) \sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}. \tag{0.6}$$

(2) La proposition 9.197 : si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé, alors $A$ est diagonalisable si et seulement si $e^A$ est diagonalisable.
(3) La section 15.12.3 parle des fonctions exponentielle et logarithme pour les matrices. Entre autres la dérivation et les séries.
(4) Pour résoudre des équations différentielles linéaires : sous-section 30.6.1.
(5) La proposition 9.196 dit que l'exponentielle est surjective sur $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.
(6) La proposition 10.89 : si $u$ est un endomorphisme, alors $\exp(u)$ est un polynôme en $u$.
(7) Calcul effectif : sous-section 9.8.2.
(8) Proposition 12.338 : si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ alors $e^{\mathrm{Tr}(A)} = \det(e^A)$.

**Thème 55 : sous-groupes**

(1) Théorème de Burnside sur les sous groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 9.238.
(2) Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, lemme 12.353 ou proposition 12.354.

**Thème 56 : groupe symétrique**

(1) Définition 3.90.
(2) La table des caractères du groupe symétrique $S_4$ est donné dans la section 17.5.
(3) Le groupe symétrique $S_4$ est le groupe des symétries affines du tétraèdre régulier, proposition 16.17.
(4) Le groupe alterné $A_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60, proposition 8.49.
(5) La proposition 8.41 donne la position du groupe alterné dans le groupe symétrique : $A_n$ est un sous-groupe caractéristique de $S_n$ et l'unique sous-groupe d'indice 2.

**Thème 57 : action de groupe**

(1) Définition d'une action de groupe sur un ensemble : 3.72.

(2) Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 21.93.

(3) La formule de Burnside (théorème 3.85) parle du nombre d'orbites pour l'action d'un groupe fini sur un ensemble fini.

(4) Des applications de la formule de Burnside : le jeu de la roulette et l'affaire du collier, 16.4.4.1 et 16.4.4.2.

**Thème 58 : classification de groupes**

(1) Structure des groupes d'ordre $pq$, théorème 8.26.

(2) Le groupe alterné est simple, théorème 8.46.

(3) Définition 8.6 d'un $p$-groupe.

(4) Théorème de Sylow 8.11.

(5) Théorème de Burnside sur les sous groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 9.238.

(6) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, corollaire 5.131.

**Thème 59 : produit semi-direct de groupes**

(1) Définition 3.93.

(2) Le corollaire 3.95 donne un critère pour prouver qu'un produit $NH$ est un produit semi-direct.

(3) L'exemple 16.102 donne le groupe des isométries du carré comme un produit semi-direct.

(4) Le théorème 8.26 classifie les groupes d'ordre $pq$ ($p$, $q$ premiers distincts) à grands coups de produit semi-directs.

(5) Le théorème 16.6 donne les isométries de $\mathbb{R}^n$ par $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_\rho O(n)$ où $T(n)$ est le groupe des translations.

(6) La proposition 16.8 donne une décomposition du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \times_\rho C_2$ où $C_2 = \{\mathrm{Id}, R\}$ où $R$ est de déterminant $-1$.

(7) La proposition 11.53 donne $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_\rho \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ où $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$.

**Thème 60 : théorie des représentations**

(1) Table des caractères du groupe diédral, section 17.6.

(2) Table des caractères du groupe symétrique $S_4$, section 17.5.

**Thème 61 : isométries** Ne pas confondre une isométrie d'un espace affine avec une isométrie d'un espace euclidien. Les isométrie d'un espace euclidien préservent le produit scalaire et fixent donc l'origine (lemme 9.28). Les isométrie des espaces affines par contre conservent les distances (définition 11.54) et peuvent donc déplacer l'origine de l'espace vectoriel sur lequel il est modelé ; typiquement les translations sont des isométries de l'espace affine mais pas de l'espace euclidien.

Parfois, lorsqu'on coupe les cheveux en quatre, il faut faire attention en parlant de $\mathbb{R}^n$ : soit on en parle comme d'un espace métrique (muni de la distance), soit on en parle comme d'un espace normé (muni de la norme ou du produit scalaire).

(1) Définition d'une isométrie pour une forme bilinéaire, 9.27. Pour une forme quadratique : définition 16.2.

(2) Définition du groupe orthogonal 9.48, et le spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$ en la définition 9.51. Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ est le groupe des rotations, par corollaire 16.81.

(3) Le lemme 16.113 donne à toute rotation une matrice de la forme connue. C'est autour de cela que nous définissons les angles.

(4) Le groupe orthogonal est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$, proposition 9.50.

(5) Les isométries de l'espace euclidien sont affines, 16.4.

(6) Les isométries de l'espace euclidien comme produit semi-direct : $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \simeq T(n) \times_\rho \mathrm{O}(n)$, théorème 16.6.

(7) Isométries du cube, section 10.3.

(8) Générateurs du groupe diédral, proposition 16.100.

**Thème 62 : caractérisation de distributions en probabilités**

(1) La probabilité conjointe est la définition 34.19.

(2) La fonction de répartition est la définition 34.53.

(3) La fonction caractéristique est la définition 34.55.

**Thème 63 : théorème central limite**

(1) Pour les processus de Poisson, théorème 38.5.

**Thème 64 : lemme de transfert** Il s'agit du résultat $\hat{f}' = i\xi\hat{f}$.

(1) Lemme 27.11 sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

(2) Lemme 29.12 pour $L^2$.

**Thème 65 : probabilités et espérances conditionnelles** Les deux définitions de base, sur lesquelles se basent toutes les choses conditionnelles sont :

— La probabilité conditionnelle d'un événement en sachant un autre : $P(A|B)$ de la définition 34.29.

— L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire sachant une tribu : $E(X|\mathcal{F})$ de la définition 34.31.

Les autres sont listées ci-dessous.

**La probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un autre** donnée dans la proposition 34.29 est le nombre

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{0.7}$$

**La probabilité conditionnelle d'un événement vis-à-vis d'une variable aléatoire discrète** est par la définition 34.47 la variable aléatoire donnée par

$$P(A|X)(\omega) = P(A|X = X(\omega)). \tag{0.8}$$

Dans le cas continu, c'est la définition 34.48 :

$$P(A|X) = P(A|\sigma(X)) = E(\mathbb{1}_A|\sigma(X)). \tag{0.9}$$

**L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une tribu** $E(X|\mathcal{F})$ est la variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable telle que

$$\int_B E(X|\mathcal{F}) = \int_B X \tag{0.10}$$

pour tout $X \in \mathcal{F}$. Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors $E(X|\mathcal{F}) = \mathtt{proj}_K(X)$ où $K$ est le sous-ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables (théorème 34.31). Cela au sens des projections orthogonales.

**La probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à une tribu** est la variable aléatoire

$$P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}). \tag{0.11}$$

**L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une autre** de la définition 34.33 est une variation sur le thème :

$$E(X|Y) = E(X|\sigma(Y)), \tag{0.12}$$

Notons que partout, si $X$ est une variable aléatoire, la notation «sachant $X$» est un raccourcis pour dire «sachant la tribu engendrée par $X$».

**Thème 66 : dénombrements**

— Coloriage de roulette (16.4.4.1) et composition de colliers (16.4.4.2).
— Nombres de Bell, théorème 15.69.
— Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décomposition de fractions en éléments simples, théorème 15.47.

**Thème 67 : enveloppes**

(1) L'ellipse de John-Loewner donne un ellipsoïde de volume minimum autour d'un compact dans $\mathbb{R}^n$, théorème 18.100.
(2) Le cercle circonscrit à une courbe donne un cercle de rayon minimal contenant une courbe fermée simple, proposition 19.83.
(3) Enveloppe convexe du groupe orthogonal 12.351.
(4) Enveloppe convexe d'une courbe fermée plane comme intersection des demi-plans tangents, proposition 19.89.

**Thème 68 : équations diophantiennes**

(1) Équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{N}$, équation (3.74).
(2) Dans 3.5.7, nous résolvons $ax + by = c$ en utilisant Bézout (théorème 3.32).
(3) L'exemple 4.89 donne une application de la pure notion de modulo pour $x^2 = 3y^2 + 8$. Pas de solutions.
(4) L'exemple 4.90 résout l'équation $x^2 + 2 = y^3$ en parlant de l'extension $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et de stathme.
(5) Les propositions 4.94 et 4.96 parlent de triplets pythagoriciens.
(6) Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décomposition de fractions en éléments simples, théorème 15.47.
(7) La proposition 2.18 donne une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en résolvant dans $\mathbb{N}$ (entre autres) l'équation $k = y^2 + x$ pour $k$ fixé.

# Table des matières

**Thématique** **2**

**Table des matières** **19**

**Index** **46**

**Liste des notations** **68**

**1 Introduction (Vol 1)** **73**
1.1 Préface . . . 73
1.2 Auteurs, contributeurs, sources et remerciements . . . 73
1.2.1 Ceux qui ont travaillé sur le Frido . . . 73
1.2.2 Aide directe, mais pas volontairement sur le Frido . . . 74
1.2.3 Des gens qui ont fait un travail qui m'a bien servi . . . 74
1.3 Les choses qui doivent vous faire tiquer . . . 75
1.4 Les questions pour lesquelles je n'ai pas (encore) de réponse . . . 75
1.4.1 Mes questions d'algèbre, géométrie. . . . 75
1.4.2 Mes questions de probabilité et statistiques. . . . 77
1.4.3 Les preuves à relire par des experts . . . 77
1.5 Comment contribuer et aider (math) ? . . . 82
1.5.1 Niveau facile . . . 82
1.5.1.1 Géométrie . . . 83
1.5.2 Niveau moyen . . . 83
1.5.2.1 Questions d'analyse . . . 83
1.5.2.2 Questions de géométrie . . . 84
1.5.2.3 Questions de numérique . . . 84
1.5.3 Niveau difficile . . . 84
1.5.3.1 Questions d'analyse . . . 84
1.5.4 Question de numérique . . . 86
1.5.5 Pour ma culture générale . . . 86
1.6 Comment contribuer et aider (LaTeX et programmation) . . . 86
1.6.1 Niveau facile . . . 86
1.6.2 Niveau moyen . . . 86
1.6.3 Niveau difficile . . . 86
1.7 Sage est là pour vous aider . . . 87
1.7.1 Lancez-vous dans Sage . . . 87
1.7.2 Exemples de ce que Sage peut faire pour vous . . . 87

**2 Construction des ensembles de nombres (Vol 1)** **89**
2.1 Quelques éléments sur les ensembles . . . 89
2.1.1 Ensemble ordonné . . . 89
2.1.2 Lemme de Zorn . . . 90
2.1.3 Complémentaire . . . 90
2.1.4 Relations d'équivalence . . . 91

2.2 Les naturels . . . 92
2.2.1 La construction . . . 92
2.2.2 Quelque autres résultats . . . 92
2.3 Les entiers . . . 93
2.4 Quelques structures algébriques . . . 93
2.5 Les rationnels . . . 95
2.5.1 Suites de Cauchy dans les rationnels . . . 95
2.5.2 Insuffisance des rationnels . . . 97
2.6 Les réels . . . 100
2.6.1 L'ensemble . . . 100
2.6.2 Relation d'ordre . . . 102
2.7 Les complexes . . . 105
2.7.1 Définitions . . . 106

**3 Théorie des groupes (Vol 1) 107**
3.1 Groupes . . . 107
3.2 Sous groupe normal . . . 108
3.2.1 Classes de conjugaison . . . 109
3.3 Groupe dérivé . . . 109
3.4 Théorèmes d'isomorphismes . . . 110
3.5 Le groupe et anneau des entiers . . . 112
3.5.1 Division euclidienne . . . 112
3.5.2 Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ . . . 113
3.5.3 PGCD, PPCM et Bézout . . . 113
3.5.4 Calcul effectif du PGCD et de Bézout . . . 116
3.5.4.1 Algorithme d'Euclide pour le PGCD . . . 116
3.5.4.2 Algorithme étendu : calcul effectif des coefficients de Bézout . . . 117
3.5.5 Décomposition en facteurs premiers . . . 118
3.5.6 Écriture des fractions . . . 119
3.5.7 Équation diophantienne linéaire à deux inconnues . . . 120
3.5.8 Quotients . . . 121
3.6 Indice d'un sous-groupe et ordre des éléments . . . 122
3.7 Suite de composition . . . 125
3.8 Groupes résolubles . . . 128
3.9 Action de groupes . . . 129
3.10 Groupe des permutations . . . 134
3.11 Produit semi-direct de groupes . . . 134
3.12 Groupe de torsion . . . 136
3.13 Famille presque nulle . . . 136
3.14 Le groupe des racines de l'unité . . . 136
3.15 Fonction indicatrice d'Euler (première partie) . . . 138
3.15.1 Introduction par les racines de l'unité . . . 139
3.15.2 Générateurs . . . 140

**4 Anneaux (Vol 1) 141**
4.1 Généralités . . . 141
4.2 Binôme de Newton et morphisme de Frobenius . . . 143
4.3 Idéal dans un anneau . . . 144
4.3.1 Résultats supplémentaires sur l'anneau des entiers . . . 145
4.4 Caractéristique . . . 145
4.5 Modules . . . 146
4.6 Anneau intègre . . . 148
4.6.1 Caractéristique d'un anneau intègre . . . 149
4.6.2 Divisibilité et classes d'association . . . 150

4.6.3 PGCD et PPCM . . . 150
4.6.4 Anneaux intègres et corps . . . 151
4.6.5 Corps des fractions . . . 152
4.7 Anneau factoriel . . . 152
4.8 Anneau principal . . . 153
4.8.1 Bézout . . . 154
4.8.2 Anneau noetherien . . . 156
4.9 Anneau euclidien . . . 156
4.9.1 Équations diophantiennes . . . 158
4.9.2 Triplets pythagoriciens et équation de Fermat pour $n = 4$ . . . 159
4.9.3 Lignes et colonnes de matrices . . . 162
4.9.4 Algorithme des facteurs invariants . . . 163
4.10 Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif . . . 165
4.10.1 Division euclidienne . . . 166
4.10.2 Polynôme primitif . . . 167
4.10.3 Racines des polynômes . . . 167
4.10.4 Quelques identités . . . 169

**5 Corps (Vol 1) 171**
5.1 Généralités . . . 171
5.1.1 Corps ordonnés . . . 171
5.1.2 Automorphismes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ . . . 171
5.1.3 Corps premier . . . 173
5.1.4 Petit théorème de Fermat . . . 173
5.2 Théorème des deux carrés . . . 174
5.2.1 Un peu de structure dans $\mathbb{Z}[i]$ . . . 174
5.2.2 Résultats chinois . . . 178
5.3 Polynômes à coefficients dans un corps . . . 180
5.3.1 Irréductibilité . . . 180
5.3.2 Idéaux . . . 181
5.3.3 Bézout . . . 183
5.3.4 Lemme et théorème de Gauss . . . 183
5.4 Extension de corps . . . 184
5.4.1 Polynôme minimal . . . 184
5.4.2 Racines de polynômes . . . 187
5.4.3 Corps de rupture . . . 189
5.4.4 Corps de décomposition . . . 191
5.4.5 Clôture algébrique . . . 192
5.4.6 Extensions séparables . . . 192
5.4.7 Idéal maximum . . . 196
5.5 Espaces de polynômes . . . 198
5.5.1 Polynômes symétriques, alternés ou semi-symétriques . . . 200
5.5.2 Polynôme symétrique élémentaire . . . 200
5.5.3 Relations coefficients racines . . . 202
5.6 Polynômes cyclotomiques . . . 203
5.6.1 Définitions et propriétés . . . 203
5.6.2 Nombres premiers . . . 207
5.6.3 Théorème de Wedderburn . . . 209
5.7 Corps finis . . . 211
5.7.1 Existence, unicité . . . 211
5.7.2 Symboles de Legendre et carrés . . . 213
5.7.3 Théorème de Chevalley-Warning . . . 219
5.7.4 Contenu d'un polynôme . . . 221
5.7.5 Théorème de l'élément primitif . . . 222

5.7.6 Construction de $\mathbb{F}_q$ . . . 226
5.7.6.1 La version du faignant . . . 226
5.7.6.2 La version plus élaborée . . . 227
5.7.7 Exemple : étude de $\mathbb{F}_{16}$ . . . 229
5.7.8 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ . . . 231
5.8 Constructions à la règle et au compas . . . 233
5.8.1 Quelque constructions . . . 233
5.8.2 Nombres constructibles . . . 235
5.8.3 Polygones constructibles . . . 237
5.8.4 Matrices . . . 242
5.9 Minuscule morceau sur la théorie de Galois . . . 242
5.9.1 Théorème de d'Alembert . . . 243

**6 Topologie générale (Vol 1) 245**
6.1 Topologie en général . . . 245
6.1.1 Définitions basiques . . . 245
6.1.2 Topologie produit . . . 246
6.1.3 Séparabilité . . . 246
6.1.4 Topologie métrique . . . 247
6.1.5 Espace vectoriel topologique . . . 249
6.2 Espace vectoriel normé . . . 249
6.2.1 Introduction : norme et valeur absolue . . . 249
6.2.2 Norme . . . 250
6.2.3 Quelque exemples . . . 251
6.3 Suites de Cauchy, métrique et espaces complet . . . 252
6.3.1 Généralités . . . 252
6.3.2 Cas d'équivalence . . . 254
6.3.3 Espace topologique normé . . . 256
6.3.4 Espace métrique . . . 256
6.4 Topologie sur l'ensemble des réels . . . 257
6.5 Base de topologie . . . 259
6.6 Limite et continuité . . . 260
6.7 Compacité . . . 261
6.7.1 Quelque propriétés . . . 261
6.8 Topologie induite . . . 263
6.9 Connexité . . . 264
6.10 Un peu de topologie réelle . . . 266
6.10.1 Suites numériques . . . 266
6.10.2 Maximum, supremum et compagnie . . . 268
6.10.2.1 ... et quelque exemples . . . 268
6.10.3 Intervalles . . . 273
6.10.3.1 Connexité . . . 273
6.10.3.2 Compacité . . . 274
6.10.4 Image d'un compact . . . 276
6.10.5 Connexité par arcs . . . 278
6.10.6 Topologie de la droite réelle complétée . . . 278
6.10.7 Limite pointée ou épointée ? . . . 279
6.11 Espaces métriques . . . 279
6.11.1 Espaces métrisables . . . 279
6.11.2 Fonctions continues . . . 279
6.11.3 Caractérisations séquentielles . . . 280
6.11.4 Distance entre un point et un ensemble . . . 282
6.11.5 Compacité . . . 283
6.11.6 Ensembles enchaînés . . . 288

6.11.7 Produit fini d'espaces métriques . . . 289
6.12 Ensembles nulle part denses . . . 290
6.13 Encore de la topologie réelle . . . 291
6.13.1 Ouverts et fermés . . . 291
6.13.2 Intérieur, adhérence et frontière . . . 291
6.13.3 Point d'accumulation, point isolé . . . 293
6.13.4 Limite de suite . . . 293
6.14 Application réciproque . . . 294
6.15 Topologie des semi-normes . . . 295
6.15.1 Espace dual . . . 297
6.15.2 Espace $C^k(\mathbb{R}, E')$ . . . 297
6.16 Espaces de Baire . . . 298

**7 Espaces vectoriels (Vol 1) 301**
7.1 Parties libres, génératrices, bases et dimension . . . 301
7.2 Applications linéaires . . . 305
7.2.1 Définition . . . 305
7.2.2 Rang . . . 306
7.2.3 Matrices équivalentes et similaires . . . 307
7.3 Matrice d'une application linéaire . . . 309
7.3.1 Écriture dans une base . . . 309
7.3.2 Changement de base : vecteurs de base . . . 310
7.3.3 Changement de base : coordonnées . . . 311
7.3.4 Changement de base : matrice d'une application linéaire . . . 311
7.3.5 Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire . . . 312
7.4 Dualité . . . 312
7.4.1 Orthogonal . . . 312
7.4.2 Transposée . . . 313
7.4.3 Transposée : sans le dual . . . 315
7.4.4 Polynômes de Lagrange . . . 316
7.4.5 Dual de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ . . . 316

**8 Classification de certains groupes (Vol 1) 319**
8.1 Théorèmes de Sylow . . . 319
8.2 Un peu de classification de groupes . . . 323
8.2.1 Groupe monogène . . . 323
8.2.2 Automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . 324
8.2.3 Groupes abéliens finis . . . 326
8.2.4 Groupes d'ordre $pq$ . . . 328
8.2.5 Fonction indicatrice d'Euler . . . 331
8.3 Le groupe symétrique . . . 332
8.3.1 Décomposition en cycles . . . 332
8.3.2 Le groupe alterné . . . 334
8.3.3 Sous-groupes normaux . . . 338
8.3.4 Indice . . . 340

**9 Suite des espaces vectoriels (Vol 1) 343**
9.1 Déterminants . . . 343
9.1.1 Formes multilinéaires alternées . . . 343
9.1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs . . . 345
9.1.3 Déterminant d'un endomorphisme . . . 347
9.1.4 Déterminant d'une matrice . . . 349
9.1.5 Déterminant de Vandermonde . . . 349
9.1.6 Déterminant de Gram . . . 352

9.1.7 Déterminant de Cauchy . . . 352
9.1.8 Matrice de Sylvester . . . 352
9.1.9 Théorème de Kronecker . . . 355
9.2 Produit scalaire . . . 357
9.2.1 Projection et angles . . . 359
9.2.2 Procédé de Gram-Schmidt . . . 361
9.3 Hermitien, orthogonal, adjoint . . . 362
9.3.1 Opérateur orthogonal, matrice orthogonale . . . 363
9.4 Directions conservées . . . 364
9.4.1 Généralités . . . 364
9.4.2 Comment trouver la matrice d'une symétrie donnée ? . . . 365
9.4.2.1 Symétrie par rapport à un plan . . . 365
9.4.2.2 Symétrie par rapport à une droite . . . 366
9.4.2.3 En résumé . . . 367
9.5 Produit vectoriel . . . 367
9.5.1 Produit vectoriel . . . 368
9.5.2 Produit mixte . . . 369
9.6 Topologie . . . 371
9.6.1 Boules et sphères . . . 371
9.6.2 Ouverts, fermés, intérieur et adhérence . . . 372
9.6.3 Point isolé, point d'accumulation . . . 379
9.7 Valeur propre et vecteur propre . . . 380
9.8 Polynôme d'endomorphismes . . . 380
9.8.1 Polynômes d'endomorphismes . . . 381
9.8.2 Calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice . . . 383
9.8.3 Polynôme minimal et minimal ponctuel . . . 383
9.8.4 Polynôme caractéristique . . . 389
9.9 Diagonalisation et trigonalisation . . . 393
9.9.1 Matrices semblables . . . 393
9.9.2 Endomorphismes nilpotents . . . 394
9.9.3 Endomorphismes diagonalisables . . . 397
9.9.4 Diagonalisation : cas complexe, pas toujours . . . 400
9.9.5 Trigonalisation : généralités . . . 400
9.9.6 Trigonalisation : cas complexe . . . 401
9.9.7 Diagonalisation : cas complexe, ce qu'on a . . . 403
9.9.8 Diagonalisation : cas réel . . . 405
9.9.9 Pseudo-réduction simultanée . . . 408
9.10 Sommes de familles infinies . . . 409
9.10.1 Convergence commutative . . . 409
9.11 Fonctions . . . 413
9.12 Sous espaces caractéristiques . . . 414
9.12.1 Théorèmes de décomposition . . . 415
9.12.2 Diverses conséquences . . . 417
9.12.3 Diagonalisabilité d'exponentielle . . . 418
9.12.4 Valeurs singulières . . . 420
9.13 Extension du corps de base . . . 420
9.13.1 Extension des applications linéaires . . . 420
9.13.2 Projections . . . 422
9.13.3 Rang, polynôme minimal, polynôme caractéristique . . . 425
9.14 Frobenius et Jordan . . . 426
9.14.1 Matrice compagnon . . . 426
9.14.2 Réduction de Frobenius . . . 427
9.14.3 Forme normale de Jordan . . . 430

9.15 Commutant et endomorphismes cycliques . . . 431
9.15.1 Endomorphisme cyclique . . . 431
9.15.2 Commutant : cas diagonalisable . . . 432
9.15.3 Commutant : cas général . . . 434
9.16 Théorème de Burnside . . . 437
9.16.1 Théorème de Lie-Kolchin . . . 438
9.17 Formes bilinéaires et quadratiques . . . 441
9.17.1 Généralités . . . 441
9.17.2 Topologie . . . 441
9.17.3 Matrice associée . . . 441
9.17.4 Dégénérescence . . . 443
9.17.5 Inégalité de Minkowski . . . 444
9.17.6 Ellipsoïde . . . 445
9.18 Théorème spectral auto-adjoint . . . 446
9.19 Mini introduction au produit tensoriel . . . 449
9.19.1 Définitions . . . 449
9.19.2 Application d'opérateurs . . . 449
9.20 Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires . . . 450

**10 Espaces vectoriels normés (Vol 1) 451**
10.1 Équivalence des normes . . . 451
10.1.1 En dimension finie . . . 451
10.1.2 Contre-exemple en dimension infinie . . . 452
10.2 Norme opérateur . . . 453
10.2.1 Norme d'algèbre . . . 455
10.2.2 Application linéaire continue et bornée . . . 459
10.2.3 Normes de matrices et d'applications linéaires . . . 461
10.3 Isométriques du cube . . . 462
10.4 Chiffrement RSA . . . 464
10.4.1 Mise en place par Bob . . . 464
10.4.2 Chiffrement . . . 464
10.4.3 Déchiffrement . . . 465
10.4.4 Une imprudence à ne pas commettre . . . 465
10.4.5 Problèmes calculatoires . . . 466
10.4.6 La solidité de RSA . . . 466
10.4.7 Note non mathématique pour doucher l'enthousiasme . . . 466
10.5 Suites . . . 466
10.5.1 Limites, convergence . . . 466
10.5.2 Critère de Cauchy . . . 467
10.5.3 Approximation . . . 468
10.6 Séries . . . 469
10.7 Série réelle . . . 472
10.7.1 Critères de convergence absolue . . . 472
10.7.2 Critères de convergence simple . . . 474
10.7.2.1 Critère d'Abel . . . 474
10.7.3 Quelques séries usuelles . . . 475
10.7.4 Moyenne de Cesaro . . . 476
10.7.5 Écriture décimale d'un nombre . . . 476
10.8 Produit fini d'espaces vectoriels normés . . . 480
10.8.1 Norme . . . 480
10.8.2 Suites . . . 482
10.8.3 Continuité du produit de matrices . . . 483
10.9 Applications multilinéaires . . . 484
10.10Exponentielle de matrice . . . 486

10.11 Mini introduction aux nombres p-adiques . . . 487
10.11.1 La flèche d'Achille . . . 487
10.11.2 La tortue et Achille . . . 487
10.11.3 Dans les nombres p-adiques, c'est vrai . . . 488

**11 Espaces affines (Vol 2) 491**
11.1 Repères affines . . . 491
11.2 Classification affine des conique . . . 492
11.3 Applications affines . . . 494
11.4 Isomorphismes . . . 495
11.5 Sous espaces affines . . . 496
11.6 Barycentre . . . 497
11.6.1 Sous-espaces affines . . . 498
11.6.2 Enveloppe convexe . . . 500
11.6.3 Applications affines et barycentre . . . 503
11.7 Repères, coordonnées cartésiennes et barycentriques . . . 504
11.7.1 Équation de droite . . . 506
11.7.2 Associativité, coordonnées barycentriques dans un triangle . . . 506
11.8 Structure du groupe des applications affines . . . 507
11.9 Isométries . . . 509

**12 Analyse réelle (Vol 2) 511**
12.1 Intervalles . . . 511
12.2 Application réciproque . . . 512
12.2.1 Définitions . . . 512
12.2.2 Graphe de la fonction réciproque . . . 513
12.3 Fonctions continues . . . 514
12.3.1 La fonction la moins continue du monde . . . 516
12.3.2 Approche topologique . . . 516
12.3.3 Continuité de la racine carré, invitation à la topologie induite . . . 518
12.3.4 Limites en des nombres . . . 520
12.3.5 Limites quand tout va bien . . . 520
12.3.6 Discussion avec mon ordinateur . . . 525
12.3.7 Limites et prolongement . . . 525
12.3.8 Théorèmes des valeurs intermédiaires . . . 526
12.3.9 Théorème de la bijection . . . 526
12.3.10 Prolongement par continuité . . . 529
12.4 Espace des fonctions continues . . . 530
12.5 Uniforme continuité . . . 535
12.6 Compacité . . . 537
12.7 Limite et continuité . . . 539
12.7.1 Définition . . . 539
12.7.2 Propriétés de base . . . 540
12.7.3 Limites de fonctions . . . 540
12.7.4 Règles simples de calcul . . . 546
12.8 Limites à plusieurs variables . . . 546
12.8.1 Règle de l'étau . . . 547
12.8.2 Méthode des chemins . . . 548
12.8.3 Méthode des coordonnées polaires . . . 550
12.8.4 Méthode du développement asymptotique . . . 554
12.9 Dérivée : exemples introductifs . . . 554
12.9.1 La vitesse . . . 554
12.9.2 La tangente à une courbe . . . 555
12.9.3 L'aire en dessous d'une courbe . . . 556

12.10Continuité et dérivabilité . . . 557
12.11Dérivation de fonctions d'une variable réelle . . . 558
12.11.1 Exemples . . . 558
12.11.1.1 La fonction $f(x) = x$ . . . 558
12.11.1.2 La fonction $f(x) = x^2$ . . . 558
12.11.1.3 La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ . . . 559
12.11.2 Calcul de la dérivée . . . 559
12.11.3 Interprétation géométrique : tangente . . . 560
12.11.4 Interprétation géométrique : approximation affine . . . 560
12.12Opérations sur les dérivées . . . 561
12.12.1 Développement limité au premier ordre . . . 562
12.13Dérivation à une variable . . . 563
12.13.1 Définition . . . 563
12.13.2 Quelques formules à connaître . . . 563
12.14Dérivation et croissance . . . 563
12.14.1 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis . . . 565
12.14.2 Règle de l'Hospital . . . 567
12.14.3 À propos de primitives . . . 569
12.15Fonctions de plusieurs variables . . . 570
12.15.1 Graphes de fonctions à plusieurs variables . . . 573
12.15.2 Courbes de niveau . . . 574
12.16Dérivée directionnelle . . . 578
12.16.1 Dérivée partielle et directionnelles . . . 578
12.16.1.1 Quelques propriétés et notations . . . 579
12.16.2 Gradient : direction de plus grande pente . . . 583
12.16.3 Gradient : orthogonal au plan tangent . . . 583
12.17Dérivée directionnelle de fonctions composées . . . 584
12.18Formes différentielles . . . 586
12.18.1 Décomposition dans la base duale . . . 586
12.18.2 L'isomorphisme musical . . . 587
12.18.3 Différentielles de fonctions composées . . . 587
12.18.4 Exemple de composée : les coordonnées polaires . . . 588
12.19Différentielle . . . 589
12.19.1 Exemples introductifs . . . 590
12.19.2 Définition de la différentielle . . . 591
12.19.3 Base duale . . . 592
12.19.4 Pas la différentielle extérieure . . . 592
12.19.5 Continuité, dérivabilité et différentiabilité . . . 593
12.19.6 Calcul de valeurs approchées . . . 595
12.19.7 Prouver qu'un fonction n'est pas différentiable . . . 598
12.19.7.1 Continuité . . . 598
12.19.7.2 Linéarité . . . 598
12.19.7.3 Cohérence des dérivées partielles et directionnelle . . . 601
12.19.7.4 Un candidat dans la définition (marche toujours) . . . 602
12.19.8 Règles de calcul . . . 602
12.19.9 Linéarité . . . 603
12.19.10 Produit . . . 603
12.19.11 Différentielle de fonction composée . . . 605
12.19.12 Différentielle et dérivées partielles . . . 608
12.19.13 Plan tangent . . . 609
12.19.14 Calcul de différentielles . . . 609
12.19.15 Notes idéologiques quant au concept de plan tangent . . . 610
12.19.16 Gradient et recherche du plan tangent . . . 610

12.20 Calcul différentiel dans un espace vectoriel normé . . . 612
12.20.1 Différentielle . . . 612
12.20.2 (non ?) Différentiabilité des applications linéaires . . . 613
12.20.3 Dérivation en chaine et formule de Leibnitz . . . 613
12.20.4 Différentielle partielle . . . 617
12.20.5 Formule des accroissements finis . . . 618
12.20.6 L'inverse, sa différentielle . . . 621
12.20.7 Projection orthogonale . . . 623
12.21 Jacobienne . . . 624
12.21.1 Rappels et définitions . . . 624
12.22 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . 625
12.23 Théorèmes des accroissements finis . . . 626
12.24 Fonctions Lipschitziennes . . . 627
12.25 Différentielles d'ordre supérieur . . . 629
12.25.1 Identification des espaces d'applications multilinéaires . . . 629
12.25.2 Fonctions différentiables plusieurs fois . . . 629
12.25.3 Différentielle seconde, fonction de classe $C^2$ . . . 630
12.25.4 Ordre supérieur . . . 633
12.26 Développement asymptotique, théorème de Taylor . . . 634
12.26.1 Fonctions «petit o» . . . 635
12.26.2 Autres formulations . . . 636
12.26.3 Formule et reste . . . 637
12.26.4 Reste intégral . . . 637
12.27 Développement limité autour de zéro . . . 637
12.27.1 Généralités . . . 638
12.27.2 Formule de Taylor-Young . . . 639
12.27.3 Règles de calcul . . . 641
12.27.3.1 Linéarité des développements limités . . . 641
12.27.3.2 Développement limité d'un quotient . . . 642
12.27.3.3 Développement limité d'une fonction composée . . . 643
12.28 Développement au voisinage de $x_0 \neq 0$ . . . 644
12.29 Application au calcul de limites . . . 645
12.30 Développement au voisinage de l'infini . . . 646
12.31 Convergence uniforme . . . 646
12.31.1 Critère de Cauchy uniforme . . . 646
12.31.2 Complétude avec la norme uniforme . . . 647
12.31.3 Permuter avec les dérivées partielles . . . 649
12.32 Fonctions réelles de deux variables réelles . . . 650
12.32.1 Limites de fonctions à deux variables . . . 650
12.32.2 Dérivées partielles . . . 651
12.32.3 Différentielle et accroissement . . . 652
12.33 Les fonctions à valeurs vectorielles . . . 652
12.34 Fonctions vectorielles de plusieurs variables . . . 653
12.35 Champs de vecteurs . . . 653
12.35.1 Matrice jacobienne . . . 654
12.36 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla . . . 654
12.37 Interprétation de la divergence . . . 657
12.38 Quelques formules de Leibnitz . . . 659
12.39 Action de groupe et connexité . . . 659
12.40 Espaces de matrices . . . 661
12.40.1 Dilatations et transvections . . . 662
12.40.2 Connexité de certains groupes . . . 667
12.40.3 Densité . . . 669

12.40.4 Racine carré d'une matrice hermitienne positive . . . 671
12.40.5 Racine carré d'une matrice symétrique positive . . . 672
12.40.6 Décomposition polaires : cas réel . . . 673
12.40.7 Enveloppe convexe . . . 675
12.40.8 Décomposition de Bruhat . . . 678
12.41 Sous-groupes du groupe linéaire . . . 680

**13 Tribus, théorie de la mesure (Vol 2) 685**
13.1 Tribus . . . 685
13.1.1 Généralités . . . 685
13.1.1.1 Tribu induite . . . 686
13.1.1.2 Tribu borélienne . . . 687
13.1.1.3 Les boréliens de $\mathbb{R}$ . . . 687
13.1.2 Tribu de Baire . . . 687
13.2 Théorie de la mesure . . . 689
13.2.1 Mesure et algèbre de parties . . . 690
13.2.2 Mesure sur un espace mesurable . . . 692
13.2.3 Mesure extérieure . . . 698
13.2.4 Espace mesuré complet . . . 700
13.2.5 Prolongement . . . 708
13.3 Applications mesurables . . . 710
13.3.1 Propriétés . . . 710
13.3.2 D'une tribu à l'autre . . . 710
13.3.3 Mesure image . . . 713
13.3.4 Régularité d'une mesure . . . 714
13.3.5 Théorème de récurrence . . . 718
13.4 Mesurabilité des fonctions à valeurs réelles . . . 719
13.4.1 Quelques mots à propos de $\overline{\mathbb{R}}$ . . . 719
13.4.2 Limite supérieure et inférieure . . . 719
13.4.3 Fonctions à valeurs réelles sur un espace mesurable . . . 720
13.4.4 Fonction étagée . . . 726
13.4.5 Fonctions réelle à variables réelles . . . 729
13.5 Intégrale par rapport à une mesure . . . 729
13.5.1 Quelque propriétés . . . 731
13.5.2 Permuter limite et intégrale . . . 734
13.5.2.1 Convergence uniforme . . . 734
13.5.2.2 Convergence monotone . . . 735
13.5.2.3 Convergence dominée de Lebesgue . . . 738
13.5.3 Produit d'une mesure par une fonction (mesure à densité) . . . 739
13.5.4 Mesure et topologie . . . 740
13.6 Propriétés . . . 741
13.7 Mesure à densité . . . 742
13.7.1 Théorème de Radon-Nikodym . . . 742
13.7.2 Mesure complexe . . . 744
13.7.3 Théorème d'approximation . . . 745
13.8 Tribu produit, mesure produit . . . 745
13.8.1 Produit d'espaces mesurables . . . 745
13.8.2 Le cas des boréliens . . . 746
13.8.3 Produit de mesures . . . 747
13.9 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ . . . 752
13.9.1 Mesure et tribu de Lebesgue . . . 756
13.9.2 Propriétés de la mesure de Lebesgue . . . 757
13.9.3 Ensemble de Cantor . . . 762
13.9.4 Ensemble de Vitali (non mesurable) . . . 764

13.10 Tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ . . . 765
13.10.1 Ensembles négligeables . . . 766
13.10.2 Parties et fonctions mesurables . . . 767
13.10.3 Propriétés d'unicité . . . 767
13.10.4 Régularité . . . 769
13.11 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue . . . 769
13.11.1 Théorème de la moyenne . . . 769
13.11.2 Primitives et intégrales . . . 770
13.11.3 Exemples et applications . . . 772
13.11.4 Intégrales impropres . . . 773
13.12 Changement de variables dans une intégrale multiple . . . 775
13.12.1 Des lemmes . . . 775
13.12.2 Déterminant et mesure de Lebesgue . . . 776
13.12.3 Le théorème et sa démonstration . . . 777
13.12.4 Exemples . . . 782
13.13 Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini . . . 783

**14 Intégration (Vol 2) 793**
14.1 Intégrale sur une variété . . . 793
14.1.1 Mesure sur une carte . . . 793
14.1.1.1 Exemple : la mesure de la sphère . . . 794
14.1.2 Intégrale sur une carte . . . 794
14.1.3 Exemples . . . 795
14.1.4 Orientation . . . 795
14.1.5 Formes différentielles . . . 797
14.1.6 Intégrale d'une fonction sur une sous-variété . . . 798
14.2 Intégrales curvilignes . . . 799
14.2.1 Chemins de classe $C^1$ . . . 799
14.2.2 Intégrer une fonction . . . 799
14.2.3 Intégrer un champ de vecteurs . . . 801
14.2.4 Intégrer une forme différentielle sur un chemin . . . 801
14.2.5 Intégration d'une forme différentielle sur un chemin . . . 802
14.2.6 Interprétation physique : travail . . . 803
14.2.7 Intégrer un champs de vecteurs sur un bord en $2D$ . . . 804
14.2.8 Intégrer une forme différentielle sur un bord en $2D$ . . . 804
14.2.9 Intégrer une forme différentielle sur un bord en $3D$ . . . 804
14.2.10 Intégrer d'un champ de vecteurs sur un bord en $3D$ . . . 805
14.2.11 Dérivées croisées et forme différentielle exacte . . . 805
14.3 Surfaces paramétrées . . . 806
14.3.1 Graphe d'une fonction . . . 807
14.3.2 Intégrale sur une partie de $\mathbb{R}^m$ . . . 808
14.4 Intégrales de surface . . . 809
14.4.1 Intégrale d'un champ de vecteurs . . . 809
14.5 Intégrales de surface . . . 810
14.5.1 Aire d'une surface paramétrée . . . 810
14.5.2 Intégrale d'une fonction sur une surface . . . 811
14.5.3 Aire d'une surface de révolution . . . 812
14.5.4 Intégrale d'une 2-forme . . . 813
14.6 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface . . . 814
14.7 Divergence, Green, Stokes . . . 817
14.7.1 Théorème de la divergence . . . 817
14.7.2 Formule de Green . . . 818
14.7.3 Formule de Stokes . . . 820
14.7.3.1 Quelle est la bonne orientation ? . . . 820

14.8 Résumé des intégrales vues . . . 821
14.8.1 L'intégrale d'une fonction sur les réels . . . 821
14.8.2 Intégrale d'une fonction sur un chemin . . . 821
14.8.3 Intégrale d'une fonction sur une surface . . . 821
14.8.4 Intégrale d'une fonction sur un volume . . . 822
14.8.5 Conclusion pour les fonctions . . . 823
14.8.6 Circulation d'un champ de vecteurs . . . 823
14.8.7 Flux d'un champ de vecteurs . . . 823
14.8.8 Conclusion pour les champs de vecteurs . . . 823
14.8.9 Attention pour les surfaces fermées ! . . . 824
14.9 Intégrales convergeant uniformément . . . 825
14.9.1 Définition et propriété . . . 825
14.9.2 Critères de convergence uniforme . . . 826
14.10Fonctions définies par une intégrale . . . 827
14.10.1 Continuité sous l'intégrale . . . 827
14.10.2 Le coup du compact . . . 829
14.10.3 Dérivabilité sous l'intégrale . . . 829
14.10.4 Absolue continuité . . . 830
14.10.5 Différentiabilité sous l'intégrale . . . 832
14.11Formes différentielles exactes et fermées . . . 835
14.12Théorème d'Abel angulaire . . . 837
14.12.1 Passage à la limite sous le signe intégral . . . 841
14.12.2 Intégrale en dimension un . . . 841
14.12.3 Intégrales convergentes . . . 842
14.12.4 La méthode de Rothstein-Trager . . . 842
14.13Rappel sur les intégrales usuelles . . . 847
14.14Intégrales le long de chemins . . . 848
14.14.1 Circulation d'un champ de vecteur . . . 848
14.15Circulation d'un champ conservatif . . . 850
14.16Intégration de fonction à deux variables . . . 851
14.16.1 Intégration sur un domaine rectangulaire . . . 851
14.16.2 Intégration sur un domaine non rectangulaire . . . 852
14.16.3 Changement de variables . . . 855
14.16.3.1 Le cas des coordonnées polaires . . . 855
14.16.3.2 Les coordonnées cylindriques . . . 856
14.16.3.3 Coordonnées sphériques . . . 857
14.16.3.4 Un autre système utile . . . 857
14.17Les intégrales triples . . . 858
14.17.1 Volume . . . 860
14.18Un petit peu plus formel . . . 861
14.18.1 Intégration sur un domaine non rectangulaire . . . 861
14.18.2 Changement de variables . . . 862
14.18.2.1 Coordonnées polaires . . . 863
14.18.2.2 Coordonnées sphériques . . . 863
14.19Aire et primitive . . . 863
14.19.1 Longueur d'arc de courbe . . . 864
14.19.2 Aire de révolution . . . 864
14.20L'aire en dessous d'une courbe . . . 864
14.21Propriétés des intégrales . . . 866
14.22Techniques d'intégration . . . 867
14.22.1 Intégration par parties . . . 868
14.22.2 Changement de variables – pour trouver des primitives . . . 869
14.22.3 Changement de variables – pour calculer des intégrales . . . 870

14.22.4 Intégrations des fractions rationnelles réduites . . . 872
14.22.5 Quelques formules à connaître . . . 873
14.23 Trucs et astuces de calcul d'intégrales . . . 873
14.23.1 Quelques intégrales «usuelles» . . . 874
14.23.2 Reformer un carré au dénominateur . . . 876
14.23.3 Décomposer en fractions simples . . . 877
14.24 Constructions plus naïves de l'intégrale dans le cas réel . . . 877
14.24.1 Mesure de Lebesgue, version rapide . . . 877
14.24.2 Pavés et subdivisions . . . 878
14.24.3 Intégrale d'une fonction en escalier . . . 881
14.24.4 Intégrales partielles . . . 881
14.24.5 Réduction d'une intégrale multiple . . . 882
14.24.6 Propriétés de l'intégrale . . . 883
14.24.7 Intégrales multiples, cas général . . . 884
14.24.8 Réduction d'une intégrale multiple . . . 885
14.24.9 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^2$ . . . 886
14.24.10 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^3$ . . . 889
14.24.11 Fonctions et ensembles non bornés . . . 892

**15 Suites et séries de fonctions (Vol 2) 893**
15.1 Différentielle et dérivée complexe . . . 893
15.2 Série de fonctions . . . 896
15.2.1 Intégration de séries de fonctions . . . 899
15.2.2 Différentiabilité . . . 900
15.3 Séries entières . . . 901
15.3.1 Disque de convergence . . . 901
15.3.2 Propriétés de la somme . . . 904
15.3.3 Dérivation . . . 908
15.3.4 Intégration . . . 910
15.4 Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne . . . 911
15.5 Exponentielle et logarithme . . . 912
15.6 Vitesses de $x^\alpha$, de l'exponentielle et du logarithme . . . 919
15.7 Nombres de Bell . . . 922
15.8 Trigonométrie hyperbolique . . . 924
15.9 Séries entières de matrices . . . 925
15.9.1 Différentiabilité . . . 925
15.10 Étude d'asymptote . . . 927
15.11 Développement en série . . . 928
15.11.1 Série génératrice d'une suite . . . 928
15.11.2 Développement en série et Taylor . . . 929
15.11.3 Resommer une série . . . 931
15.11.3.1 Les sommes du type $\sum_n P(n)x^n$ . . . 931
15.11.3.2 Les sommes du type $\sum_n x^n/P(n)$ . . . 932
15.11.3.3 Sage, primitives et logarithme complexe . . . 934
15.11.3.4 Nombres de Bell . . . 936
15.12 Séries entières de matrices . . . 936
15.12.1 Rayon de convergence . . . 936
15.12.2 Convergence et rayon spectral . . . 936
15.12.3 Exponentielle et logarithme de matrice . . . 938
15.13 Lemme de Borel . . . 941
15.13.1 Fonctions plateaux . . . 941
15.13.2 Le lemme de Borel . . . 942

**16 Trigonométrie, isométries (Vol 3) 945**
16.1 Isométries de l'espace euclidien . . . 945
16.1.1 Structure du groupe Isom($\mathbb{R}^n$) . . . 945
16.1.2 Classification des isométries de $\mathbb{R}$ . . . 949
16.1.3 Segment, plan médiateur et équidistance . . . 950
16.1.4 Isométries du tétraèdre régulier . . . 950
16.2 Trigonométrie . . . 951
16.2.1 Définitions, périodicité et quelque valeurs remarquables . . . 951
16.2.2 Exemples . . . 957
16.2.3 Très modeste approximation de $\pi$ . . . 959
16.2.4 Cercle trigonométrique . . . 959
16.2.5 Les fonctions tangente et arc tangente . . . 960
16.2.6 La fonction arc sinus . . . 962
16.2.7 La fonction arc cosinus . . . 964
16.2.8 Une meilleure approximation de $\pi$ . . . 965
16.2.9 Forme trigonométrique des nombres complexes . . . 966
16.2.10 Angle entre deux vecteurs . . . 967
16.2.11 Aire du parallélogramme . . . 968
16.3 Classification des isométries dans $\mathbb{R}^2$ . . . 969
16.3.1 Réflexions . . . 969
16.3.2 Rotations . . . 971
16.3.3 Rotations vectorielles . . . 975
16.3.4 Angle . . . 976
16.3.5 Classification . . . 978
16.4 Isométries dans $\mathbb{R}^n$ . . . 981
16.4.1 Groupes finis d'isomorphismes . . . 985
16.4.2 Théorème de Sylvester . . . 987
16.4.3 Groupe diédral . . . 988
16.4.3.1 Définition et générateurs : vue géométrique . . . 988
16.4.3.2 Générateurs : vue abstraite . . . 990
16.4.3.3 Classes de conjugaison . . . 993
16.4.3.4 Le compte pour $n$ pair . . . 994
16.4.3.5 Le compte pour $n$ impair . . . 994
16.4.4 Applications : du dénombrement . . . 994
16.4.4.1 Le jeu de la roulette . . . 994
16.4.4.2 L'affaire du collier . . . 995
16.5 Angles et rotations dans $\mathbb{R}^2$ . . . 995
16.5.1 Angles orientés, rotations . . . 995
16.5.2 Angles et nombres complexes . . . 1000
16.5.3 Sous-groupes finis de SO(2) . . . 1001
16.6 Un peu de structure de O($n$) . . . 1001
16.6.1 Valeurs propres dans O($n$) . . . 1001
16.6.2 Sous-groupes finis de SO(3) . . . 1004
16.7 Coordonnées polaires . . . 1013
16.7.1 Les coordonnées polaires . . . 1013
16.7.1.1 Transformation inverse : théorie . . . 1013
16.7.1.2 Transformation inverse : pratique . . . 1014
16.7.2 Coordonnées polaires comme changement de variables pour intégrales . . . 1015
16.7.3 Changement de variables . . . 1017
16.7.3.1 Coordonnées polaires . . . 1017
16.7.3.2 Coordonnées sphériques . . . 1018
16.7.4 Coordonnées polaires . . . 1019
16.7.5 Coordonnées cylindriques . . . 1019

16.7.6 Coordonnées sphériques . . . 1020
16.7.7 Coordonnées cylindriques et sphériques . . . 1020
16.7.8 Récapitulatif des changements de variables . . . 1021
16.7.8.1 Coordonnées polaires . . . 1021
16.7.8.2 Coordonnées cylindriques . . . 1021
16.7.8.3 Coordonnées sphériques . . . 1021
16.7.9 une limite . . . 1022

**17 Représentations et caractères (Vol 3) 1023**
17.1 Représentations et caractères . . . 1023
17.1.1 Crochet de dualité et transformée de Fourier . . . 1025
17.1.2 Groupes non abéliens . . . 1026
17.1.3 Représentations linéaires des groupes finis . . . 1026
17.1.4 Module . . . 1027
17.1.5 Structure hermitienne . . . 1029
17.1.6 Caractères . . . 1029
17.2 Équivalence de représentations et caractères . . . 1030
17.2.1 Représentation régulière . . . 1032
17.2.2 Caractères et représentations : suite et fin . . . 1033
17.3 Représentation produit tensoriel . . . 1036
17.4 Exemple sur le groupe symétrique . . . 1036
17.5 Table des caractères du groupe symétrique $S_4$ . . . 1037
17.5.1 Calculs à partir de rien ou presque . . . 1037
17.5.2 Représentation de $S_4$ via les isométries du tétraèdre . . . 1039
17.5.3 À propos de la représentation $\rho_u$ . . . 1040
17.6 Table de caractères du groupe diédral . . . 1041
17.6.1 Représentations de dimension un . . . 1041
17.6.2 Représentations de dimension deux . . . 1042
17.6.3 Le compte pour $n$ pair . . . 1044
17.6.4 Le compte pour $n$ impair . . . 1044

**18 Suite de l'analyse (Vol 3) 1045**
18.1 Densité des polynômes . . . 1045
18.1.1 Théorème de Stone-Weierstrass . . . 1045
18.2 Primitive de fonction continue . . . 1048
18.2.1 Théorème taubérien de Hardi-Littlewood . . . 1049
18.2.2 Théorème de Müntz . . . 1053
18.3 Théorèmes de point fixe . . . 1056
18.3.1 Points fixes attractifs et répulsifs . . . 1056
18.3.2 Picard . . . 1056
18.3.3 Brouwer . . . 1059
18.3.4 Théorème de Schauder . . . 1061
18.3.5 Théorème de Markov-Kakutani et mesure de Haar . . . 1062
18.4 Théorèmes de point fixes et équations différentielles . . . 1064
18.4.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . 1064
18.4.2 Théorème de Cauchy-Arzella . . . 1071
18.5 Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite . . . 1072
18.5.1 Mise en situation . . . 1072
18.5.2 Théorème d'inversion locale . . . 1073
18.5.3 Théorème de la fonction implicite . . . 1076
18.5.4 Exemple . . . 1078
18.6 Décomposition polaire (régularité) . . . 1079
18.7 Théorème de Von Neumann . . . 1081
18.8 Recherche d'extrema . . . 1084

18.8.1 Extrema à une variable . . . 1084
18.8.2 Extrema libre . . . 1085
18.8.3 Extrema et Hessienne . . . 1086
18.8.4 Un peu de recettes de cuisine . . . 1088
18.8.5 Extrema liés . . . 1088
18.9 Fonctions convexes . . . 1090
18.9.1 Inégalité des pentes . . . 1091
18.9.2 Convexité et régularité . . . 1092
18.9.3 Dérivées d'une fonction convexe . . . 1092
18.9.4 Graphe d'une fonction convexe . . . 1094
18.9.5 Convexité et hessienne . . . 1098
18.9.6 Quelque inégalités . . . 1102
18.9.6.1 Inégalité de Jensen . . . 1102
18.9.6.2 Inégalité arithmético-géométrique . . . 1102
18.9.6.3 Inégalité de Kantorovitch . . . 1103
18.10 Algorithme du gradient à pas optimal . . . 1104
18.11 Ellipsoïde de John-Loewer . . . 1108
18.12 Formes quadratiques, signature, et lemme de Morse . . . 1111
18.12.1 Lemme de Morse . . . 1115
18.13 Variétés . . . 1117
18.13.1 Introduction . . . 1117
18.13.2 Définition et propriétés . . . 1117
18.13.3 Espace tangent . . . 1118
18.14 Prolongement de fonctions et complétion d'espaces métriques . . . 1119
18.15 Un petit extra . . . 1125

**19 Arc paramétré (Vol 3) 1127**
19.1 Définitions . . . 1127
19.2 Longueur d'arc . . . 1127
19.3 Abscisse curviligne . . . 1130
19.3.1 Formule intégrale de la longueur . . . 1131
19.4 Suite du chapitre . . . 1135
19.5 Courbes paramétrés . . . 1136
19.5.1 Définitions et exemples . . . 1136
19.6 Élément de longueur . . . 1138
19.6.1 Élément de longueur : cartésiennes . . . 1138
19.6.2 Élément de longueur : polaires (1) . . . 1138
19.6.3 Élément de longueur : polaires (2) . . . 1138
19.6.4 Approximation de la longueur par des cordes . . . 1140
19.7 Arc géométrique . . . 1142
19.7.1 Abscisse curviligne et paramétrisation normale . . . 1143
19.7.2 Tangente à une courbe paramétrée . . . 1148
19.8 Repère de Frenet . . . 1150
19.8.1 Torsion . . . 1152
19.9 Hors des coordonnées normales . . . 1153
19.10 Tracer des courbes paramétriques dans $\mathbb{R}^2$ . . . 1156
19.11 Courbes planes . . . 1157
19.11.1 Angle . . . 1157
19.11.2 Courbure signée . . . 1158
19.11.3 Degré, indice et homotopie . . . 1161
19.12 Courbes fermées planes . . . 1167
19.12.1 Cercle circonscrit . . . 1167
19.12.2 Description locale . . . 1169
19.12.3 Enveloppe convexe . . . 1170

19.12.4 Courbure et convexité . . . 1173
19.12.5 Théorème des quatre sommets . . . 1174
19.12.6 Le théorème de Jordan . . . 1176

**20 Géométrie hyperbolique (Vol 3) 1177**
20.1 Inversion . . . 1177
20.1.1 Cercles perpendiculaires . . . 1177
20.1.2 Inversion . . . 1178

**21 Espaces projectifs (Vol 3) 1183**
21.1 Sous espaces projectifs . . . 1183
21.2 Espace projectifs comme «complétés» d'espaces affines . . . 1185
21.3 Théorème de Pappus . . . 1188
21.4 Homographies . . . 1189
21.4.1 Homographies . . . 1189
21.4.2 Le groupe projectif . . . 1190
21.4.3 Repères projectifs . . . 1191
21.4.4 Identifications $P(\mathbb{K}^2)$ vers $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ . . . 1195
21.4.5 Birapport . . . 1196
21.5 Coordonnées homogènes . . . 1202
21.5.1 Dualité . . . 1202
21.5.2 Polynômes . . . 1203
21.6 La sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C})$ . . . 1205
21.6.1 Éléments de géométrie dans $P_1(\mathbb{C})$ . . . 1205
21.6.1.1 Équation complexe d'une droite . . . 1206
21.6.1.2 Équation complexe d'un cercle . . . 1206
21.6.1.3 Cercle-droite . . . 1207
21.6.1.4 Rotation-homothétie . . . 1208
21.6.1.5 Application linéaire . . . 1208
21.6.1.6 Inversion . . . 1208
21.6.2 Homographies . . . 1209
21.6.3 Birapport . . . 1214
21.6.4 Division harmonique . . . 1217
21.6.5 Groupe circulaire . . . 1221
21.6.6 Action du groupe modulaire . . . 1224

**22 Analyse vectorielle (Vol 3) 1229**
22.1 Le théorème de Green . . . 1229
22.2 Théorème de la divergence dans le plan . . . 1233
22.2.1 La convention de sens de parcours . . . 1233
22.2.2 Théorème de la divergence . . . 1234
22.3 Théorème de Stokes . . . 1234
22.4 Théorème de Gauss . . . 1236
22.5 Coordonnées curvilignes . . . 1238
22.5.1 Base locale . . . 1238
22.5.2 Importance de l'orthogonalité . . . 1238
22.5.3 Coordonnées polaires . . . 1240
22.5.4 Coordonnées cylindriques . . . 1240
22.5.5 Coordonnées sphériques . . . 1241
22.5.6 Gradient en coordonnées curvilignes . . . 1241
22.5.6.1 Coordonnées sphériques . . . 1242
22.5.7 Divergence en coordonnées curvilignes . . . 1242
22.5.7.1 Coordonnées cylindriques . . . 1244
22.5.7.2 Coordonnées sphériques . . . 1244

22.5.8 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales . . . 1244
22.5.9 Rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales . . . 1245
22.5.9.1 Coordonnées cylindriques . . . 1246
22.5.9.2 Coordonnées sphériques . . . 1246
22.6 Les formules . . . 1246
22.6.1 Coordonnées polaires . . . 1246
22.6.2 Coordonnées cylindriques . . . 1246
22.6.3 Coordonnées sphériques . . . 1247

**23 Espaces de Hilbert (Vol 3) 1249**
23.1 Espaces de Hilbert . . . 1249
23.1.1 Sous-espace vectoriel fermé ? ? ? . . . 1250
23.2 Théorème de la projection . . . 1250
23.3 Systèmes orthogonaux et bases . . . 1253
23.3.1 Orthogonal d'une partie . . . 1254
23.3.2 Dual, théorème de représentation de Riesz . . . 1255
23.3.3 Séparabilité . . . 1256
23.3.4 Base hilbertienne . . . 1258
23.3.5 Décomposition dans une base hilbertienne . . . 1263
23.3.6 Digression sur les normes opérateurs . . . 1267
23.3.7 Applications linéaires et continuité . . . 1268
23.4 Théorème de Kochen-Specker . . . 1269
23.5 Théorème de Lax-Milgram . . . 1270

**24 Analyse fonctionnelle (Vol 3) 1275**
24.1 Théorème d'Ascoli . . . 1275
24.2 Théorème de Banach-Steinhaus . . . 1276
24.3 Espaces $L^p$ . . . 1278
24.3.1 Généralités . . . 1278
24.3.2 L'espace $L^\infty$ . . . 1281
24.3.3 Quelque identifications . . . 1281
24.3.4 Inégalité de Jensen, Hölder et de Minkowski . . . 1282
24.3.5 Ni inclusions ni inégalités . . . 1284
24.3.6 Complétude . . . 1286
24.3.7 Densité des fonctions infiniment dérivables à support compact . . . 1290
24.3.8 Approximation . . . 1293
24.4 Convolution . . . 1294
24.4.1 Approximation de l'unité . . . 1295
24.4.2 Densité des polynôme trigonométrique . . . 1297
24.5 L'espace $L^2$ . . . 1299
24.5.1 Coefficients et série de Fourier . . . 1300
24.5.2 Dualité et théorème de représentation de Riesz . . . 1302
24.6 Théorèmes de Hahn-Banach . . . 1310
24.7 Théorème de Tietze . . . 1312
24.8 Espace de Schwartz . . . 1315
24.8.1 Topologie . . . 1316
24.8.2 Produit de convolution . . . 1319

**25 Analyse complexe (Vol 3) 1321**
25.1 Fonctions holomorphes . . . 1321
25.1.1 Équations de Cauchy-Riemann . . . 1321
25.1.2 Intégrales sur des chemins fermés . . . 1322
25.1.3 Lacets, indice et homotopie . . . 1325
25.1.4 Théorème de Cauchy et analycité . . . 1326

25.1.5 Théorème de Brouwer en dimension 2 . . . 1329
25.1.6 Principe des zéros isolés . . . 1330
25.1.7 Prolongement de fonctions holomorphes . . . 1331
25.1.8 Théorème de Runge . . . 1331
25.2 Intégrales de fonctions holomorphes . . . 1333
25.2.1 Mesure de Radon . . . 1338
25.3 Conditions équivalentes à l'holomorphie . . . 1339
25.4 Singularités, pôles et méromorphe . . . 1339
25.5 Fonctions d'Euler . . . 1340
25.5.1 Euler et factorielle . . . 1343
25.6 Partition d'un entier en parts fixées . . . 1344
25.7 Exponentielle et logarithme complexe . . . 1347
25.7.1 Définition et propriétés de l'exponentielle . . . 1347
25.7.2 Intégrale de Fresnel . . . 1349
25.7.3 Logarithme complexe . . . 1351
25.7.3.1 La fonction argument . . . 1351
25.7.3.2 Une définition possible du logarithme . . . 1354
25.7.3.3 Pas plus de continuité . . . 1356
25.7.3.4 Pas d'unicité : autres déterminations de l'argument . . . 1357
25.7.3.5 Pas d'unicité : développement en série . . . 1358
25.7.3.6 Pas d'unicité : laquelle choisir ? . . . 1358
25.7.3.7 Logarithme comme primitive . . . 1359
25.8 Théorème de Weierstrass . . . 1360
25.9 Théorème de Montel . . . 1361
25.10Espaces de Bergman . . . 1363

**26 Série de Fourier (Vol 3) 1367**
26.1 Densité des polynômes trigonométriques . . . 1367
26.1.1 Convergence pour les fonctions continues (via Weierstrass) . . . 1367
26.1.2 Convergence pour les fonctions continues (via Fejér) . . . 1367
26.1.3 Densité dans $L^p$ . . . 1370
26.1.4 Suite équirépartie, critère de Weyl . . . 1371
26.2 Fonctions de Dirichlet . . . 1373
26.3 Coefficients et série de Fourier . . . 1374
26.3.1 Le contre-exemple que nous attendions tous . . . 1377
26.3.2 Inégalité isopérimétrique . . . 1379
26.3.3 À propos des coefficients . . . 1380

**27 Transformation de Fourier (Vol 4) 1383**
27.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ . . . 1383
27.1.1 Formule sommatoire de Poisson . . . 1386
27.2 Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz . . . 1388
27.2.1 Quelque transformées de Fourier . . . 1391
27.3 Suite régularisante . . . 1393
27.3.1 Formule d'inversion . . . 1395
27.4 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ . . . 1397
27.4.1 Extension de $L^1 \cap L^2$ vers $L^2$ . . . 1397

**28 Distributions (Vol 4) 1401**
28.1 Topologie . . . 1401
28.1.1 Dérivée partielle au sens faible . . . 1401
28.2 Distributions . . . 1404
28.2.1 Multiplication d'une distribution par une fonction . . . 1406
28.2.2 Dérivée de distribution . . . 1406

28.2.3 Ordre et support d'une distribution . . . 1407
28.3 Distributions tempérées . . . 1410
28.3.1 Topologie . . . 1411
28.3.2 Distributions associées à des fonctions . . . 1411
28.3.3 Composition avec une fonction . . . 1412
28.3.4 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée . . . 1412
28.3.5 Convolution d'une distribution par une fonction . . . 1412
28.3.6 Approximation de la distribution de Dirac . . . 1413
28.3.7 Peigne de Dirac . . . 1416
28.4 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ . . . 1417
28.4.1 Dérivation . . . 1419
28.5 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ . . . 1420
28.5.1 Propriétés générales . . . 1420
28.5.2 Dérivation . . . 1422
28.6 Une équation de distribution . . . 1424

**29 Espaces de Sobolev, équations elliptiques (Vol 4) 1427**
29.1 Espaces de Sobolev . . . 1427
29.1.1 Sur un intervalle de $\mathbb{R}$ . . . 1427
29.1.2 Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . 1433
29.1.2.1 Définition . . . 1433
29.1.3 Espace de Sobolev fractionnaire . . . 1434
29.2 Trace . . . 1437
29.3 Théorème de plongement . . . 1440

**30 Équations différentielles ordinaires (Vol 4) 1445**
30.1 Équation homogène, solution particulière . . . 1446
30.2 Que faire avec $f(z)dz = g(t)dt$ ? . . . 1446
30.3 Équations linéaires du premier ordre . . . 1448
30.3.1 Pourquoi la variation des constantes fonctionne toujours ? . . . 1449
30.4 Équations à variables séparées . . . 1450
30.4.1 La méthode rapide . . . 1451
30.4.2 La méthode plus propre . . . 1451
30.4.3 Les théorèmes . . . 1451
30.5 Équations linéaires d'ordre supérieur . . . 1453
30.5.1 Équations et systèmes linéaire à coefficients constants . . . 1453
30.5.2 Si les coefficients ne sont pas constants ? . . . 1454
30.6 Système d'équations linéaires . . . 1454
30.6.1 La magie de l'exponentielle... . . . 1454
30.6.2 ...mais la difficulté . . . 1455
30.6.3 La recette . . . 1455
30.6.4 Système d'équations linéaires avec matrice constante . . . 1456
30.6.5 Système d'équations linéaires avec matrice non constante . . . 1456
30.7 Réduction de l'ordre . . . 1456
30.8 Autour de Cauchy-Lipschitz . . . 1458
30.8.1 Fuite des compacts et explosion en temps fini . . . 1458
30.8.2 Écart entre deux conditions initiales . . . 1460
30.8.3 Flot d'un champ de vecteurs . . . 1461
30.8.4 Stabilité de Lyapunov . . . 1475
30.8.5 Système proie et prédateurs : Lokta-Voltera . . . 1479
30.9 Équation du second ordre . . . 1482
30.9.1 Wronskien . . . 1482
30.9.2 Avec second membre . . . 1482
30.9.3 Équation $y'' + q(t)y = 0$ . . . 1483

30.9.4 Équation de Hill . . . . . 1484
30.10 Différents types d'équations différentielles . . . . . 1487
30.10.1 Équation homogène . . . . . 1487
30.10.2 Équation de Bernoulli . . . . . 1488
30.10.3 Équation de Riccati . . . . . 1488
30.10.4 Équation différentielle exacte . . . . . 1488
30.10.4.1 Résolution lorsque tout va bien . . . . . 1488
30.10.4.2 Facteur intégrant (quand tout ne va pas bien) . . . . . 1489
30.11 Distributions pour les équations différentielles . . . . . 1489
30.11.1 Équation de Schrödinger . . . . . 1490
30.12 Équations différentielles du premier ordre . . . . . 1493
30.13 Équations différentielles du premier ordre à variables séparables . . . . . 1496
30.14 Équations différentielles linéaires du premier ordre . . . . . 1498
30.14.1 Méthode de variation de la constante . . . . . 1500
30.15 Équations différentielles linéaires du second ordre . . . . . 1501
30.15.1 Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants . . . . . 1501
30.15.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, non homogènes . . . . . 1503
30.16 Fonction de Green . . . . . 1504

**31 Équations aux dérivées partielles (Vol 4) 1507**
31.1 Symbole principal, équation des caractéristiques . . . . . 1507
31.2 Méthode des caractéristiques pour l'ordre 1 . . . . . 1507
31.2.1 Un exemple complet un peu minimal . . . . . 1508
31.2.2 Un théorème d'existence et d'unicité . . . . . 1510
31.3 Méthode des caractéristique pour l'ordre 2 . . . . . 1513
31.3.1 Principe général . . . . . 1513
31.3.2 Exemple : l'équation d'onde . . . . . 1514
31.4 Classification des équations du second ordre . . . . . 1516
31.4.1 Problème au limite . . . . . 1517
31.5 Principe du maximum . . . . . 1518
31.6 Quelque exemples . . . . . 1522
31.6.1 Un changement de variables . . . . . 1522

**32 Numérique (Vol 4) 1525**
32.1 Introduction . . . . . 1525
32.2 Représentations numériques . . . . . 1525
32.2.1 Entier relatif en complément à deux (binaire) . . . . . 1525
32.2.2 Représentation en virgule flottante . . . . . 1527
32.2.3 Simple précision, IEEE-754 . . . . . 1527
32.3 Problèmes pour écrire des nombres . . . . . 1530
32.3.1 Troncature : la base . . . . . 1530
32.3.2 Troncature : le drift . . . . . 1531
32.3.3 Quelque bonnes règles . . . . . 1532
32.3.4 Erreur de "cancellation" . . . . . 1532
32.3.5 Calcul d'une dérivée . . . . . 1534
32.3.6 Erreur d'absorption . . . . . 1535
32.4 Conditionnement et stabilité . . . . . 1535
32.4.1 Comment choisir et penser le $K$ ? . . . . . 1538
32.5 Un peu de points fixes . . . . . 1539
32.5.1 Choix de la fonction à point fixe . . . . . 1539
32.5.2 Convergence quadratique . . . . . 1541
32.5.3 Convergence . . . . . 1542

32.6 Méthode de Newton . . . 1543
32.6.1 «Justification» par la formule par Taylor . . . 1544
32.6.2 «Justification» par points fixes . . . 1544
32.6.3 Convergence de la méthode de Newton . . . 1545
32.6.4 Formalisation de l'algorithme . . . 1547
32.6.5 Caractéristiques . . . 1548
32.6.6 Exemple de la racine carré . . . 1548
32.6.7 Si multiplicité . . . 1549
32.6.8 Et la dérivée ? . . . 1549
32.6.9 Méthode de Newton : le cas général . . . 1549
32.7 Estimation de l'ordre de convergence . . . 1551
32.8 Autres méthodes . . . 1552
32.8.1 Méthode de Schröder . . . 1552
32.8.2 Halley . . . 1552
32.9 Méthode des sécantes variables . . . 1553
32.9.1 Aitken . . . 1553
32.10Équations algébrique . . . 1554
32.10.1 Résoudre un système linéaire . . . 1554
32.10.2 Caractéristiques . . . 1555
32.10.3 Définitions . . . 1555
32.11Équations non linéaire . . . 1556
32.11.1 Méthode de bisection . . . 1557
32.12Efficacité . . . 1559
32.13Exercices . . . 1560
32.14Approximations de fonctions . . . 1563
32.14.1 Critère d'interpolation . . . 1563
32.14.2 Base de Newton . . . 1564
32.14.3 Méthode des minima quadratiques . . . 1566
32.14.4 Notre espace de Hilbert . . . 1567
32.14.5 Droite de régression . . . 1568
32.15Conditionnement d'une matrice . . . 1569
32.15.1 Perturbation du vecteur . . . 1571
32.15.2 Perturbation de la matrice . . . 1572
32.16Système linéaires (généralités) . . . 1573
32.16.1 Les méthodes directes . . . 1574
32.16.2 Méthodes itératives . . . 1575
32.17Système linéaires (méthodes directes) . . . 1575
32.17.1 Inversion de matrice triangulaire . . . 1575
32.17.2 Transformation gaussienne . . . 1575
32.17.3 Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires . . . 1577
32.17.4 Méthode de Gauss sans pivot (décomposition LU) . . . 1578
32.17.5 Matrice de permutation élémentaires . . . 1581
32.18Méthode de Gauss avec pivot partiel (décomposition PLU) . . . 1582
32.18.1 L'idée . . . 1582
32.18.2 Le théorème . . . 1583
32.18.3 D'un point de vue algorithmique . . . 1587
32.18.4 Exemples . . . 1589
32.19Résolution de systèmes linéaires (suite) . . . 1592
32.19.1 Déterminant . . . 1592
32.19.2 Plusieurs termes indépendants . . . 1592
32.19.3 Cholesky . . . 1593
32.20Système linéaire (méthodes itératives) . . . 1596
32.20.1 La méthode générale . . . 1597

32.20.2 Jacobi . . . 1597
32.20.3 Gauss-Seidel . . . 1597
32.20.4 Autres . . . 1597
32.21 Indices connectés, matrice irréductible . . . 1597
32.22 Localisation des valeurs propres . . . 1599
32.22.1 Matrices à diagonale dominante . . . 1602
32.22.2 M-matrice . . . 1604

**33 Méthodes des différences finies (Vol 4) 1609**
33.1 Problèmes de dimension un . . . 1609
33.1.1 Un schéma à cinq points . . . 1610
33.1.1.1 Poser le système . . . 1610
33.1.1.2 Propriétés du système . . . 1612
33.1.2 Exemple . . . 1614
33.2 Problèmes de dimension deux . . . 1615
33.2.1 Discrétisation en croix . . . 1615
33.2.2 Discrétisation en carré . . . 1616
33.2.3 Résolution de la discrétisation en croix . . . 1617
33.3 Consistance, convergence . . . 1619
33.3.1 Définitions, mise en place . . . 1619
33.3.2 Exemple . . . 1621
33.3.3 Consistance, stabilité et convergence . . . 1622
33.3.4 Exemple : schéma à cinq points, laplacien en croix . . . 1623
33.4 Autres laplaciens . . . 1624
33.4.1 Travail avec le laplacien à 9 points . . . 1627

**34 Variables aléatoires et théorie des probabilités (Vol 4) 1629**
34.1 Espace de probabilité . . . 1629
34.2 Variables aléatoires . . . 1630
34.2.1 Indépendance . . . 1630
34.2.2 Lois conjointes et indépendance . . . 1633
34.2.3 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes . . . 1634
34.2.4 Espérance . . . 1636
34.2.5 Variance . . . 1637
34.2.6 Covariance . . . 1638
34.2.7 Probabilité conditionnelle : événements . . . 1639
34.2.8 Espérance conditionnelle . . . 1640
34.2.9 Probabilité conditionnelle : tribu . . . 1646
34.2.10 Variables de Rademacher indépendantes . . . 1648
34.2.11 Un petit paradoxe . . . 1650
34.2.11.1 «Bonjour, je suis l'aînée» . . . 1650
34.2.11.2 «Bonjour» . . . 1651
34.2.11.3 Le parent qui répond aux questions . . . 1653
34.2.11.4 À propos des simulations . . . 1655
34.2.12 Inégalité de Jensen . . . 1655
34.2.13 Fonction de répartition . . . 1656
34.2.14 Fonction caractéristique . . . 1656
34.2.15 Fonction génératrice des moments, transformée de Laplace . . . 1657
34.2.16 Loi d'une variable aléatoire . . . 1658
34.2.17 Changement de variables . . . 1659
34.3 Convergence . . . 1660
34.4 Loi des grands nombres, théorème central limite . . . 1665
34.4.1 Loi des grands nombres . . . 1665
34.4.2 Théorème central limite . . . 1667

34.4.3 Marche aléatoire . . . 1670
34.5 Les lois usuelles . . . 1671
34.5.1 Loi de Bernoulli . . . 1671
34.5.2 Loi binomiale . . . 1672
34.5.3 Loi multinomiale . . . 1673
34.5.4 Loi géométrique . . . 1673
34.5.5 Loi de Poisson . . . 1674
34.5.6 Loi exponentielle . . . 1674
34.5.7 Approximation de la binomiale par une Poisson . . . 1677
34.5.8 Loi de Poisson et loi exponentielle . . . 1678
34.5.9 Loi normale . . . 1679
34.5.10 Vecteurs gaussiens . . . 1681
34.5.11 Variable aléatoire de Rademacher . . . 1685
34.5.12 Loi de Student . . . 1687
34.5.13 Indépendance, covariance et variance de somme . . . 1688
34.6 Estimation des grands écarts . . . 1688
34.7 Simulations de réalisations de variables aléatoires . . . 1692
34.7.1 Générateur uniforme . . . 1692
34.7.1.1 Première méthode . . . 1692
34.7.1.2 Seconde méthode . . . 1692
34.7.2 Simulation par inversion . . . 1692
34.7.2.1 Loi exponentielle . . . 1693
34.7.3 Algorithme de Box-Muller . . . 1693
34.7.4 Méthode du rejet . . . 1694
34.7.5 Simuler une loi géométrique à l'ordinateur . . . 1696
34.7.6 Simuler une loi exponentielle à l'ordinateur . . . 1696
34.7.7 Simuler une loi de Poisson à l'ordinateur . . . 1696
34.8 Sage . . . 1697
34.8.1 Loi exponentielle . . . 1697
34.8.2 Inverser des lois . . . 1697
34.9 Monte-Carlo . . . 1697
34.9.1 Intervalle de confiance . . . 1698
34.9.1.1 Principe . . . 1698
34.9.1.2 Échantillonnage préférentiel . . . 1699
34.9.1.3 Méthode de la variable de contrôle . . . 1700
34.9.1.4 Variables antithétiques . . . 1700
34.10 Résultats qui se démontrent avec des variables aléatoires . . . 1700
34.10.1 Nombres normaux . . . 1700
34.10.2 Théorème de Bernstein . . . 1702

**35 Statistiques (Vol 4) 1707**
35.1 Notations et hypothèses . . . 1707
35.2 Modèle statistique . . . 1707
35.3 Modèles d'échantillonnages . . . 1710
35.4 Estimation ponctuelle . . . 1713
35.5 Statistiques et estimateurs . . . 1715
35.5.1 Qualité des estimateurs . . . 1715
35.5.2 Méthode des moments . . . 1716
35.5.3 Méthode de substitution . . . 1718
35.5.4 Méthode du maximum de vraisemblance . . . 1718
35.5.5 Estimation d'une fonction de répartition . . . 1720
35.5.6 Espérance et variance d'un estimateur . . . 1723
35.6 Estimation par intervalle de confiance . . . 1723
35.6.1 Région de confiance . . . 1726

35.6.2 Fonction pivotale . . . 1726
35.6.3 Sondage de proportion . . . 1729
35.7 Estimer une densité lorsqu'on ne sait rien . . . 1730
35.7.1 Distance entre des mesures . . . 1731
35.7.2 Estimateur par fenêtres glissantes . . . 1731
35.8 Test d'hypothèses, prise de décision . . . 1734
35.8.1 Exemple : qualité des pièces d'usine . . . 1734
35.8.2 Exemple : la résistance d'un fil . . . 1734
35.8.3 Vocabulaire et théorie . . . 1735
35.8.4 Risque de première et seconde espèce . . . 1736
35.8.5 Modèle paramétrique de loi gaussienne . . . 1737
35.9 Tests paramétriques . . . 1738
35.10Tests d'adéquation . . . 1739

**36 Chaînes de Markov à temps discret (Vol 4) 1745**
36.1 Généralités . . . 1745
36.2 Chaînes de Markov sur un ensemble fini . . . 1746
36.3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ . . . 1748
36.3.1 Chaînes de Markov homogènes . . . 1750
36.3.2 Graphe de transition . . . 1751
36.3.3 Chaîne de Markov définie par récurrence . . . 1751
36.3.3.1 Le cas général . . . 1751
36.3.3.2 Exemple : la file de réparation de machines à laver . . . 1753
36.4 Classification des états . . . 1753
36.4.1 Chaînes irréductibles . . . 1756
36.4.2 Nombre de visites . . . 1757
36.5 Mesure invariante . . . 1762
36.6 Convergence vers l'équilibre . . . 1764
36.7 Processus de Galton-Watson . . . 1766

**37 Martingales (Vol 4) 1771**
37.1 Convergence de martingales . . . 1771
37.2 Temps d'arrêt et martingale terminée . . . 1774
37.3 Décomposition de martingales . . . 1776
37.4 Problème de la ruine du joueur . . . 1778
37.4.1 Le cas où la pièce est truquée . . . 1779
37.4.1.1 Introduction d'une martingale . . . 1779
37.4.1.2 Finitude du temps d'arrêt . . . 1780
37.4.1.3 Temps moyen de jeu . . . 1780
37.4.1.4 Probabilité de victoire du joueur . . . 1781
37.4.2 Le cas où la pièce est non truquée . . . 1782
37.4.2.1 Probabilité de gagner . . . 1782
37.4.2.2 Temps moyen de jeu . . . 1784
37.4.3 Un petit complément . . . 1784

**38 Processus de Poisson (Vol 4) 1785**
38.1 Processus de Poisson . . . 1785
38.2 Quelques trucs sur la simulation . . . 1788
38.2.1 Le théorème central limite pour Markov . . . 1789
38.2.2 Feuille 5 . . . 1789
38.2.3 Feuille 6 . . . 1789
38.2.4 Feuille 7 . . . 1790
38.2.5 Simuler des lois conditionnelles . . . 1790

**39 Utilisation dans les autres sciences (Vol 4) 1791**
39.1 Démystification du MRUA . . . 1791
39.1.1 Preuve de la formule . . . 1791
39.1.2 Interprétation graphique . . . 1792
39.2 Relativité en mécanique newtonienne . . . 1792
39.2.1 Relativité du mouvement . . . 1792
39.2.2 Bob et Alice . . . 1792
39.3 Invariance de la vitesse de la lumière . . . 1793
39.3.1 Champ de gravitation et électrique . . . 1793
39.3.1.1 Finitude de la vitesse de propagation de la force électrique . . . 1793
39.3.1.2 Pourquoi pas la gravitation ? . . . 1793
39.3.2 Support du champ : pas d'éther . . . 1794
39.3.3 Le problème . . . 1794
39.4 Conséquences . . . 1794
39.4.1 Ligne d'univers . . . 1794
39.4.2 Transformations de Lorentz . . . 1795
39.4.3 Conditions d'existence . . . 1798
39.4.4 La notion d'intervalle . . . 1799
39.4.4.1 En mécanique newtonienne . . . 1799
39.4.4.2 En mécanique relativiste . . . 1799
39.4.5 Le cône de lumière d'un point . . . 1799
39.4.6 Contraction des longueurs . . . 1800
39.4.7 Dilatation des intervalles de temps . . . 1800
39.4.8 Invariance de l'intervalle . . . 1801
39.4.8.1 Rappel de trigonométrie hyperbolique . . . 1802
39.4.8.2 Les transformations de Lorentz (bis) . . . 1804
39.4.9 Vitesse limite . . . 1806
39.5 Applications . . . 1806
39.5.1 Le GPS . . . 1806
39.5.2 Les ondes électromagnétiques . . . 1806
39.6 Mécanique relativiste . . . 1806
39.6.1 Des problèmes, toujours des problèmes . . . 1807
39.6.2 Loi d'addition des vitesses . . . 1807
39.6.3 L'action d'une force . . . 1808
39.6.4 Équivalence entre la masse et l'énergie . . . 1809
39.7 Principe de correspondance . . . 1809

**40 Exemples avec Sage (Vol 4) 1811**

**41 Épilogue : la constante de Weiner (Vol 4) 1831**

**42 GNU Free Documentation License (Vol 4) 1833**

**Bibliographie 1841**

# Index


$\lambda$-système, 695
$p$-Sylow, 319
$p$-groupe, 319
Éther, 1794
Événement, 1799
élément
    inversible
        dans un anneau, 142
élémentaire
    polynôme symétrique, 200
équation
    aux variations, 1467
    de Riccati, 1488
    des classes, 132
    des orbites, 132
    différentielle
        étude qualitative, 1486
        Hill, 1484
        homogène, 1487
        système, 1486
    diophantienne, 120, 158, 161
    Fredholm, 1059
    orbite-stabilisateur, 131
équation différentielle
    linéaire du premier ordre, 1498
    linéaire du premier ordre, homogène, 1499
    linéaire du second ordre, 1501
    linéaire du second ordre, homogène, 1501
    premier ordre, 1493
    second ordre, 1494
    variables séparables, 1496
équation homogène associée, 1499
équilibre
    point point une équation différentielle, 1475
équivalence
    de norme, 451
étagée
    fonction, 726
état
    apériodique, 1765
    récurrent, 1754
    récurrent positif, 1754
    transitoire, 1754
étranger
    dans leur ensemble, 166

abélianisé, 110
Abel
    angulaire, 838
    convergence radiale, 906
abscisse
    curviligne, 1143
absolument continue, 830
absorbant, 1753
accélération d'un chemin, 1127
accroissement, 652
accumulation
    dans $\mathbb{R}$, 293
    dans espace vectoriel normé, 379
action, 129
    adjointe, 130
    de groupe
        Wedderburn, 209
    domaine fondamental, 132
    fidèle, 129
    libre, 133
    transitive, 133
action de groupe, 350
    sur des matrices, 1115
adhérence, 291, 375
affine
    application, 494
    espace, 491
    sous-espace, 496
affine (application), 309
aire, 888
algébrique
    extension, 184
    nombre, 191
    par rapport à une extension de corps, 196
algébriquement
    indépendant, 242
algèbre, 148
    de parties, 690
    engendrée, 148
    polynômes, 165
algorithme, 1555
    consistant, 1555

convergeant, 1555
facteurs invariants, 163
fortement consistant, 1555
stable, 1555
alignement
dans un espace projectif, 1184
alterné
groupe, 334
polynôme, 200
alternée
forme linéaire, 343
analytique
au sens complexe, 1326
angle
d'une courbe, 1160
entre deux droites, 976
entre vecteurs, 967
orienté de vecteurs, 997
Anneau
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
polynôme cyclotomique, 205
anneau, 93
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 209, 213, 329, 464
à division, 171
de séries formelles, 922
utilisation, 1344
euclidien
facteurs invariants, 163
factoriel, 153
intègre, 148
noetherien, 156
principal, 155, 175, 387
utilisation, 177
quotient par un idéal, 144
apériodique
état d'une chaîne de Markov, 1765
chaîne de Markov, 1765
application
définie positive, 357
de classe $C^k$, 629
différentiable, 591, 593, 626, 629, 1074, 1115
extrema lié, 1089
en escalier, 880
linéaire
théorème de Banach-Steinhaus, 1276
mesurable, 694
multilinéaire, 484
ouverte, 482
semi-définie positive, 357
tangente, 597
application réciproque, 294
approximation
de fonctions
par des polynômes, 1703
de l'unité, 1295
par polynômes, 1051
polynômiale, 1331
arc
géométriques, 1142
paramétré, 1127
arc cosinus, 964
arc sinus, 962
arc tangente, 961
archimédien, 94
associée
subdivision, 880
associés
éléments d'un anneau, 150
asymptotiquement pivotale, 1726
attractif
point fixe, 1056
automorphisme
d'espace vectoriel, 305
axiome
du choix, 89

Bézout
anneau principal, 155
calcul effectif, 117
nombres entiers, 114
polynômes, 183
Baire
espace, 298
théorème, 290, 299
tribu, 688
Banach
espace, 1249
barycentre
cas affine, 497
cas vectoriel, 985
enveloppe convexe, 501
base, 301
canonique de $\mathbb{R}^m$, 304
d'un module, 147
de Newton, 1564
de topologie, 247
dénombrable, 259
espace métrique, 259
duale, 586
espace préhilbertien, 1258
hilbertienne, 1258
utilisation, 1379
locale, 1238
Bergman (espace), 1363
Bernoulli, 1671
somme, 1689
Berry-Esséen (borne), 1670

Bessel
inégalité, 1257
biais
d'estimateur, 1716
bien
conditionné, 1536
enchaîné, 288
bijection, 294
bilinéaire, 484
binormale, 1151
birégulier
point sur une courbe, 1140
birapport, 1196
birapport dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 1214
Bolzano-Weierstrass
espaces métriques, 283
bon
ordre, 90
borélienne
fonction, 710
tribu, 687
boréliens, 687
bord, 292
borné, 248
partie de $V$, 371
temps d'arrêt, 1774
bornée, 272
différentielle, 625
partie de $\mathbb{R}^m$, 535
suite, 266
boule
avec semi-normes, 295
fermée, 291, 371
ouverte, 247, 291, 371
Bruhat (décomposition), 678
Burnisde
formule, 133

Cône de lumière, 1799
canonique
base, 304
décomposition, 91
espace affine, 491
Cantor
ensemble, 762
caractéristique
d'un anneau, 145
d'une équation différentielle, 1507
polynôme, 389
sous-groupe, 107
caractère, 1029
abélien, 1023
de $S_4$, 1037
groupe diédral, 1041
irréductible, 1030
cardioïde, 1140
carré
dans un corps fini, 213
catégorie
ensemble de première, 290
Cauchy
critère
uniforme, 647
déterminant, 352
formule, 1326
produit, 904
théorème, 319
Cauchy-Riemann, 1321
Cauchy-Schwarz, 357, 1250
Cayley
théorème, 319
cellule d'un pavage, 879
centrale (application), 1030
centralisateur, 107, 141
centre
d'un anneau, 141
d'un groupe, 107
d'une rotation, 972
cercle
circonscrit à une courbe, 79, 1167
dans la sphère de Riemann, 1206
cercle-droite, 1207
cercles
perpendiculaires, 1177
Cesaro
moyenn, 476
chaîne, 288
de Markov, 1745
apériodique, 1765
convergence, 1766
finie, 1746
homogène, 1745
irréductible, 1751
récurrente positive, 1760
régulière, 1747
champ
conservatif, 850
de vecteurs, 801
champ dérivant d'un potentiel, 850
changement de variable, 1142
Chasles, 491
Chemin
classe $C^2$, 799
chemin, 799, 1127
dans $\mathbb{R}^p$, 1127
circulation, 848
clôture algébrique, 191

classe
conjugaison
dans $S_4$, 333
d'association, 150
de conjugaison, 109
classe $C^1$, 612
classe d'association, 150
codimension, 305
coefficient
de Fourier, 1367
coefficients
de Fourier, 1300
coefficients binomiaux, 143
coercion, 1270
coercive, 1104
colinéarité, 1183
combinaison
convexe, 497
combinatoire, 994
commutant, 431
commutateur
dans un groupe, 109
compacité, 283, 285, 289, 1335, 1360
sous-groupes du groupe linéaire, 680
théorème de Dini, 649
utilisation, 1109
théorème de Montel, 1361
compact, 246, 373, 537
arc paramétré, 1127
Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$, 276
boule unité, 276
et fonction continue, 276, 284
fermé et borné, 275
implique fermé, 262
intervalle $[a, b]$, 274
le coup du, 829
localement, 247
opérateur, 1275
produit dénombrable, 290
produit fini, 289
quasi, 247
relatif, 1275
relativement, 247
séquentiellement, 247
suite exhaustive, 287
complément
à deux, 1526
complémentaire, 90
complété
d'un espace métrique, 1123
complétion
projective, 1186
complétude, 1121, 1123, 1286
de $\mathbb{R}$, 467
espaces $L^p$, 1287
complète
famille de projecteurs, 147
complet
$\mathbb{R}$, 257
corps, 94
espace mesuré, 700
espace topologique, 252
métrique, 252
composante, 652
composition
suite de, 125
concave, 1090
log-concave, 1097
condition initiale, 1494
conditionnement
absolu, 1536
d'une matrice inversible, 1570
relatif asymptotique, 1555
conjugués
éléments d'une extension, 185
connectés
indices d'une matrice, 1597, 1598
connexe
par arc, 278
connexité, 289
définition, 264
et intervalles, 273
fonction holomorphe, 1330
indice d'une courbe, 1325
le groupe $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, 669
par arc
fonction différentiable, 627
points d'accumulation, 285
prolongement analytique, 1125
signature d'une forme quadratique, 1112
théorème de Runge, 1331
théorème des valeurs intermédiaires, 517
utilisation
Brouwer, 1329
Conservative, 803
consistance
estimateur, 1715
ordre, 1620
constructible
angle, 237
point, 233
réel, 233
construction
des réels, 101
contenu, 167
continue, 514

fonction
en un point, 261
fonction entre espaces métriques, 279
fonction entre espaces topologiques, 261
fonction réelle, 514
forme différentielle, 586
sur espace métrique, 519
uniformément, 535
continuité, 541
fonction définie par une intégrale, 827
séquentielle, 280
sur un intervalle, 514
contraction, 1056
convergeant
schéma discret, 1620
convergence
absolue, 469
commutative, 409
dans un espace vectoriel normé, 467
de martingales, 1775
de suite, 246
en loi, 1660
en probabilité, 1660
normale, 469
ordre, 1551
presque sûrement, 1660
quadratique, 1541
rapidité, 920, 1386, 1387, 1550, 1689
série, 469
suite
dans un corps, 94
suite dans $\mathbb{R}^m$, 293
suite numérique, 266, 1051, 1371
Abel angulaire, 838
uniforme, 646
intégrale, 825
série de fonctions, 470
théorème de Dini, 649
convergent
estimateur, 1715
convexe
courbe plane, 1169
fonction sur $\mathbb{R}^n$, 1098
convexité
barycentre, 500
enveloppe de $O(n)$, 676
fonction, 1090
inégalité de Jensen, 1102
locale, 1311
méthode de Newton, 1546
stricte, 1090
utilisation, 1109
convolution, 1635, 1768
coordonnées
barycentriques, 505
cartésiennes
dans un espace affine, 504
curvilignes, 1238
cylindrique, 1020
dans un espace affine, 492
homogène, 1202
sphériques, 1020
corps, 93
archimédien, 94
complet, 94
de décomposition, 191
de rupture, 189
polynôme cyclotomique, 205
des fractions, 152
des fractions rationnelles
utilisation, 1344
extension, 193, 201
fini, 213, 217, 220
Wedderburn, 209
formellement réel, 171
ordonné, 94
premier, 173
cosinus, 951
angle entre deux vecteurs, 967
hyperbolique, 924
courbe, 1127
étude métrique, 1379
de Jordan, 1176, 1379
efficacité, 1736
fermée, 1157
simple, 1157
courbe de niveau, 571, 574
courbure, 1151
signée, 1158
totale, 1159
covariance, 1638
critère
Abel, 902
Abel pour intégrales, 826
Cauchy
uniforme, 647
de Cauchy, 467
série alternée, 474
Weierstrass, 826
série de fonctions, 898
critique
Galton-Watson, 1768
point, 1085
point d'un arc, 1140
région, 1735
valeur, 1736

cyclique
endomorphisme, 385
groupe, 107
matrice, 385
cycloïde
coordonnées normales, 1145
longueur, 1139

décalage, 1527
décimale
décomposition, 479
décomposition
Bruhat, 678
canonique, 91
corps, 191
Dunford, 416
application, 418
exponentielle de matrice, 417
Jordan
et exponentielle de matrice, 418
polaire, 674
primaire, 415
sous-espaces caractéristiques, 415
spectrale, 415
dénombrable, 92
à l'infini, 247
dénombrement, 994
partitions de $\{1, \dots, n\}$, 922
dérivé
groupe, 109
dérivée
au sens de distributions, 1427
dans Sobolev $H^1(I)$, 1427
directionnelle, 578, 582
distributionnelle, 1406
faible, 1401
fonction à valeurs dans $E'$, 298
partielle, 578, 580, 651
seconde, 563
dérivabilité
fonction définie par une intégrale, 829
lemme de Borel, 942
dérivable, 557, 563
au sens complexe, 893
fonction, 1445
dérivation
au sens des distribution
Sobolev, 1431
déterminant, 343
Cauchy, 1054
d'un endomorphisme, 348
d'une famille de vecteurs, 345
de Cauchy, 352
et inversibilité, 348
forme linéaire alternée, 343
Gram, 352, 1054
interprétation géométrique, 776
résultant, 354, 842
utilisation, 1109
Vandermonde, 349
détermination
logarithme, 1357
principale, 1357
développable
en série entière, 929
développement
asymptotique, 646
limité
en zéro, 638
fonction holomorphe, 1321
premier ordre, 562
Taylor, 1115
degré
application $S^1 \to S^1$, 1161
d'un polynôme, 165
d'une représentation, 1023
extension de corps, 185
dense
nulle part, 290
densité, 1123
conjointe, 1634
d'une variables aléatoire, 1630
dans un espace de fonction
critère de Weyl, 1371
de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, 258
utilisation, 1096
de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, 669
de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, 1318
de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, 1291
de $L^2\big([0,1]\big)$ dans $L^p\big([0,1]\big)$, 1292
de $S^+(n, \mathbb{R})$ dans $S^{++}(n, \mathbb{R})$, 673
des fonctions étagées dans $L^p$, 1291
des polynômes
dans $C_c^0[0,1]$, 1703
matrices diagonalisables dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$, 669
mesure, 78, 739
points extrémaux dans $\mathcal{L}$, 675
prolongement, 1121
densité d'une mesure, 739
diédral, 995
diagonale
dominante, 1602
fortement dominante, 1602
strictement dominante, 1602
diagonalisable, 397
et polynôme minimum scindé, 397
exponentielle, 418

diagonalisation
cas complexe, 404
cas réel, 406
endomorphisme auto-adjoint, 446
simultanée, 399
diamètre, 535
difféomorphisme, 616, 862, 1017
de classe $C^k$, 629
différence
centrée, 1609
divisée, 1565
progressive, 1609
régressive, 1609
différentiabilité, 627
différentiable, 597
dans un Banach, 612
deux fois, 629
sur un ouvert, 603
différentielle, 591, 592, 612
de $u \mapsto u^{-1}$, 621
partielle, 617
totale, 652
dilatation, 662
dilatation (matrice), 162
dimension, 304
$n$-formes multilinéaires alternées, 343
définition, 304
sous espace affine, 496
utilisation, 501
direction, 579, 1148
sous-espace affine, 496
Dirichlet
noyau, 1368
théorème, 1368
théorème (sur les nombres premiers), 209
disque de convergence, 901, 903
distance, 247
associée à une norme, 251
compatible, 249
entre deux mesures de probabilités, 1731
invariante, 249
point et ensemble, 282
distingué, 107
distribution, 1404
équation de Schrödinger, 1490
de Dirac, 1410
produit par une fonction, 1406
tempérée, 1410
divergence, 655
diviseur
dans un anneau, 141
de zéro, 148
de zéro à droite, 148
polynôme, 166
division
euclidienne, 113, 166
harmonique, 1217
domaine, 511
fondamental d'une action, 132
dominé
modèle statistique, 1714
dominée
convergence (Lebesgue), 738
mesure, 743
droite
dans la sphère de Riemann, 1206
projective, 1183
dual
algébrique, 312
d'un espace de Hilbert, 1255
de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, 316
de $L^p(\Omega)$, 1309
de $L^p$, 1305
topologique, 312
Dunford
décomposition, 416
dyadique, 765

écart-type, 1637
échantillon, 1708, 1710
effectif
empirique, 1739
efficacité
courbe, 1736
d'une méthode itérative, 1559
élément
de surface, 811
de torsion, 136
élément de surface, 793
ellipsoïde, 445
elliptique
équation aux dérivées partielles, 1516
endomorphisme, 305
auto-adjoint, 446
cyclique, 385
décomposition
polaire, 674
diagonalisable, 437, 671, 1486
Dunford, 416
diagonalisation, 406
nilpotent
Dunford, 416
préservant une forme quadratique, 682
sous-espace stable, 416, 1486
engendré, 144
$\lambda$-système, 695
corps et anneau, 186

idéal dans un anneau, 144
sous-espace affine, 496
sous-groupe, 108
tribu, 686
par une variable aléatoire, 1631
ensemble
de Cantor, 762
différence symétrique, 91
infini, 89
entrelacement, 1030
enveloppe
convexe, 500
équation
différentielle
linéaire, 1448
ordinaire d'ordre 1, 1445
variables séparées, 1450
générale de degré $n$, 243
équicontinuité, 1275
équi-intégrable, 1775
équivalence
arcs paramétrés, 1142
chemin, 1134
classe de fonctions, 1278
de représentations, 1030
de suites, 468
homotopie, 1325
norme, 451
relation, 91
suite de composition, 127
erreur, 1566, 1596
assignation, 1530
de consistance, 1620
discrétisation, 1620
quadratique, 1569
troncature, 1530
erreur relative, 1530
escalier, 726
espérance, 1636
conditionnelle, 1640, 1641
événement, 1642
variable aléatoire, 1646
Espace
de Sobolev, 1433
espace
$L^2$
Sobolev, 1431
$L^p$, 1279
Banach, 1249
de Baire, 298
de Bergman, 1363
de fonctions
$L^p$, 1287
Sobolev $H^1$, 1431
de Hilbert
espace de Sobolev $H^1$, 1431
de probabilité, 1629
de Schwartz, 1315, 1410
de Sobolev, 1427, 1434
euclidien, 361
métrique, 247
base de topologie, 259
mesuré, 692
complété, 703
mesurable, 685
projectif, 1183
propre, 380
tangent, 1118
topologique, 264
métrisable, 279
vectoriel
dimension, 343
espace vectoriel
topologique, 249
estimateur, 1715
biais, 1716
consistant, 1715
convergent, 1715
de fonction de répartition, 1721
maximum de vraisemblance, 1718
estimation
des grands écarts, 1689
étrangers
polynômes, 166
Euclide
algorithme étendu, 116
lemme, 118
euclidien
anneau, 156
espace, 358
Euler
indicatrice, 139
événement, 1629
exact
intervalle de confiance, 1724
excès
intervalle de confiance, 1724
exhaustive (suite de compacts), 287
exponentielle, 916
complexe, 1347
convergence, 476
de matrice, 418, 486, 938
utilisation, 1082
existence, 913
rapide, 466
unicité, 913

exposant, 326, 437
d'un groupe, 108
extension
corps de base, 420
de corps, 184, 201
algébrique, 184, 189
finie, 222
simple, 186
utilisation, 238
isométrie, 1122
extrémal
point dans un convexe, 675
extrémité
d'un intervalle, 273
extrapolation, 1564
extrema, 1086
lié, 1089
local
relatif, 1088
volume d'un ellipsoïde, 1109
extremum, 1115

facteur
intégrant, 1489
factoriel
anneau, 153
factorisation
de polynôme, 168, 187
faisceau de droites, 1203
famille
sommable, 410
Fatou, 737
Fejér
noyau, 1368
fermé, 245, 292, 373
dans un compact, 262
fermeture, 375
séquentielle, 281
fidèle (action), 129
filtration, 1771
fine
subdivision, 1128
fixateur, 129
flot, 1462, 1507
flux
d'un champ de vecteur, 818
flux d'un champ de vecteurs, 815
fonction, 511
Γ d'Euler, 1341
étagée, 1290
à décroissance rapide, 1315
borélienne, 710
caractéristique, 882
d'une variable aléatoire, 1656
continue
égales, 282
par morceaux, 729
convexe, 1090, 1096
croissante, 511
décroissante, 511
définie par une intégrale, 827, 832, 942, 1360
Γ d'Euler, 1341
utilisation, 1676
de classe $\mathcal{C}^1$, 625
de Dirichlet, 1373
de Möbius, 231
de répartition, 1656
en escalier intégrable, 881
génératrice, 1657
holomorphe, 893, 1360
théorème de Montel, 1361
image, 511
méromorphe
Γ d'Euler, 1341
monotone, 512
par morceaux, 729
valeurs vectorielles, 652
fonctionnelle
énergie, 1272
fondamental
domaine d'une action, 132
forme
bilinéaire, 357
non dégénérée, 443
différentielle, 586
exacte, 835
fermée, 835
linéaire
différentielle, 1089
quadratique, 441, 988, 1112, 1114, 1115
groupe orthogonal, 682
matrice associée, 441
forme canonique
fonction simple, 726
forme linéaire
alternée, 343
formule
Bayes, 1639
Burnside, 133
d'expulsion (produit vectoriel), 368
de Cauchy, 1326
Hadamard, 903
inversion Möbius, 231
probabilité totales, 1639
sommatoire de Poisson, 1386
Stirling, 468
Taylor

reste intégral, 637
utilisation, 1550
Fourier, 1386
série
utilisation, 1379
transformée
groupe abélien fini, 1025
fréquence
empirique, 1739, 1757
fraction
rationnelle
intégration, 842
fraction rationnelle, 872
fractions (corps), 152
Fredholm
équation, 1059
Frenet
formules, 1152
Fresnel
intégrale, 1349
Frobénius
réduction, 428
Frobenius
morphisme, 146
frontière, 292, 378
Fubini
théorème
dans $\mathbb{R}^n$, 791

générateur, 107
génératrice
partie d'un module, 147
géométrie
avec des groupes, 988, 1224
avec nombres complexes, 988, 1224
géométrique
avec des nombres complexes, 1379
Galton-Watson
sous-critique, 1768
sur-critique, 1768
Gauss
lemme
polynômes, 184
somme de, 215
Gershgorin
disque, 1599
Grönwall (lemme), 1445, 1446
gradient, 594, 603, 624
Gram (déterminant), 352
Gram-Schmidt, 361
graphe, 511, 560
de transition (chaîne de Markov), 1751
fonction, 570
fonction de deux variables, 573
groupe
$p$-groupe, 319
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 1114
action, 1224
utilisation, 682
agissant sur un ensemble
diédral, 988
alterné, 334
circulaire, 1221
dérivé, 109
de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, 667
de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$, 667
du groupe alterné, 337
du groupe symétrique, 335
de Galois, 242
de permutation, 1041
caractères de $S_4$, 1037
de permutations, 994
de torsion, 136
des isométries
espace métrique, 248
des symétries, 986
diédral, 988, 995
générateurs (preuve), 988
générateurs (utilisation), 1041
en géométrie, 988
et géométrie, 343, 994, 1224
isométries du cube, 462
fini, 209, 213, 321, 329, 464, 994
alterné, 336
diédral, 988
Wedderburn, 209
linéaire, 678
décomposition polaire, 674
enveloppe convexe de $\Omega(n)$, 676
hyperplan, 317
sous-groupes compacts, 680
modulaire, 1224
orthogonal, 363
d'une forme quadratique, 682
partie génératrice, 336, 464, 1224
permutation, 343, 350, 464, 678
diédral, 988
projectif, 1190
quotient, 125
résoluble, 128
spécial orthogonal, 364
symétrique, 134
action sur un triangle, 1027
groupe dérivé
de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 661

Hadamard
formule, 903

Hardy-Littlewood (théorème), 1051
Hausdorff, 246
Heine (théorème), 536
hermitien
produit scalaire, 362
hessienne, 631
Hilbert, 1249
holomorphe, 893
homéomorphisme, 260
homogène
chaîne de Markov, 1745
homographie, 1189, 1224
sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 1210
homotopie, 1163
hyperbolique
équation aux dérivées partielles, 1516
hyperplan, 981
de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, 317
sépare
au sens strict, 1311
séparer
au sens large, 1311
hypothèse
alternative, 1735
composite, 1735
multiple, 1735
nulle, 1735
simple, 1735

idéal
bilatère, 94
dans un anneau, 93
maximal, 153
maximum, 197
principal
à droite, 153
à gauche, 153
identifiable, 1714
identité
polarisation, 441
image, 511
inégalité
arithmético-géométrique, 1102
Bessel, 1257
Cauchy-Schwarz, 357, 1250
de Khintchine, 1686
de la moyenne, 626
des pentes, 1091
Hölder, 1283
utilisation, 1637, 1703
isopérimétrique, 1379
Jensen, 1102
espérance conditionnelle, 1655
pour une somme, 1102
version intégrale, 1282
Kantorovitch, 1103
Markov, 1665
Minkowski, 1284
triangulaire, 247, 250
produit scalaire, 358
incompressible
champ de vecteur, 657
indécomposable
module, 147
indépendance, 1633
événements, 1630
utilisation, 1701, 1778
affine, 504
algébrique, 242
projective, 1191
sous tribus, 1630
variables aléatoires, 1631
indicatrice d'Euler, 139
indice, 123
d'une courbe dans $\mathbb{C}$, 1325
de rotation, 1162
inductif, 90
induite
topologie, 375
tribu, 686
inférence statistique, 1707
infimum, 269
injection, 294
intégrable, 730
fonction non en escalier, 887
fonction positive, 892
intégrale
calcul, 1371
convergente, 774, 842
d'une fonction sur une carte, 794
d'une fonction sur une variété, 799
d'une forme différentielle, 802
fonction en escalier, 881
Fresnel, 1349
impropre, 773, 774
sur un chemin, 799
intégration
fraction rationnelle, 842
intérieur, 291
d'un ensemble, 372
point, 372
intègre
anneau, 148
interpolation, 1564
Intervalle, 1799
intervalle, 90, 511
fermé, 511

longueur, 753
ouvert, 511
intervalle de confiance
asymptotique, 1728
invariant
de similitude, 428
invariante
mesure
pour une chaîne de Markov, 1762
inverse généralisé, 1693
inversion, 1178
dans le groupe symétrique, 332
inversion dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 1208
involution, 399
irréductible
chaîne de Markov, 1751
dans un anneau, 152
module, 147
polynôme, 180
représentation, 1028
irrationalité
$\sqrt{2}$, 97
isobarycentre, 498
isolé
élément de $\mathbb{R}$, 293
point dans un espace vectoriel normé, 379
isométrie
d'espaces métriques, 248
de forme quadratique, 945
de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, 988
espace euclidien
isométries du cube, 462
forme bilinéaire, 358
groupe, 248
isomorphisme
$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, 213
d'anneaux, 93
d'espaces topologiques, 260
de corps, 93
espace affine, 495
espace vectoriel normé, 459
espaces vectoriels, 305
isotrope
cône, 444
totalement, 444
isotrope (vecteur), 444

jacobien, 624, 654
Jordan
chemin, 818
courbe, 1379
réduction, 430
Jordan-Hölder, 125

Kronecker, 304

lacet, 1325
Lagrange
multiplicateur, 1089
polynôme, 316
théorème, 123
lagrangien, 1089
Laplace
transformée, 1657
laplacien, 1244
Legendre
symbole, 213
Leibnitz, 559, 562
applications entre espaces vectoriels normés, 617
lemme
Borel, 942
d'Euclide, 118
de Borel-Cantelli, 1663
de Gauss
contenu de polynôme, 221
pour des entiers, 118
de Morse, 1115
de Schreider, 127
de Slutsky, 1662
de transfert, 711
de Zorn, 90
des noyaux, 381
Fatou, 737
Gauss
dans un anneau principal, 155
polynômes, 184
Grönwall, 1445, 1446
Hadamard, 834
regroupement, 1633
Schur complexe, 401
Schur réel, 405
Levi-Civita, 1239
libre
action, 133
partie, 301
partie d'un module, 147
Ligne d'univers, 1795
limite, 413
d'ensembles, 694
d'une fonction, 260
de fonctions holomorphes, 1360
de suite
espace topologique, 246
fonction, 260, 539
fonction de plusieurs variables, 540
inférieure, 719, 720
inversion, 922, 1051, 1279, 1360

permutation
utilisation, 1658
suite, 467
suite dans $\mathbb{R}^m$, 293
suite numérique, 266
supérieure, 719, 720
unicité, 260
linéaire
application, 305
Lipschitz, 1056
localement, 628
Lipschitzienne, 627
localement
intégrable, 773
log-concave, 1097
logarithme
complexe, 1354
dans $\mathbb{C}$, 1351
de matrice, 939
sur les réels positifs, 917
loi
$\chi^2$, 1687
binomiale
comportement asymptotique, 1689
conjointe, 1633
d'une variable aléatoire, 1658
de Poisson, 1674
des grands nombres
forte, 1666
pour les chaînes de Markov, 1764
processus de Poisson, 1786
utilisation, 1689, 1701
marginale, 1633
normale
vecteur gaussien, 1681
parente, 1707, 1708
parente d'un échantillon, 1710
réciprocité quadratique, 217
sans mémoire, 1676
Student, 1687
Lokta-Voltera, 1479
longueur
élément de, 1138
arc géométrique, 1143
d'un arc paramétré compact, 1128
d'un intervalle, 753
d'une arrête, 878
longueur d'arc, 1130

M-matrice, 1604
méromorphe, 1340
Méthode
de Newton, 1545
méthode
des chemins, 548
Newton, 1550
cas convexe, 1546
métrique
discrète, 248
métrisable, 254
maigre, 687
maigre (ensemble), 290
majorant, 268, 269
essentiel, 1281
Markov
inégalité, 1665, 1713
martingale, 1771
bornée dans $L^2(\Omega)$, 1772
matrice, 678, 1224
équivalence, 307
dans le groupe linéaire, 682
associée à une forme quadratique, 441
compagnon, 426
creuse, 1574
cyclique, 385
de dilatation, 162
de permutation, 162
de similitude, 893
de Sylvester, 352
de transition, 1745
de transvection, 162
dense, 1574
hermitienne
racine carré, 671
jacobienne, 603, 624
normale, 404
orthogonale, 363
permutation
élémentaire, 1581
réductible, 1598
racine carré, 671
semblable, 671
semblables, 988, 1114
stochastique, 1745
symétrique, 1114
réelle, 1112
trigonalisable, 400
matrices
similitude, 308
maximal
idéal, 153
maximale
partie orthonormale, 1259
maximum, 268, 271
global, 1084
local, 1084
mesurable

application, 694
au sens de $m^*$, 699
ensemble, 692
fonction, 710
Lebesgue, 877
mesure
$\sigma$-finie, 692
absolument continue, 743
angle entre vecteurs, 998
complexe, 744
dans une carte, 793
de Borel, 716
de comptage, 693, 790
de Haar, 1062, 1063
de Lebesgue, 756
de Radon, 716, 1338
extérieure, 689
externe, 877
finie, 692
sur algèbre de partie, 690
image, 713
positive, 692
probabilité, 1629
produit, 750
régulière, 716
extérieure, 716
intérieure, 716
sur algèbre de partie, 690
minimum, 271
ensemble ordonné, 89
minorant, 269
modèle
échantillonnage, 1708, 1710
paramétrique, 1708
statistique, 1707
modulaire (groupe), 1224
module
de continuité, 1120
indécomposable, 147
irréductible, 147
simple, 147
sur un anneau, 146
moment, 1636
fonction génératrice, 1657
monôme, 165
monogène, 107
extension de corps, 186
monotonie, 1483
morceau
fonction continue ou monotone, 729
morphisme
d'algèbres, 148
d'anneaux, 93
de corps, 93
espace vectoriel normé, 459
Frobenius, 146
moyenne
de Cesaro, 476
empirique, 1638
empirique d'un échantillon, 1711
quadratique, 1637
multiplicateur
de Lagrange, 1089
multiplicité
racine d'un polynôme, 168
racine de $f(x) = 0$, 1544
valeur propre
algébrique, 390
géométrique, 390

négatif, 103
négligeable
partie d'un espace mesuré, 700
nabla, 611
Newton
méthode, 1550
nilpotent, 142
niveau de confiance, 1724
nombre
complexe
norme 1, 209
dénormalisé, 1528
de Fermat, 238
de Néper, 914
normal, 1701
normalisée, 1528
premier, 113, 175, 209, 213, 329, 464, 920
dans leur ensemble, 113
deux nombres entre eux, 113
théorème des deux carrés, 177
tours d'une courbe plane, 1161
nombre premier
polynôme cyclotomique, 205
non dénombrable, 92
normé
espace vectoriel, 250
normal
arc paramétré, 1143
endomorphisme, 404
nombre, 1701
sous-groupe, 107
normal extérieur
vecteur, 817
normale
loi réduite, 1680
principale, 1151
normalisateur, 107

norme, 250
  équivalence, 451
  d'algèbre, 455
  d'application linéaire, 453
  d'une application linéaire, 453
  euclidienne, 251
    dans $\mathbb{R}^m$, 449
  supremum, 251
  vecteur, 359
noyau
  d'une forme bilinéaire, 444
  Dirichlet, 1368
  Fejér, 1368
nulle part dense, 290

observation, 1629
opérateur
  adjoint, 362
  autoadjoint, 363
  définit positif, 406
  hermitien, 363
opérateurs
  compatibles, 1269
opposés
  chemins, 1134
orbite
  d'un point sous une action, 129
ordre, 89
  élément, 108
  bon ordre, 90
  d'un groupe, 108
  d'un polynôme, 167
  dans un corps, 94
  de convergence d'un schéma, 1620
  distribution, 1407
  partiel, 89
  sur un anneau factoriel, 153
  total, 89
orientable
  variété, 796
orientation, 795
origine
  abscisse curviligne, 1143
  repère affine, 504
orthogonal, 448, 1254
  coordonnées curviligne, 1238
  famille de projecteurs, 147
  matrice, 363
  opérateur, 363
  sous-espace, 312
  vecteur, 359
orthonormé, 449
  système, 1256
oscillation
  d'une fonction, 530
  d'une fonction en un point, 530
osculateur (cercle), 1156
ouvert, 245, 272, 292, 373
  dans $\mathbb{R}^n$, 291

pôle, 1005
parabolique
  équation aux dérivées partielles, 1516
parallèle
  sous-espaces affines, 496
paramétrages
  admissible, 1142
paramétrisation, 1134
  normale, 1143
Parseval, 1263
partie
  génératrice, 301
  régulière, 638
  totale, 1256
partie génératrice, 107
partition
  d'un entier en parts fixées, 1344
  dénombrable mesurable, 722
  de l'unité, 798
pavé, 877, 878
pavable, 878
Pearson
  theoreme, 1740
peigne de Dirac, 1416
permutation, 134
  matrice, 162
permuter
  dérivée et intégrale
    $\mathbb{R}^n$, 832
    dans $\mathbb{R}$, 829
    dans $\mathbb{R}$ avec les bornes, 831
  dérivée et limite, 649
  différentielle et intégrale
    $\mathbb{R}^n$, 833
  intégrale
    et série, 790
  limite et intégrale, 827
    convergence dominée, 738
    convergence monotone, 735
    espace mesuré, 827, 828
  série entière et dérivation, 908
  série entière et intégration, 910
  somme et intégrale, 736, 899
petit théorème de Fermat, 173
PGCD
  dans un anneau intègre, 150
  polynômes, 183
pgcd, 113, 142

calcul effectif, 116
pivotale, 1726
plan
projectif, 1183
tangent, 612, 652
Plancherel, 1263
plongement, 1121
Poincaré (demi-plan), 1224
point
d'équilibre
stable, 1475
pondéré, 497
point critique
définition, 1116
point fixe, 1768
attractif, 1056
Brouwer, 1059
Picard, 1057
Schauder, 1061
Poisson
formule sommatoire, 1386
processus, 1785
polarisation (identité), 441
polynôme
à plusieurs indéterminées, 220, 355
alterné, 200
annulateur, 381, 384
caractéristique, 389, 403
contenu, 167
cyclotomique, 203
irréductibilité, 205
propriétés, 205
d'endomorphisme, 671
décomposition de Dunford, 416
de Bernstein, 1703
irréductible, 180
séparable, 192
sur $\mathbb{F}_q$, 232
Lagrange, 316
minimal, 188, 383
d'un élément d'une extension, 184
ponctuel, 384
racines, 201
séparable, 192
scindé, 181
semi-symétrique, 200
symétrique, 200, 201, 220, 350, 355
élémentaire, 200, 202
trigonométrique, 1298
portée
mesure, 743
positif, 103
potentiel, 806, 850
PPCM
dans un anneau intègre, 150
ppcm, 113
précision
simple, 1527, 1528
préhilbertien, 1249
premier
corps, 173
deux éléments d'un anneau principal, 154
deux polynômes entre eux, 167
idéal, 154
sous corps, 173
premier temps d'atteinte, 1753
premier type
région solide, 890
presque
nulle, 136
partout, 694
surjective, 1312
primitif
élément d'un corps, 213
élément d'une extension de corps, 186
polynôme, 167
au sens du pgcd, 167
racine, 225
triplet pythagoricien, 159
primitive, 557, 848
de fonction continue, 1049
et intégrale, 770, 774
fonction, 569
principal
anneau, 154
idéal, 153
principe
prolongement analytique, 1125
zéros isolés, 1330
Principe de correspondance, 1810
probabilité
conditionnelle, 1639
problème
aux limites d'évolution, 1517
aux limites stationnaires, 1517
bien posé, 1517
limite de Dirichlet, 1517
limite de Von Neumann, 1517
problème de Cauchy, 1494
processus
adapté à une filtration, 1771
arrêté, 1776
croissant prévisible, 1776
Galton-Watson, 1766
Poisson, 1785
sans mémoire, 1676

produit
d'espaces vectoriels normés, 480
d'une mesure par une fonction, 78, 739
de Cauchy, 904
de convolution, 1294
et Fourier, 1383
distribution et fonction, 1406
espaces mesurés, 752
espaces topologiques, 246
mixte, 367, 369
scalaire
en général, 357
hermitien, 362
sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, 461
sur $\mathbb{R}^n$, 447
semi-direct, 134
tensoriel
de représentations, 1036
vectoriel, 367, 368
produit remarquable, 1333
projecteur
dans un module, 147
projectif
complétion, 1186
droite, 1183, 1184
espace, 1183
groupe, 1190
hyperplan, 1184
plan, 1183
repère, 1191
sous-espace, 1183
projection
orthogonale, 1252
prolongement
analytique, 1125
utilisation, 1362
de fonctions, 1121
lemme de Borel, 942
méromorphe de la fonction $\Gamma$, 1341
par continuité, 526, 529
dans $H^1(I)$, 1430
par densité, 1121
théorème de Hahn, 708
propriété d'intersection non vide, 261
puissance
d'un point, 1177
d'un test, 1736
d'une inversion, 1208

quasi-compact, 247
quaternion, 196
quotient, 113, 166
dans une suite de composition, 125
de groupe, 125
de groupes, 328

réciproque
continuité, 294
dérivabilité, 561
récurrent
état, 1754
nul, 1754
point d'un système dynamique, 718
positif, 1754
réduction
d'endomorphisme, 416
Frobénius, 428
Jordan, 430
réel, 101
réflexif, 1309
réflexion, 949
dans $\mathbb{R}^2$, 969
glissée, 978
par rapport à un hyperplan, 982
région
critique, 1735
de confiance exact, 1726
de rejet, 1735
régularité
d'une mesure, 716
extérieure de la mesure de Lebesgue, 759
intérieure de la mesure de Lebesgue, 761
régulière
surface, 807
régulier
arc, 1140
chemin, 818
point d'un arc, 1140
polyèdre, 950
régulier à droite, 141
répulsif
point fixe, 1056
résidu
méthode itérative, 1596
résolvante, 1456
résultant, 353
utilisation, 355, 842
règle
du produit nul, 148
Règle de Leibnitz, 562
racine
carré
de matrice hermitienne, 671
carré de matrice
hermitienne positive, 671
d'un polynôme, 167
de l'unité, 136, 205, 209, 437, 988, 1224
primitive, 138

utilisation, 205
de polynôme, 188
multiple, 1544
primitive, 225
simple, 1544
racine carré, 518
raffinement, 1128
subdivision d'un pavé, 879
rang, 306, 343, 988
classe d'équivalence, 308
diagonalisation, 406
différentielle, 1089
utilisation, 1255
rare, 687
rayon
de convergence, 901
de courbure, 1151
de torsion, 1152
spectral, 417, 455
recouvrement, 537
rectangle
produit de tribus, 745
rectifiable, 1128
arc géométrique, 1143
rejet
région dans une prise de décision, 1735
relèvement, 1161
relations
coefficient-racines, 202
de Chasles, 491, 866
relativement
compact, 247, 1275
repère
affine, 504
cartésien
espace affine, 491
de Frenet, 1151
projectif, 1191
Représentation
virgule flottante normalisée, 1527
représentation
de groupe fini
caractères de $S_4$, 1037
fidèle, 1023
groupe diédral, 1041
irréductible, 1028
produit tensoriel, 1036
régulière gauche, 1032
virgule fixe, 1527
reste, 113, 166
d'un développement limité, 638
risque
première espèce, 1736
quadratique, 1715
seconde espèce, 1736
rotation
en dimension 2, 971
rotation-homothétie, 1208
rupture
corps, 189

séparé, 246
espace topologique, 246
séparable, 1256
élément d'une extension, 194
espace topologique, 246
extension de corps, 194
polynôme irréductible, 192
polynôme non constant, 192
sépare
les points, 1046
série
dans un espace vectoriel normé, 469
de Fourier, 1374, 1386
utilisation, 1379
de Laurent, 1340
de puissance, 901
divergence, 469
donnant $(1-A)^{-1}$, 471
entière, 901, 922, 1386
Abel angulaire, 838
fonctions holomorphes, 1326
processus de Markov, 1768
utilisation, 1344, 1658
fonctions, 1051, 1386
génératrice d'une suite, 929
utilisation, 1344
géométrique, 475
harmonique, 475
nombres, 1051
numérique, 920, 922
Riemann, 475
Taylor, 930
schéma
consistant, 1620
schéma numérique, 1620
Schrödinger, 1490
Schur (théorème), 1030
section, 580
de graphe, 571
propriété des, 747
segment
dans $\mathbb{R}^p$, 273
dans un espace affine, 498
semblables
matrices, 393
semi-définie positive, 406

semi-norme, 295
semi-simple
endomorphisme, 386
semi-symétrique
polynôme, 200
signature
d'une permutation, 332
similitude, 893
simple
extension de corps, 186
fonction, 726
groupe, 107
module, 147
singularité, 1339
effaçable, 1339
pôle, 1339
sinus, 951
hyperbolique, 924
sinus cardinal, 875
solfège, 137
solution
générale, 1493
particulière, 1493
somme
inférieure, 884
partielle, 469
supérieure, 884
somme directe (de représentations), 1027
somme partielles
Abel angulaire, 838
sommet, 1175
sous anneau, 144
sous arc, 1127
sous-additivité
sur algèbre de parties, 690
sous-espace
affine engendré par une partie, 496
caractéristique, 414
sous-groupe
caractéristique, 107
distingué, 329
dans le groupe alterné, 336
engendré, 108
normal, 125, 328
sous-martingale, 1771
sous-module, 147
sous-suite, 535
spectre
d'un endomorphisme, 380
matrice hermitienne, 403
matrice symétrique réelle, 406
sphère, 371
de Riemann, 1205
stabilisateur, 129
stabilité
d'un point d'équilibre, 1475
Lyapunov, 1475
stable, 1535
schéma numérique, 1623
stathme
sur $\mathbb{Z}[i]$, 174
stathme euclidien, 156
stationnaire
chaîne de Markov, 1762
statistique, 1715
statistiques
descriptives, 1707
strictement
convexe
sur $\mathbb{R}^n$, 1098
structure
complexe, 1158
structure d'anneau canonique, 141
Student, 1687, 1728
subdivision, 879
associée à une fonction, 880
d'un intervalle, 1128
subordonnée
norme, 453
suite, 136
équirépartie, 1371
critère de Weyl, 1371
arithméticogéométrique, 476
définie par itération, 1550
de Cauchy, 252
dans un corps, 94
de composition, 125
de fonctions, 1279
théorème de Montel, 1361
de fonctions intégrables, 827, 1360
de Jordan-Hölder, 125
exacte, 134
régularisante, 1393
support, 881
d'une permutation, 332
distribution, 1407
famille d'éléments, 136
supremum, 268, 269
d'une suite d'ensembles, 685
sur-martingale, 1771
surface paramétrée, 806
surjection, 294
Sylow
$p$-Sylow, 319
Sylvester (matrice), 352
symétrique

polynôme, 200
symbole
de Legendre, 213
symbole principal, 1507
système
fondamental, 1453
orthonormé, 1256
trigonométrique, 1257, 1297

tétraèdre, 950
tangent
vecteur unitaire, 1151
tangente, 960, 1148
tangente à un chemin, 1118
Tangente hyperbolique, 1804
tangente hyperbolique, 925
taubérien, 1049
taux d'accroissement, 1091
Taylor, 634
série entière, 929
temps d'arrêt, 1774
temps de retour, 1753
terminée
martingale, 1775
test, 1735
bilatéral, 1736
unilatéral, 1736
théorème
élément primitif, 195, 222, 223
accroissements finis, 619
dérivée directionnelle, 582
dans $\mathbb{R}$, 566
forme générale, 626
Ascoli, 1275
Bézout
polynômes, 183
utilisation, 353
Baire, 290
Banach-Steinhaus, 1276
avec semi-normes, 1277
base incomplète, 303
Beppo-Levi, 735
Bolzano-Weierstrass, 283
Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$, 276
Borel-Cantelli, 1629
Borel-Lebesgue, 275
Brouwer, 1060
dimension 2, 1329
Carathéodory, 501
Cauchy
groupe, 124
Cauchy-Arzela, 1071
Cauchy-Lipschitz, 1064
Cayley-Hamilton, 392, 670
central limite, 1667
processus de Poisson, 1787
Chevalley-Warning, 220
chinois, 179
anneau des polynômes, 180
anneau principal, 154
Cochran, 1712
Cochrane, 1713
convergence
dominée de Lebesgue, 738
monotone, 735
d'Alembert-Gauss, 180
décomposition des noyaux
et exponentielle de matrice, 383
de Baire, 299
de Jordan, 1176
de représentation de Riesz, 1255
des deux carrés, 177
version faible, 175
Dini, 649
Dirichlet, 1368
forme faible, 209
Doob, 1775
du rang, 306
extension d'isométrie, 1122
extrema
lié, 1089
Fejér, 1369
fonction implicite dans $\mathbb{R}^n$, 1077
fonction implicite dans Banach, 1076
fondamental du calcul intégral, 770
Fubini
dans $\mathbb{R}^n$, 791
espace mesuré, 786
version compacte dans $\mathbb{R}^2$, 852
Fubini-Tonelli, 783
fuite des compacts, 1459
Gauss
polynômes, 183
Gauss-Wantzel, 238
Glivenko-Cantelli, 1721
Hahn-Banach, 1310
Hardy-Littlewood, 1051
Heine, 536
incidence, 1184
inversion locale, 1074
utilisation, 1089, 1115
isomorphisme
second, 111
troisième, 112
isomorphisme de Banach, 1275
Jordan, 1379
Kronecker, 355

Lagrange, 123
Lie-Kolchin, 439
Lokta-Voltera, 1479
Markov-Takutani, 1063
Montel, 1361
Pappus
affine, 1188
projectif, 1188
Pearson, 1740
petit de Fermat, 173
Picard, 1057
point fixe
Brouwer, 1329
projection
cas vectoriel, 1252
partie fermée convexe, 1250
prolongement de Hahn, 708
prolongement de Riemann, 1340
Radon-Nikodym, 743
complexe, 744
représentation de Riesz, 1309
Rolle, 565
Rothstein-Trager, 842
Runge, 1331
Schauder, 1061
Schur, 1030
spectral, 415
autoadjoint, 446
matrice symétrique, 406
matrices normales, 404
stabilité de Lyapunov, 1475
Stone-Weierstrass, 1046, 1048
Sylvester, 988
taubérien, 1049
taubérien faible, 840
transfert, 1659
Tykhonov, 288
dénombrable, 290
fini, 289
valeurs intermédiaires, 517
Von Neumann, 1082
Wedderburn, 209
Weierstrass, 284
topologie, 245, 375
$*$-faible, 297, 1405
$p$-adique, 488
et semi-normes, 295
faible, 455
forte, 454
induite, 263
métrique, 248, 272
produit, 246
sur $\mathscr{D}(\Omega)$ , 1402
sur $\mathscr{D}(K)$ , 1402
sur $C^\infty(\Omega)$ , 1402
sur dual topologique, 297
usuelle sur $\mathbb{R}^n$, 375
topologique
somme directe, 1254
torsion, 1152
d'un groupe, 136
totale, 1256
trace, 1437
dual de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, 316
endomorphisme, 394
matrice, 394
produit scalaire sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, 461
unicité pour la propriété de trace, 317
transcendant, 196
par rapport à une extension de corps, 196
transformée
de Cauchy, 1338
de Fourier, 1383, 1656
continuité, 1384
groupe abélien fini, 1025
Fourier
distribution tempérée, 1412
Laplace, 1657, 1658
transformation
Fourier, 1386
gaussienne, 1575
transient
état, 1754
transition
probabilité, 1745
transitive, 133
transitoire
état, 1754
transposée, 313
transvection, 662
transvection (matrice), 162
transversale, 132
tribu, 685
borélienne, 687
de Baire, 688
de Lebesgue, 756
engendrée, 686
par un événement, 1631
par une application, 711
par une variable aléatoire, 1631
induite, 686
produit, 745
trigonalisation
et polynôme caractéristique, 400
simultanée, 439
triplet

pythagoricien, 159
type
fini
en algèbre, 196
espace vectoriel, 302

unicité
des mesures, 697
unipotent, 142
unitaire
normale principale, 1151

valeur
principale (distribution), 1410
propre, 380
singulière, 420
valeur absolue
$p$-adique, 488
valeur principale, 1351
valeur propre
d'une forme quadratique, 443
valuation
$p$-adique, 488
d'un polynôme, 166
Vandermonde (déterminant), 349
variété, 1089
variété
orientée, 796
variable
de décision, 1736
variable aléatoire, 1630
absolument continue, 1630
Bernoulli
marche aléatoire, 1748
utilisation, 1703
binomiale
utilisation, 1778
centrée, 1636
de Bernoulli
utilisation, 1778
de Rademacher, 1685
intégrable, 1636
suite de variables aléatoire de Bernoulli, 1766
variance, 1637
empirique, 1637, 1711
empirique corrigée, 1711
vecteur gaussien, 1681
variation des constantes, 1449, 1454
vecteur
cyclique, 385
gaussien, 1681
propre, 380
unitaire normal, 1151
unitaire tangent, 1149
Vitali (ensemble), 764
vitesse d'un chemin, 1127
voisinage, 272, 375
volume
d'une région solide, 891
région bornée dans $\mathbb{R}^3$, 888
vraisemblance, 1718

Weiner
constante, 1831
Wronskien, 1482

# Liste des notations

$N \lhd G$ Le sous-groupe $N$ est normal dans $G$, page 107

**Algèbre**

$\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ Les applications une fois continument dérivables, page 625

$\mathcal{L}(E, F)$ Ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$, page 305

$\mathbb{K}(A)$ corps contenant $\mathbb{K}$ et $A$, page 186

$\mathbb{K}[A]$ anneau contenant $\mathbb{K}$ et $A$, page 186

$\mathbb{N}_0$ les naturels non nuls : $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, page 92

$\mathcal{M}_{n\times m}$ l'ensemble des matrices $n \times m$, page 309

$\nabla f$ gradient de la fonction $f$, page 603

$\mathtt{proj}_V$ projection de $V \times W$ sur $V$, page 482

$\mathrm{Span}(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $A$, page 301

$df_a(u)$ Application de la différentielle de $f$ sur le vecteur $u$, page 591

$f^{(n)}$ La $n$-ième dérivée de la fonction $f$, page 634

$o(x)$ fonction tendant rapidement vers zéro, page 635

$(p)$ idéal engendré par $p$, page 144

$[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ degré d'une extension de corps, page 185

$\mathbb{F}_p$ lorsque $p$ est premier, page 173

$\mathbb{F}_{p^n}$ corps fini à $p^n$ éléments, page 211

$\mathbb{Q}$ corps des fractions sur $\mathbb{Z}$, page 152

$\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$ Le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{A}$, page 152

$\mathrm{Fun}(X, Y)$ les applications de $X$ vers $Y$, page 141

$\mathrm{S}(E)$ Les opérateurs auto-adjoints de $E$, page 446

$\mathrm{U}_n$ Le groupe des racines $n^{\mathrm{e}}$de l'unité., page 136

$\mathrm{res}(P, Q)$ résultat des polynômes $P$ et $Q$, page 353

$\sqrt{A}$ racine d'une matrice hermitienne positive, page 671

$\theta_\alpha(P)$ la multiplicité de $\alpha$ par rapport à $P$, page 168

$A[X]$ tous les polynômes de degré fini à coefficients dans $A$, page 165

$A_n[X]$ les polynômes à coefficients dans $A$ et de degré inférieur à $n$, page 165

$C(P)$ matrice compagnon, page 427

$D \mid P$ $D$ divise $P$, page 166

$E_\lambda(u)$ Espace propre de $u$, page 380

$mat_{\mathcal{B}}(q)$ matrice de $q$ dans la base $\mathcal{B}$, page 1108

$U(A)$ ensemble des inversibles, page 142

**Ensembles de matrices**

$\mathrm{Aut}(E)$ automorphisme de l'espace vectoriel $E$, page 305

$\mathrm{End}(E)$ les endomorphismes de $E$, page 305

$L(E,F)$ applications linéaires bornées (continues), page 459

$\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, page 364

$\Omega(E)$ formes quadratiques non dégénérées, page 1111

$Q(E)$ formes quadratiques réelles sur $E$, page 441

$Q^+(E)$ formes quadratiques positives, page 1111

$Q^{++}(E)$ formes quadratiques strictement définies positives, page 1111

$S^+(n,\mathbb{R})$ matrices symétriques définies positives, page 406

$S^{++}(n,\mathbb{R})$ matrices symétriques strictement définies positives, page 406

$S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ matrices symétriques réelles de signature $(p,q)$, page 1111

$\beta(s)$ Vecteur unitaire de la binormale, page 1151

$\gamma \sim g$ Équivalence d'arcs paramétrés, page 1142

$\nu(s)$ Vecteur unitaire de la normale principale, page 1151

$c(s)$ rayon de courbure, page 1151

$t(s)$ Torsion, page 1152

**Géométrie**

$(x_0 : \ldots : x_n)$ coordonnées homogènes dans un espace projectif, page 1202

$\mathcal{C}\mathrm{onv}(A)$ enveloppe convexe, page 500

$\mathbb{C}[G]$ combinaisons d'éléments de $G$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, page 1027

$\mathrm{PGL}(E)$ groupe projectif, page 1190

$B^o$ orthogonal dans le dual, page 312

$P(E)$ l'espace projectif de $E$, page 1183

$P_1(\mathbb{C})$ sphère de Riemann, page 1205

**Chaînes de Markov**

$\pi(x)$ lié au temps de retour, page 1757

**Probabilités et statistique**

$\sigma(X)$ La tribu engendrée par la variable aléatoire $X$, page 1631

$a \wedge b$ $\min(a,b)$, page 1775

$K_X$ matrice de covariance d'un vecteur gaussien, page 1681

$m(\mathcal{A})$ Ensemble des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables, page 710

**Théorie des groupes**

$(G/H)_g$ classes à gauche, page 130

$[a]_p$ ensemble des $a + kp$, page 121

$[G, G]$ groupe dérivé, page 109

$[g, h]$ commutateur dans un groupe, page 109

$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ Le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$., page 508

gr groupe engendré, page 107

$\hat{G}$ groupe des caractères de $G$, page 1023

$\sigma_x$ réflexion par rapport à $x$, page 949

$A_n$ groupe alterné, page 334

$D(G)$ groupe dérivé, page 109

$D_n$ groupe diédral, page 988

$G^{ab}$ groupe abélianisé de $G$, page 110

$N \times_\phi H$ produit semi-direct, page 134

$S_n$ le groupe symétrique, page 134

**Topologie et théorie des ensembles**

$\complement A$ Le complémentaire de l'ensemble $A$, page 90

$\mathrm{Diam}(A)$ Diamètre de la partie $A$, page 535

$\partial A$ La frontière de l'ensemble $A$, page 378

$A \Delta B$ différence symétrique, page 91

$A^c$ complémentaire de $A$, page 90

**Analyse**

$\mathrm{Isom}(X)$ Le groupe des isométries de $X$, page 248

$\mu \ll \nu$ La mesure $\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure $\nu$., page 743

$C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$ Fonctions à valeurs dans les distributions., page 1489

$C^\infty(I, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ fonctions à valeurs dans les distributions, page 1417

$(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$ complété de l'espace mesuré $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$, page 703

$\mathcal{L}(E, F)$ Les applications linéaires de $E$ vers $F$, page 613

$\mathcal{L}^{(n)}(V, W)$ L'espace des applications $n$-linéaires $V^n \to W$, page 629

$\arg(z)$ La valeur principale de l'argument de $z \in \mathbb{C}$, page 1351

$L$ Les applications linéaires continues de $E$ vers $F$, page 613

$\mathbb{D}_b$ l'ensemble de écritures décimales en base $b$, page 476

$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, page 101

$\mathbb{R}^+$ les réels positifs ou nuls, page 103

exp exponentielle, page 916

$\mathscr{H}'$ dual, page 1255

$\liminf a_n$ limite inférieure, page 720

$\limsup a_n$ limite supérieure, page 720

$\mathcal{L}^p$ espace de Lebesgue, sans les classes, page 1278

$\mu \perp \nu$ mesures perpendiculaires, page 743

$\mu^*$ La mesure extérieure associée à la mesure $\mu$, page 698

$\partial_z$,$\partial_{\bar{z}}$ dérivées partielles d'une fonction complexe, page 1321

$\texttt{proj}_K(x)$ projection orthogonale de $x$ sur $y$, page 1252

$\sigma(\mathcal{A})$ tribu engendrée par $\mathcal{D}$, page 686

$\mathscr{D}(\Omega)$ Les fonctions $C^\infty$ à support compact sur $\Omega$, page 1404

$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ espace des distributions tempérées, page 1410

$A^2(\Omega)$ espace de Bergman, page 1363

$A^\perp$ orthogonal d'une partie., page 1254

$C_c(I)$ fonctions continues à support compact dans $I$, page 1293

$f \sim g$ fonctions ayant des limites équivalentes, page 548

$H^1(\Omega)$ espace de Sobolev sur $\Omega$, page 1433

$H^1(I)$ espace de Sobolev, page 1427

$H^m(M)$ espace de Sobolev, page 1434

$L^1_{loc}(I)$ fonctions intégrables sur les compacts de $I$, page 1428

$L^p$ espace de Lebesgue avec les classes, page 1279

$M_i\varphi$ La fonction $x \mapsto x_i\varphi(x)$, page 1315

$S_n f$ somme partielle de série de Fourier, page 1301

# Chapitre 28

# Distributions

Nous donnons ici une partie de la théorie sur les distributions. L'utilisation des distributions dans le cadre des équations différentielles est mise dans le chapitre sur les équations différentielles, section 30.11.

## 28.1 Topologie

### 28.1.1 Dérivée partielle au sens faible

**Définition 28.1.**
*Si $i = 1, \dots, n$, la **dérivée faible** de $v$ dans la direction $e_i$ est l'application*[1] *notée $\partial_i v$ définie par*

$$\langle \partial_i v, \phi \rangle = -\langle v, \partial_i \phi \rangle \tag{28.1}$$

*pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

**Lemme 28.2.**
*Si $v \in L^2$ admet une dérivée faible, alors cette dernière est unique.*

*Démonstration.* Supposons $f, g$ telles que $\langle g, \phi \rangle$ et $\langle f, \phi \rangle$ soient tous deux égaux à $-\langle v, \partial_i \phi \rangle$. En particulier pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nous avons $\langle (f - g), \phi \rangle = 0$.

Cela donne $f - g = 0$ par la proposition 24.65. □

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Le but de notre histoire est de définir une distribution comme étant un élément de l'espace dual (topologique, voir définition 7.40) de l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ des fonctions $C^\infty$ à support compact dans $\Omega$. Pour ce faire nous devons voir un peu de topologie sur différents espaces de fonctions. Notons que l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ n'est pas réduit à la fonction nulle comme en témoigne l'exemple donné par l'équation (15.339).

Pour chaque $K$ compact dans $\Omega$ et multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ nous considérons sur $C^\infty(\Omega)$ la semi-norme suivante :

$$p_{K,m}(f) = \sum_{|\mu| \leqslant m} \| \partial^\mu f \|_{K,\infty}. \tag{28.2}$$

En particulier,

$$p_{K,0}(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| = \| f \|_{\infty,K}. \tag{28.3}$$

**Définition 28.3.**
*Les topologies que nous allons considérer sont :*

*(1) Sur $C^\infty(\Omega)$, la topologie des semi-normes $p_{K,m}$ (avec $K$ et $m$ comme paramètres).*

*(2) Sur $\mathscr{D}(K)$, la topologie des semi-normes $p_{K,m}$ (avec seulement $m$ comme paramètre).*

*(3) Sur $\mathscr{D}(\Omega)$, la topologie induite de $C^\infty(\Omega)$.*

1. En fait c'est une classe au sens de l'égalité presque partout.

Cela n'est pas très explicite, mais heureusement nous n'aurons souvent pas besoin de plus que de la notion de convergence dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Rappelons que la topologie d'un espace donne la notion de convergence par la définition 6.4.

**Lemme 28.4** (Convergence dans $\mathscr{D}(K)$)**.**
*Si $\alpha$ est un multiindice et si $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \varphi$, alors nous avons*

$$\partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{unif} \partial^\alpha \varphi. \tag{28.4}$$

*Démonstration.* Quitte à considérer la suite $\varphi_n - \varphi$ nous pouvons supposer $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} 0$. Nous avons

$$\|\partial^\alpha \varphi_n\| \leqslant \sum_{\mu \leqslant \alpha} \|\partial^\mu \varphi_n\|_{K,\infty}. \tag{28.5}$$

Vu que le membre de droite tend vers zéro, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \|\partial^\alpha \varphi_n\|_{K,\infty} \to 0, \tag{28.6}$$

ce qui revient à dire que $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformément sur $K$ vers $\partial^\alpha \varphi$. □

**Lemme 28.5.**
*Si une fonction $f\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est continue sur chacun des $\mathscr{D}(K)$ pour tout $K$ compact dans $\Omega$ alors est continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$.*

*Démonstration.* Soit $I$ ouvert dans $\mathbb{R}$ ; nous devons trouver un ouvert $\mathcal{O}$ dans $C^\infty(\Omega)$ tel que $f^{-1}(I) = \mathscr{D}(\Omega) \cap \mathcal{O}$. Vu que $f$ est continue sur chacun des $\mathscr{D}(K)$ avec $K$ compact dans $\Omega$, pour tout tel compact nous avons un ouvert $\mathcal{O}_K$ dans $\mathscr{D}(K)$ tel que $f^{-1}(I) \cap \mathscr{D}(K) = \mathcal{O}_K$. En tant qu'union d'ouverts [2], l'ensemble

$$\mathcal{O} = \bigcup_{K \text{ compact de } \Omega} \mathcal{O}_K \tag{28.7}$$

est ouvert dans $C^\infty(\Omega)$. Si $\phi \inf^{-1}(I)$, nous avons $\phi \in \mathscr{D}(K)$ pour un certain $K$ compact de $\Omega$, donc $f^{-1}(I) \subset \mathcal{O}$. A forciori nous avons $f^{-1}(I) \subset \mathcal{O} \cap \mathscr{D}(\Omega)$.

Dans l'autre sens, si $\phi \in \mathcal{O}$, alors $\phi$ est dans un des $\mathcal{O}_K$ et donc dans $f^{-1}(I)$. Nous avons donc bien $f^{-1}(I) = \mathscr{D}(\Omega) \cap \mathcal{O}$. □

**Théorème 28.6** (Convergence dans $\mathscr{D}(\Omega)$[62])**.**
*Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Nous avons $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ si et seulement s'il existe $K$ compact dans $\Omega$ tel que $\varphi_n \in \mathscr{D}(K)$ pour tout $n$ et $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \varphi$.*

*Démonstration.* Supposons que $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ et qu'il n'existe pas de compacts contenant tous les supports des $\varphi_n$. Alors pour tout compact de $\Omega$ il existe un $n$ tel que le support de $\varphi_n$ ne soit pas dans $K$. Nous considérons une suite de compacts $(K_i)$ tels que $\text{Int}(K_n) \subset K_{n+1}$ et $\Omega = \bigcup_n K_n$. Une telle suite existe par le lemme 6.156. Ensuite nous construisons des sous-suites de la façon suivante. D'abord $L_1 = K_1$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ est choisit de telle sorte que $\varphi_{n_1}$ ait un support non contenu dans $L_1$. Ensuite $L_i$ est un compact de la suite $(K_n)$ choisit plus loin que $L_{i-1}$ et tel que $\varphi_{n_{i-1}} \in \mathscr{D}(L_i)$. Le nombre $n_i$ est alors choisit plus grand que $n_{i-1}$ de telle sorte que $\varphi_{n_i} \notin \mathscr{D}(L_i)$. Ce faisant, en posant $\phi_i = \varphi_{n_i}$ nous avons

$$\phi_i \in \mathscr{D}(L_{i+1}) \backslash \mathscr{D}(L_i) \tag{28.8}$$

et $\text{Int}(L_n) \subset L_{n+1}$ et $\Omega = \bigcup_n L_n$. Étant donné que $(\phi_i)$ et une sous-suite de $(\varphi_i)$ nous avons encore $\phi_i \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$.

2. Voir définition 6.1.

Soit $i \in \mathbb{N}$. Nous allons utiliser la seconde forme géométrique du théorème de Hahn-Banach 24.71 pour séparer les parties $\{\phi_i\}$ (compact) et $\mathscr{D}(L_i)$ (fermé) dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Nous avons $f_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} f_i(\phi_i) > \alpha & (28.9a) \\ f\big(\mathscr{D}(L_i)\big) < \alpha. & (28.9b) \end{cases}$$

Nous redéfinissons immédiatement $f_i$ de façon à avoir

$$\begin{cases} f_i(\phi_i) = 0 & (28.10a) \\ f\big(\mathscr{D}(L_i)\big) < 0. & (28.10b) \end{cases}$$

Nous introduisons la fonction définie sur $\mathscr{D}(\Omega)$ par

$$p(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{f_i(\phi)}{|f_i(\phi_i)|}. \tag{28.11}$$

Si $\phi \in L_k$, alors $f_k(\phi) = 0$ et même $f_l(\phi) = 0$ pour tout $l \geqslant k$. Donc pour chaque $k$, la somme définissant $p$ est finie sur $\mathscr{D}(L_k)$. Nous en déduisons que $p$ est continue sur chacun des $\mathscr{D}(L_k)$ et donc sur $\mathscr{D}(\Omega)$ par le lemme 28.5.

L'image de la suite convergente $\phi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ par $p$ doit être bornée parce que $p$ est continue. Mais dans la somme (28.11), tous les termes sont positifs et en particulier le terme $i = k$ vaut $k$, donc $p(\phi_k) \geqslant k$, ce qui contredit le fait que l'image de la suite soit bornée. Nous en déduisons donc l'existence d'un compact $K$ tel que $\varphi_n \in \mathscr{D}(K)$ pour tout $n$.

Nous devons encore prouver que $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \varphi$ pour ce choix de $K$. Vu que $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$, le lemme 6.82 nous dit que nous avons aussi $\varphi_n \xrightarrow{C^\infty(\Omega)} \varphi$, ce qui signifie que pour tout $K$ et $m$ nous avons

$$p_{K,m}(\varphi_n - \varphi) \to 0. \tag{28.12}$$

En particulier pour le $K$ fixé plus haut nous avons $p_m(\varphi_n - \varphi) \to 0$, c'est à dire que $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \varphi$. □

**Proposition 28.7.**
*Si $K$ est compact dans $\Omega$, l'espace $\mathscr{D}(K)$ est métrique et complet.*

*Démonstration.* Nous allons d'abord montrer que $\mathscr{D}(K)$ est complet. Ensuite nous allons montrer que sa topologie peut être donnée par une distance.

**Complet** Nous considérons une suite de Cauchy $(\varphi_n)$ dans $\mathscr{D}(K)$ au sens de la définition 6.37. Soient $\epsilon > 0$ et $i \in \mathbb{N}$ ; si $k$ et $l$ sont assez grands nous avons

$$\varphi_k - \varphi_l \in B_i(0, \epsilon). \tag{28.13}$$

En particulier pour $i = 0$ nous avons l'inégalité

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_\infty \leqslant \epsilon, \tag{28.14}$$

La suite $(\varphi_n)$ est donc de Cauchy dans $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$ et y converge donc par complétude, proposition 12.299. Il existe donc une fonction $\varphi \in C(K)$ telle que

$$\varphi_n \xrightarrow{unif} \varphi. \tag{28.15}$$

Notre jeu à présent est de prouver que $\varphi \in \mathscr{D}(K)$, c'est à dire qu'elle est de classe $C^\infty$.
Soit un multiindice $\alpha = \mu_1, \ldots, \mu_n, i$. Si $k$ et $l$ sont assez grands nous avons

$$\|\partial^\alpha(\varphi_k - \varphi_l)\|_\infty \leqslant \epsilon, \tag{28.16}$$

c'est à dire que

$$\|\partial_i(\partial^\mu\varphi_k) - \partial_i(\partial^\mu\varphi_l)\|_\infty \leqslant \epsilon. \tag{28.17}$$

Si nous notons $\psi_k = \partial^\mu\varphi_k$ cela signifie que $(\partial_i\psi_n)$ est une suite de Cauchy dans $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$. Elle y converge donc et il existe une fonction $g_i \in C(K)$ telle que

$$\partial_i\psi_n \xrightarrow{unif} g_i. \tag{28.18}$$

Dans ce cas le théorème 12.303 nous indique que $\psi$ est de classe $C^1$, c'est à dire que $\varphi \in C^{n+1}(K)$.

**Métrique** La proposition 6.195 nous dit que la topologie donnée par l'écart

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{k\geqslant 1} \min\{\frac{1}{k}, p_{k-1}(\varphi_1 - \varphi_2)\} \tag{28.19}$$

est la même que celle de $\mathscr{D}(K)$. Il reste à montrer que cette formule est bien une distance au sens de la définition 6.18.

(1) Nous avons bien $d(\varphi_1, \varphi_2) \geqslant 0$ parce que tous les éléments du supremum et du minimum sont positifs.

(2) Si $d(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ alors pour tout $k$ nous devons avoir $p_{k-1}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ ; en particulier pour $k = 1$ cela donne $\varphi_1 = \varphi_2$.

(3) Nous avons

$$p_k(\varphi_1 - \varphi_2) = p_k\big(-(\varphi_2 - \varphi_1)\big) = p_l(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{28.20}$$

en utilisant la propriété (2) de la définition 6.190 de semi-norme.

(4) Nous avons

$$p_k(\varphi_1 - \varphi_2) = p_k(\varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_2) \leqslant p_k(\varphi_1 - \varphi_3) + p_k(\varphi_3 - \varphi_2) \tag{28.21}$$

en utilisant la propriété (3) de la définition 6.190.

□

Notons que la proposition 6.195 nous dit que $\mathscr{D}(K)$ est complet tout autant pour la topologie des semi-normes que pour celle de la distance que nous venons de décrire. Ces deux topologies sont les mêmes. Étant métrique et complet, l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ et donc de Baire par le théorème 6.202. Ce qui est bien avec ces deux topologies identiques c'est qu'on peut utiliser la propriété de Baire même en ne parlant que des semi-normes.

## 28.2 Distributions

Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, alors l'ensemble $\mathscr{D}(\Omega)$ est contenu dans $C^\infty(\Omega)$. Nous allons commencer par définir une topologie sur $C^\infty(\Omega)$ et ensuite donner à $\mathscr{D}(\Omega)$ la topologie induite[3].

**Définition 28.8** (Distribution)**.**
*Une **distribution** sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^d$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$. C'est donc un élément de $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Le théorème suivant donne quelques façons de vérifier qu'une forme linéaire soit continue. En particulier il nous dit que pour prouver qu'une forme linéaire est une distribution il suffi de prouver la continuité séquentielle.

**Théorème 28.9** ([62])**.**
*Soit $T$ une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\Omega)$. Nous avons équivalence entre les points suivants.*

*(1) $T$ est continue.*

3. Définition 6.78.

*(2) Pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C \geqslant 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(K)$ nous ayons*

$$\big|T(\varphi)\big| \leqslant C p_{m,K}(\varphi) \tag{28.22}$$

*où $p_{m,K}$ est la semi-norme donnée en (28.2).*

*(3) $T$ est séquentiellement continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$.*

*(4) $T$ est séquentiellement continue en 0.*

*(5) Pour tout compact $K \subset \Omega$, la restriction de $T$ à $\mathscr{D}(K)$ est continue.*

Un certain nombre d'ouvrages prennent le point (2) comme la définition d'une distribution.

**Définition 28.10** (Topologie sur $\mathscr{D}'(\Omega)$)**.**
*Nous munissons l'espace $\mathscr{D}'(\Omega)$ de la **topologie $*$-faible**, c'est à dire celle de la famille de semi-normes*

$$\begin{aligned} p_\varphi \colon \mathscr{D}'(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ T &\mapsto \big|T(\varphi)\big| \end{aligned} \tag{28.23}$$

*avec $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.*

Oui, c'est bien une famille de semi-normes indicée par l'ensemble $\mathscr{D}(\Omega)$. Il n'y en a donc a priori pas du tout une quantité dénombrable.

**Proposition 28.11** (Convergence au sens des distributions)**.**
*Nous avons $T_n \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T$ si et seulement si $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.*

*Démonstration.* La convergence $T_n \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T$ signifie que l'on ait $p_\varphi(T_n - T) \to 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, ce qui en retour signifie que

$$\big|(T_n - T)(\varphi)\big| \to 0. \tag{28.24}$$

□

Cette proposition suppose que l'on ait une distribution $T$ qui vérifie $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ et conclut qu'on a une convergence dans les distributions. Le théorème suivant est plus fort : il va seulement supposer que $T_n(\varphi)$ converge dans $\mathbb{C}$ et va conclure que $T \colon \varphi \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi)$ est une distribution.

**Théorème 28.12** ([304])**.**
*Soit $(T_n)$ une suite dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et nous supposons que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ la suite $\big(T_n(\varphi)\big)$ converge dans $\mathbb{C}$. Alors il existe $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T$.*

**Proposition 28.13.**
*L'application*

$$\begin{aligned} i \colon L^2(\Omega) &\to \mathscr{D}'(\Omega) \\ f &\mapsto T_f \end{aligned} \tag{28.25}$$

*est une injection continue.*

*Démonstration.* Le fait que ce soit une injection est le fait que si $T_f = T_g$ alors pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nous avons $\langle f - g, \phi \rangle = 0$, et cela implique que $f - g$ est nulle presque partout en tant que fonction et est simplement nulle en tant que classe de fonction dans $L^2$.

En ce qui concerne la continuité, il suffit de la prouver en zéro (par linéarité). Soit donc $f_n \xrightarrow{L^2} 0$ et montrons que $T_{f_n} \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T_0$. Pour prouver cela, la proposition 28.11 nous indique qu'il est suffisant de tester $T_n(\phi) \to 0$ pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Notons que si $\phi \in \mathscr{D}$ a fortiori $\phi \in L^2$. Nous avons

$$T_{f_n}(\phi) = \int_\Omega f_n \phi \leqslant \|f_n \phi\|_{L^1} \leqslant \|f_n\|_2 \|\phi\|_2 \to 0 \tag{28.26}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder de la proposition 24.22. □

Cette proposition permet de donner un sens à des phrases du type «Soit une distribution $T$. Si $T \in L^2$, alors ...». Cela signifie qu'il existe $u \in L^2$ tel que $T = T_u$. Notons que dans ce cas, la distribution est définie sur $L^2$ et non seulement sur $\mathscr{D}$.

### 28.2.1 Multiplication d'une distribution par une fonction

**Définition 28.14.**
*Si $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et si $f \in C^\infty(\Omega)$ nous définissons la distribution $fT$ par*

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi). \tag{28.27}$$

*Souvent écrit sous la forme plus compacte $\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle$.*

Cela a un sens parce que si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ alors $f\varphi$ est aussi dans $\mathscr{D}(\Omega)$.

Cette définition est motivée par ce que l'on ferait pour une distribution à densité. Si $T$ est une distribution de densité notée également $T$, nous avons $T(\phi) = \int T(x)\phi(x)$ et donc

$$(fT)(\phi) = \int (fT)(x)\phi(x) = \int T(x)f(x)\phi(x) = \int T(x)(f\phi)(x) = T(f\phi). \tag{28.28}$$

En ce qui concerne les distributions tempérées, nous pouvons définir le produit avec une fonction $f \in \mathscr{S}(\Omega)$ par la même formule : si $f, \varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$ alors le produit $f\varphi$ est encore Schwartz. Notons toutefois que nous ne pouvons pas définir $fT$ dans $\mathscr{S}'(\Omega)$ si $f$ est seulement dans $C^\infty(\Omega)$.

### 28.2.2 Dérivée de distribution

**Proposition-définition 28.15.**
*Soit $T$ une distribution sur $\Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors la formule*

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\varphi) \tag{28.29}$$

*définit une distribution $\partial^\alpha T$.*

*Cette distribution $\partial^\alpha T$ sera la **dérivée distributionnelle** de $T$. Notons que le même résultat est encore valide pour des distributions tempérées, et la démonstration est la même.*

*Démonstration.* La forme linéaire $\partial^\alpha T$ sera continue si elle est séquentiellement continue par le théorème 28.9. Nous considérons donc une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ et nous vérifions que

$$\lim_{n\to\infty}(\partial^\alpha T)(\varphi_n) = (\partial^\alpha T)(\varphi). \tag{28.30}$$

D'abord $T$ étant une distribution (et donc continue) nous pouvons la permuter avec la limite :

$$\lim_{n\to\infty}(\partial^\alpha T)(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|}T\Big(\lim_{n\to\infty}\partial^\alpha\varphi_n\Big). \tag{28.31}$$

Notons qu'à gauche la limite est une limite dans $\mathbb{R}$ tandis qu'à droite c'est une limite dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Ensuite le lemme 28.4 nous dit que l'hypothèse $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ signifie en particulier que nous avons un compact $K \subset \Omega$ contenant tous les supports des $\varphi_n$ et que $\partial^\alpha\varphi_n$ converge uniformément (sur $K$ et donc sur $\Omega$) vers $\partial^\alpha\varphi$. Donc

$$\lim_{n\to\infty}(\partial^\alpha T)(\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|}T\Big(\lim_{n\to\infty}\partial^\alpha\varphi_n\Big) = (-1)^{|\alpha|}T\big(\partial^\alpha\varphi\big) = (\partial^\alpha T)(\varphi), \tag{28.32}$$

ce qui est la relation demandée. □

Le lemme suivant montre une compatibilité entre la dérivée des distribution, la dérivée faible et l'injection de $L^2$ dans l'espace des distributions.

**Lemme 28.16.**
*Soit $\Omega$ un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$. Alors nous avons*

$$\partial_i(T_f) = T_{\partial_i f} \tag{28.33}$$

*où la dérivée à droite est la dérivée faible définie en 28.1.*

*Démonstration.* En utilisant la définition de la dérivation de distribution, pour tout $\phi \in \mathscr{D}$ nous avons

$$\partial_i(T_f)\phi = -T_f(\partial_i\phi) = -\langle f, \partial_i\phi\rangle = \langle \partial_i f, \phi\rangle = T_{\partial_i f}(\phi). \tag{28.34}$$

Nous avons utilisé la définition (28.1) de la dérivée faible. □

### 28.2.3 Ordre et support d'une distribution

**Définition 28.17** (support d'une distribution[4])**.**
*Soit $T$ une distribution. Le **support** de $T$ est le complémentaire de l'union des ouverts $\mathcal{O}$ tels que $T(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi$ à support dans $\mathcal{O}$.*

**Définition 28.18.**
*Si $T$ est une distribution sur $\Omega$, nous disons que $T$ est d'**ordre** inférieur ou égal à $p \in \mathbb{N}$ si pour tout compact $K$ de $\Omega$, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(K)$,*

$$\big|\langle T, \varphi\rangle\big| \leqslant C_K \max_{|\alpha|\leqslant p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty. \tag{28.35}$$

*Ici $\alpha$ est un multiindice.*

*La distribution $T$ est d'ordre $p$ si elle est d'ordre inférieur ou égal à $p$ mais pas à $p-1$.*

Pour la proposition suivante, on peut se remémorer la définition 28.3 de la topologie sur $C^\infty(\Omega)$.

**Proposition 28.19.**
*Restriction entre $C^\infty$ et $\mathscr{D}$.*

1. *Si $T \in C^\infty(\Omega)'$, alors la restriction de $T$ à $\mathscr{D}(\Omega)$ est une distribution à support[4] compact.*
2. *Si $T$ est une distribution à support compact alors elle se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $C^\infty(\Omega)$.*

**Proposition 28.20** ([62])**.**
*Une distribution à support compact est d'ordre fini.*

**Lemme 28.21** ([117])**.**
*Soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tels que $\operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(\phi) = \varnothing$. Alors $\langle u, \phi\rangle = 0$.*

*Démonstration.* Soit $x \notin \operatorname{supp}(u)$. Alors il existe un voisinage $V_x$ de $x$ tel que $\langle u, \psi\rangle = 0$ pour tout $\psi \in \mathscr{D}(V_x)$. En particulier, si $x \in \operatorname{supp}(\phi)$, alors $x$ n'est pas dans le support de $u$ et les ensembles $\{V_x$ tel que $x \in \operatorname{supp}(\phi)\}$ recouvrent $\operatorname{supp}(\phi)$. Cependant $\phi$ est à support compact et nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini de $\operatorname{supp}(\phi)$ : il existe $x_1, \dots, x_p$ tels que

$$\operatorname{supp}(\phi) \subset \bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}. \tag{28.36}$$

Nous prenons une partition de l'unité[5] subordonnée à ce recouvrement. C'est à dire des fonctions $\chi_i \in \mathscr{D}(V_{x_i})$ telles que pour tout $x \in \operatorname{supp}(\phi)$,

$$\sum_{i=1}^{p} \chi_i(x) = 1. \tag{28.37}$$

4. Définition 28.17.
5. Lemme 14.10.

En particulier nous avons $\sum_i \chi_i(x)\phi(x) = \phi(x)$, et donc

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \sum \chi_i\phi\rangle = \sum \langle u, \chi_i\phi\rangle = 0 \tag{28.38}$$

parce que $\text{supp}(\chi_i\phi) \subset V_{x_i}$. □

**Lemme 28.22** ([117])**.**
*Si $u$ est une distribution d'ordre fini $N$ sur $\mathbb{R}$, si $\text{supp}(u) = \{x_0\}$ et si*

$$\phi(x_0) = \ldots = \phi^{(N)}(x_0) = 0 \tag{28.39}$$

*alors $\langle u, \phi\rangle = 0$.*

*Démonstration.* Les fonctions plateaux dont nous avons parlé dans la section 15.13.1 nous permettent de considérer une fonction $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{B(0,1)} \\ 0 & \text{si } |x| > 2 \end{cases} \tag{28.40}$$

Ensuite nous posons $\chi_n(x) = \chi\big(n(x-x_0)\big)$. Par conséquent $\chi_n(x_0) = \chi(0) = 1$ et même $\chi_n(x_0+\epsilon) = \chi(\epsilon) = 1$ tant que $\epsilon$ est plus petit que disons $\frac{1}{2}$ pour être sur. Nous en déduisons que la fonction $1-\chi_n$ s'annule sur un voisinage de $x_0$ et que donc $x_0$ n'est pas dans le support de $1-\chi_n$. Donc $\text{supp}(1-\chi_n) \cap \text{supp}(u) = \varnothing$ et le lemme 28.21 est utilisable : $\langle u, (1-\chi_n\phi)\rangle = 0$, ou encore :

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \chi_n\phi\rangle \tag{28.41}$$

pour tout $n$. Vu que le but est de prouver que $\langle u, \phi\rangle = 0$, nous allons prouver que

$$|\langle u, \chi_n\phi\rangle| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{28.42}$$

Dans ce dessin nous posons

$$\|f\|_n = \sup_{x\in\overline{B(0,\frac{2}{n})}} \|f(x)\| \tag{28.43}$$

et

$$\|f\|_{(p)} = \sup_{i\leqslant p} \|\partial^i f\|_\infty. \tag{28.44}$$

La distribution $u$ est d'ordre fini $N$, et nous en écrivons la définition 28.18 en prenant $\text{supp}(\chi_n\phi)$ en tant que $K$ :

$$\big|\langle u, \chi_n\phi\rangle\big| \leqslant C \max_{k\leqslant N} \|\partial^k(\chi_n\phi)\|_\infty. \tag{28.45}$$

En remplaçant le maximum par une somme de $k=0$ à $k=N$, nous majorons. De plus le support de $\chi_n$ étant contenu dans $B_n = B(x_0, 2/n)$ nous ne changeons rient en utilisant $\|.\|_n$ au lieu de $\|.\|_\infty$. Donc

$$|\langle u, \chi_n\phi\rangle| \leqslant C \sum_{k=0}^{N} \|\partial^k(\chi_n\phi)\|_n \leqslant C \sum_{k=0}^{N} \binom{k}{i} \|\partial^i\chi_n\|_n \|\partial^{k-i}\phi\|_n. \tag{28.46}$$

Notons que la seconde inégalité est une inégalité du type $\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|$. En dérivant un petit peu nous trouvons que

$$(\partial^i\chi_n)(x) = n^i(\partial^i\chi)\big(n(x-x_0)\big). \tag{28.47}$$

Donc [6]

$$\|\partial^i\chi_n\|_n = \sup_{x\in B_n} n^i\big|(\partial^i\chi)\big(n(x-x_0)\big)\big| = n^i \sup_{y\in[-2,2]} \big|(\partial^i\chi)(y)\big| = n^i\|\partial^i\chi\|_\infty. \tag{28.48}$$

Nous pouvons donc remplacer $\|\partial^u\chi_n\|_n$ par $n^i\|\partial^i\chi\|_\infty$.

6. Dans [117], la dernière égalité vient avec une inégalité, et je comprends pas pourquoi.

D'autre part nous voulons majorer $\|\partial^{k-i}\phi\|_n$ par quelque chose ne dépendant ni de $k$ ni de $i$. Nous faisons le théorème des accroissements finis 12.229 : $\|\partial^l\phi\|_n \leqslant \frac{2}{n}\|\partial^{l+1}\phi\|_n$. Ce $n$ au dénominateur est salutaire parce que nous avions un $n^i$ apparu à cause du remplacement (28.48). Nous faisons donc $i+1$ fois le théorème des accroissements finis :

$$\|\partial^{k-i}\phi\|_n \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{i+1}\|\partial^{k+1}\phi\|_n. \tag{28.49}$$

Toutes ces majorations donnent

$$\begin{aligned}\big|\langle u, \chi_n\phi\rangle\big| &\leqslant C\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}\binom{i}{k}n^i\underbrace{\|\partial^i\chi\|_\infty}_{\leqslant\|\chi\|_{(N)}}\left(\frac{2}{n}\right)^{i+1}\underbrace{\|\partial^{k+1}\phi\|_n}_{\leqslant\|\phi\|_{(N+1)}} && (28.50a)\\ &\leqslant C\|\chi\|_{(N)}\|\phi\|_{(N+1)}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}2^{i+1} && (28.50b)\\ &= \frac{C'}{n} && (28.50c)\end{aligned}$$

où $C'$ est une constante qui dépend de $\chi$, de $\phi$ et de $N$, mais pas de $n$. Vu que $\frac{C'}{n}\to 0$ nous avons bien

$$\langle u, \phi\chi_n\rangle = 0, \tag{28.51}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Proposition 28.23** ([117])**.**
*Soit $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})'$ avec $\operatorname{supp}(u) = \{x_0\}$. Alors $u = \sum_{i=0}^{N} a_i\partial^i\delta_{x_0}$ où $N$ est l'ordre de $u$.*

*Démonstration.* D'abord il faut préciser que l'ordre de $u$ est fini parce que son support est compact (proposition 28.20) ; nous notons $N$ cet ordre.

Soit $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Nous considérons $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\chi(x) = \begin{cases}1 & \text{si } x \in \overline{B(x_0,1)}\\ 0 & \text{si } |x-x_0| > 2.\end{cases} \tag{28.52}$$

Encore une fois, $1-\chi$ s'annule sur un voisinage autour de $x_0$, ce qui fait que

$$\operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}\big((1-\chi)\phi\big) = \varnothing, \tag{28.53}$$

et donc $\langle u, (1-\chi)\phi\rangle = 0$. Au final,

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \chi\phi\rangle. \tag{28.54}$$

C'est le moment de poser

$$\psi(x) = \chi(x)\big[\phi(x) - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}(\partial^k\phi)(x_0)(x-x_0)^k\big] \tag{28.55}$$

La fonction $\psi$ ayant un support disjoint de celui de $u$, nous avons aussi $\langle u, \psi\rangle = 0$, ce qui donne

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \chi\phi\rangle = \langle u, \chi\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(\partial^k\phi)(x_0)(x-x_0)^k\rangle. \tag{28.56}$$

En posant $a_k = \frac{1}{k!}\langle u, x\mapsto\chi(x)(x-x_0)^k\rangle$ nous avons alors

$$\langle u, \phi\rangle = \sum_{k=0}^{N}a_k(\partial^k\phi)(x_0) = \sum_k(-1)^k a_k(\partial^k\delta_{x_0})(\phi). \tag{28.57}$$

□

## 28.3 Distributions tempérées

L'espace de Schwartz[7] $\mathscr{S}(\Omega)$ est défini dans la définition 24.75 ; sa topologie y est discutée.

**Définition 28.24.**
*Une **distribution tempérée** est une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. L'ensemble des distributions tempérées est noté $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Si $T$ est une telle distribution, nous notons $\langle T, \varphi\rangle$ l'image de $\varphi$ par $T$.*

**28.25.**
Pour rappel, la topologique sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est celle de la définition 24.80.

Si $f$ est une fonction sur $\mathbb{R}^d$ telle que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors nous définissons la distribution $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx. \tag{28.58}$$

Cette définition ne fonctionne pas pour toute les fonctions. Par exemple pour $f(x) = e^{x^2}$, et $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ nous avons $f\varphi = 1$ qui n'est pas du tout intégrable sur $\mathbb{R}$.

**Lemme-définition 28.26.**
*L'application*

$$\begin{aligned}\delta\colon \operatorname{Fun}(\mathbb{R}^d) &\to \mathbb{C}\\ \varphi &\mapsto \varphi(0).\end{aligned} \tag{28.59}$$

*est*

*(1) une distribution,*

*(2) une distribution tempérée.*

*Cette distribution est nommée **distribution de Dirac**.*

*Démonstration.* Juste pour rappel, $\operatorname{Fun}(X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions sur $X$. Pour prouver que $\delta$ est une distribution, nous devons démontrer que $\delta\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est continue. Et pour qu'elle soit une distribution tempérée, il faut démontrer que $\delta\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est continue.

Nous utilisons le théorème 28.9(2) pour démontrer la continuité de $\delta$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Soit un compact $K \subset \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. En prenant $m = 0$ nous devons avons la majoration

$$|\delta(\varphi)| = \varphi(0) \leqslant \|\varphi\|_{K,\infty} = p_{0,K}(\varphi). \tag{28.60}$$

Pour la continuité de $\delta$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, nous utilisons les résultats de 24.81. Soit une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. En particulier, $p_{0,0}(\varphi_n) = \sup_x |\varphi_n(x)| \to 0$. Donc $\varphi_n(0) \to 0$ comme il le faut. □

**Exemple 28.27**
La **valeur principale** de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la distribution

$$\begin{aligned}T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}\\ \varphi &\mapsto \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}.\end{aligned} \tag{28.61}$$

Montrons que cela définit bien une distribution tempérée.

D'abord l'intégrale existe pour tout $\epsilon$, par exemple parce que pour les grands $|x|$ nous avons par exemple $|\varphi(x) \leqslant x^3|$ et donc $\varphi(x)/x \leqslant 1/x^2$ dont l'intégrale converge. Nous devons maintenant regarder la limite.

7. Attention : ce Schwartz (avec un *t*) est le Schwartz des distribution dont le prénom est Laurent. À ne pas confondre avec Schwarz (sans *t*) dont le prénom est Cauchy.

Nous considérons une suite $\epsilon_n \to 0$ et la suite

$$a_n = \int_{|x|\geqslant\epsilon_n} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \tag{28.62}$$

Nous montrons que cette suite converge dans $\mathbb{R}$ en montrant qu'elle est de Cauchy. Pour cela nous travaillons un peu la forme de $\varphi$ :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)dt = \varphi(0) + \int_0^1 x\varphi'(x\theta)d\theta. \tag{28.63}$$

Ce qui est dans l'intégrale est borné par $K = \|M_x\varphi'\|_\infty$ qui est parfaitement fini parce que $\varphi$ est à décroissance rapide. Lorsque nous calculons $|a_m - a_n|$, le terme $\varphi(0)/x$ donne une intégrale nulle parce que le domaine d'intégration $\epsilon_n \leqslant |x| \leqslant \epsilon_n$ est symétrique alors que la fonction $1/x$ est impaire.

$$|a_m - a_n| \leqslant \Big| \int_{\epsilon_m<|x|<\epsilon_n} K \Big| = 2|\epsilon_n - \epsilon_m|K \tag{28.64}$$

Tout cela nous dit que $T$ est bien définie. Nous devons encore étudier sa continuité.

Soit $\chi$ une fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle valant 1 sur $[-1,1]$, paire et à valeurs dans $[0,1]$. Pour tout $\epsilon > 0$ nous avons $\int_{|x|>\epsilon} \frac{\chi(x)}{x} dx = 0$.

Nous avons aussi $\varphi = \chi\varphi + (1-\chi)\varphi$, et donc

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{|\epsilon|>0} \chi(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{|\epsilon|>0} \big(1-\chi(x)\big) \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{28.65a}$$

$$= \int_{|\epsilon|>0} \chi(x) \int_0^1 \underbrace{\varphi'(\theta x)}_{\leqslant\|\varphi'\|_\infty} d\theta + \int_{|x|\geqslant 1} \big(1-\chi(x)\big) \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{28.65b}$$

$$\leqslant \|\varphi'\|_\infty \int_{|x|\geqslant\epsilon} \chi(x)dx + \|\varphi\|_{L^1} \tag{28.65c}$$

$$= C\|\varphi'\|_\infty + \|\varphi\|_1. \tag{28.65d}$$

Cela est valable pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Mais nous savons que si $\varphi_n \overset{\mathscr{S}(\mathbb{R})}{\to} 0$, alors $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$, $\|\varphi_n'\|_\infty \to 0$ et $\|\varphi_n\|_1 \to 0$ ; donc si $\varphi_n \overset{\mathscr{S}(\mathbb{R})}{\to} 0$, alors

$$T(\varphi_n) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant C\|\varphi_n'\|_\infty + \|\varphi_n\|_1 \to 0. \tag{28.66}$$

△

### 28.3.1 Topologie

La topologie que nous mettons sur l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est le même type que celle que nous mettons sur $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire celle des semi-normes $p_\varphi(T) = |T(\varphi)|$. La définition 28.10 et la proposition 28.11 restent.

**Proposition 28.28.**
*Nous avons $T_n \overset{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} T$ si et seulement si pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$.*

### 28.3.2 Distributions associées à des fonctions

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors nous lui associons une distribution $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ définie par la formule

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx. \tag{28.67}$$

**Proposition 28.29.**
*L'application ainsi définie*

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) &\to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d) \\ f &\mapsto T_f \end{aligned} \tag{28.68}$$

*est injective.*

*Démonstration.* Si $T_f = 0$ alors pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$ nous avons $\int_{\mathbb{R}^d} f\varphi = 0$. En vertu de la proposition 24.66 cela implique $f = 0$ presque partout. □

### 28.3.3 Composition avec une fonction

**Proposition 28.30** ([304], page 113 et 32)**.**
*Soit $T \in \mathscr{S}'(\Omega)$ et $f \in C^k(A \times \Omega)$ où $A$ est ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Nous posons*

$$\begin{aligned} F\colon A &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto T\big(f(\lambda, .)\big). \end{aligned} \tag{28.69}$$

*Alors $F \in C^k(A)$.*

### 28.3.4 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

**Définition 28.31.**
*La **transformée de Fourier** de la distribution tempérée $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la distribution $\hat{T}$ définie par*

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}) \tag{28.70}$$

*pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

**Lemme 28.32.**
*Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, nous avons $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$.*

*Démonstration.* En utilisant les définitions,

$$\hat{T}_f(\varphi) = T_f(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) e^{-iyx} dy \right] dx \tag{28.71}$$

où nous avons noté $xy$ le produit scalaire $x \cdot y$. Nous permutons les intégrales en utilisant le théorème de Fubini 13.230 avec la fonction

$$(x, y) \mapsto f(x)\varphi(y)e^{-ixy} \tag{28.72}$$

qui est parfaitement dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Nous écrivons alors

$$\hat{T}_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(y)e^{-iyx} dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\hat{f}(y)dy = T_{\hat{f}}(\varphi). \tag{28.73}$$

□

### 28.3.5 Convolution d'une distribution par une fonction

Nous savons que si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et si $x \in \mathbb{R}^d$ alors la fonction $y \mapsto \psi(x - y)$ est encore une fonction dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ nous pouvons considérer la fonction $T * \psi = \psi * T$ définie par

$$(T * \psi)(x) = T\big(y \mapsto \psi(x - y)\big). \tag{28.74}$$

Notons que $T * \psi$ est bien une fonction et non une distribution.

Le but de la définition est d'avoir

$$T_f * \psi = f * \psi. \tag{28.75}$$

En effet

$$(T_f * \psi)(x) = T_f\big(y \mapsto \psi(x-y)\big) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\psi(x-y)dy = (f*\psi)(x). \tag{28.76}$$

**Exemple 28.33**
La distribution de Dirac est le neutre pour le produit de convolution. En effet

$$(\delta * \psi)(x) = \delta\big(y \mapsto \psi(x-y)\big) = \psi(x), \tag{28.77}$$

c'est à dire $\delta * \psi = \psi$. △

**Proposition 28.34** ([4]).
*Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors la distribution associée à la fonction $T * \psi$ est tempérée.*

*Démonstration.* En agissant sur $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ nous avons

$$T_{T*\psi}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} T\big(y \mapsto (t_x\psi)(y)\big)\varphi(x)dx \tag{28.78a}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} T\big(y \mapsto \varphi(x)\psi(x-y)\big)dx \tag{28.78b}$$
$$= T\left(y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\psi(x-y)dx\right) \tag{28.78c}$$
$$= T\big(y \mapsto (\varphi * \check{\psi})(y)\big) \tag{28.78d}$$
$$= T(\varphi * \check{\psi}). \tag{28.78e}$$

Attention : **Problèmes et choses à faire**
Le passage à la ligne (28.78c) n'est pas justifié. □

### 28.3.6 Approximation de la distribution de Dirac

**Lemme 28.35** ([1]).
*Soient des fonction $j_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de classe $C^\infty$ telles que*

1. *Pour chaque $n$, la fonction $x \mapsto j_n\big(|x|\big)$ est strictement décroissante et converge ponctuellement vers zéro.*
2. *Pour chaque $x$, la suite $n \mapsto j_n(x)$ est décroissante et converge vers 0.*
3. *Pour tout $M > 0$, la suite $j_n$ converge vers zéro uniformément sur $B(0,M)^c$.*
4. *Pour tout $\delta$ et $\epsilon$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\int_{B(0,\delta)} j_n(x)dx - 1| \leqslant \epsilon$.*
5. *Pour tout $n$, nous avons $\int_{\mathbb{R}} j_n = 1$.*

*Alors si $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x)j_n(x)dx = u(0). \tag{28.79}$$

*Démonstration.* Nous posons

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} j_n u \tag{28.80a}$$
$$I_{\delta,n} = \int_{B(0,\delta)} j_n u \tag{28.80b}$$
$$Z_{\delta,n} = \int_{B(0,\delta)} u(0) j_n \tag{28.80c}$$

Nous allons progressivement montrer qu'en prenant $\delta$ assez petit et $n$ assez grand, les quantités $|I_n - I_{\delta,n}|$, $|I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}|$ et $|Z_{\delta,n} - u(0)|$ peuvent être simultanément majorées par $\epsilon$.

Soit $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ ; vu que $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, il existe $M$ tel que $\int_{|x|>M} |u| < \epsilon$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_1$ nous avons $|j_n(x)| < 1$ dès que $|x| > M$ (hypothèse (3)). Alors

$$\int_{|x|>M} |j_n(x)u(x)| < \epsilon. \tag{28.81}$$

De plus en posant $s = \max\{|u(x)| \text{ tel que } \delta \leqslant |x| \leqslant M\}$ (qui existe parce que $u$ est continue et prise sur un compact) nous pouvons considérer $N_2$ tel que $j_n(x) < \epsilon/s$ pour tout $|x| > \delta$.

Avec $n > \max\{N_1, N_2\}$ nous avons

$$\left| \int_{B(0,\delta)} j_n u - \int_{\mathbb{R}} j_n u \right| = \left| \int_{B(0,\delta)^c} j_n u \right| \tag{28.82a}$$

$$\leqslant \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant M} |j_n u| + \int_{|x|\geqslant M} |j\nu| \tag{28.82b}$$

$$\leqslant \epsilon(1 + |M - \delta|). \tag{28.82c}$$

En redéfinissant le $\epsilon$ nous avons donc montré que pour tout $\epsilon$ et $\delta$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|I_{\delta,n} - I_n| \leqslant \epsilon \tag{28.83}$$

dès que $n \geqslant N$.

La fonction $u$ est uniformément continue sur tout $\overline{B(0,\delta)}$, et nous pouvons donc choisir $\delta$ tel que $|u(0) - u(x)| \leqslant \epsilon$ pour tout $x \in \overline{B(0,\delta)}$. Pour ce $\delta$, nous avons déjà trouvé un $N$ tel que $|I_{\delta,n} - I_n| \leqslant \epsilon$ dès que $n > N$. Nous avons :

$$|I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}| \leqslant \int_{B(0,\delta)} |u(x) - u(0)| j_n(x) dx \tag{28.84a}$$

$$\leqslant \epsilon \int_{B(0,\delta)} j_n \tag{28.84b}$$

$$\leqslant \epsilon. \tag{28.84c}$$

Nous avons donc prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta$ et un $N$ tels que

$$\begin{cases} |I_{\delta,n} - I_n| \leqslant \epsilon & (28.85a) \\ |I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}| \leqslant \epsilon & (28.85b) \end{cases}$$

dès que $n \geqslant N$.

Enfin nous avons

$$|z_{\delta,n} - u(0)| = u(0) \left( \int_{B(0,\delta)} j_n - 1 \right), \tag{28.86}$$

et par l'hypothèse (4) nous pouvons choisir $n$ assez grand pour que la parenthèse soit plus petite que $\epsilon$.

Pour $\epsilon$ donné, nous avons donc trouvé un $\delta$ et un $N$ tels que

$$|I_n - u(0)| \leqslant |I_n - I_{\delta,n}| + |I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}| + |Z_{\delta,n} - u(0)| \leqslant 3\epsilon. \tag{28.87}$$

En passant à la limite nous avons bien $I_n \to u(0)$ dans $\mathbb{R}$. □

Il va sans dire que nous connaissons de telles fonctions. Nous en donnons une maintenant.

**Exemple 28.36**([305])
Nous introduisons la fonction $f_\epsilon$ ($\epsilon > 0$) donnée par

$$f_\epsilon(x) = e^{-\epsilon|x|}. \tag{28.88}$$

Nous calculons la transformée de Fourier de $f_\epsilon$ en divisant le domaine d'intégration :

$$\hat{f}_\epsilon(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}e^{-\epsilon|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\epsilon x}e^{-ikx}dx + \int_0^\infty e^{-\epsilon x}\, e^{-ikx}dx \tag{28.89}$$

En décomposant les parties imaginaires et réelles, et avec un peu de changement de variables, nous pouvons utiliser les intégrales (14.571) et (14.572) pour obtenir

$$\hat{f}_\epsilon(k) = \frac{2\epsilon}{k^2+\epsilon^2}. \tag{28.90}$$

Sachant que $\operatorname{arctg}(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$ et avec encore un peu de changement de variables, nous avons [8]

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_\epsilon(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\epsilon}{k^2+\epsilon^2} = 2[\operatorname{arctg}(x/\epsilon)]_{-\infty}^{\infty} = 2\pi. \tag{28.91}$$

Cela montre que si nous introduisons la fonction $\delta_\epsilon$ donnée par

$$\delta_\epsilon(k) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2+k^2}, \tag{28.92}$$

alors nous avons une fonction qui tout en même temps ressemble à $\hat{f}_\epsilon$ et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(k)dk = 1 \tag{28.93}$$

pour tout $\epsilon$.

Jusqu'ici nous avons montré que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}e^{-\epsilon|x|}dx = 2\pi\delta_\epsilon(k). \tag{28.94}$$

Pour chaque $\epsilon > 0$ nous avons $\delta_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$. △

**Proposition 28.37** ([1])**.**
*Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Alors nous avons*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ixy}dx\,dy = 2\pi g(0). \tag{28.95}$$

*Démonstration.* Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ; nous multiplions l'équation (28.94) par $u(k)$ et nous intégrons par rapport à $k$ :

$$\int_{\mathbb{R}} u(k)\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}e^{-\epsilon|x|}dx\right]dk = 2\pi\int_{\mathbb{R}} u(k)\delta_\epsilon(k)dk. \tag{28.96}$$

Il s'agit de passer à la limite dans l'équation (28.96). Les intégrales à gauche peuvent effectuées séparément parce qu'elles respectent le théorème de Fubini. En effet soit la fonction

$$f(k,x) = u(k)e^{-ikx}e^{-\epsilon|x|} \tag{28.97}$$

qui est dans $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ en vertu du critère du corollaire 13.229 et du fait que à la fois $k \mapsto |u(k)|$ et $x \mapsto e^{-\epsilon|x|}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$.

Nous pouvons donc grouper et dégrouper les intégrales et en particulier les inverser. Si nous effectuons d'abord l'intégrale sur $k$ nous trouvons

$$\int_{\mathbb{R}} u(k)\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}e^{-\epsilon|x|}dx\right]dk = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon|x|}\int_{\mathbb{R}} u(k)e^{-ikx}dk\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon|x|}\hat{u}(x)dx. \tag{28.98}$$

8. Et en écrivant correctement l'intégrale sur $\mathbb{R}$ comme une limite, etc.

La fonction $x \mapsto |e^{-\epsilon|x|}\hat{u}(x)|$ est majorée (uniformément en $\epsilon$) par $x \mapsto \hat{u}(x)$ qui est intégrable parce que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathscr{S}$ est dans $\mathscr{S}$ par la proposition 27.12. Le théorème de la convergence dominée de Lebesque 13.134 nous permet de permuter la limite $\epsilon \to 0$ avec l'intégrale et obtenir

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} u(k) \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx\, dk = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(k) e^{-ikx} dk\, dx. \tag{28.99}$$

Notons qu'en passant à la limite nous avons perdu le droit de permuter les intégrales.

Nous devons encore prouver que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} u(k)\delta_\epsilon(k) dk = u(0). \tag{28.100}$$

Cela n'est rien d'autre que le lemme 28.35 appliqué à la suite de fonctions $j_n = \delta_{1/n}$. □

**28.38.**
Notons que les intégrales dans (28.95) ne peuvent pas être permutées parce que $\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} dy$ n'existe pas. Il faut avouer que, malgré tous les conseils du type «attention : permuter des intégrales doit être fait avec prudence», ce n'est pas tous les jours que nous trouvons des intégrales qui ne peuvent pas être permutées, autrement que dans des exemples fait exprès.

### 28.3.7 Peigne de Dirac

**Proposition 28.39.**
*La formule*

$$\Delta_a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{ka} \tag{28.101}$$

*définit un élément de* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

La forme linéaire $\Delta_a$ est le **peigne de Dirac** de pas $a$.

*Démonstration.* Nous utilisons le critère de continuité séquentielle en zéro du théorème 28.9. Soit une suite $\varphi_n \to 0$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Par le théorème 28.6 il existe un compact $K$ de $\mathbb{R}$ pour lequel $\varphi_n \in \mathscr{D}(K)$ pour tout $n$ et $\varphi_n \to 0$ dans $\mathscr{D}(K)$. La somme 28.101 est donc finie et nous pouvons la permuter avec une limite :

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_a(\varphi_n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(ka). \tag{28.102}$$

La limite $\varphi_n \to 0$ dans $\mathscr{D}(K)$ signifie que nous avons convergence uniforme de la fonction et de toutes ses dérivées vers 0. En particulier $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$ ; disons que la somme (qui est finie) fasse $s$ termes :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_n(ka) \leqslant s\|\varphi_n\|_\infty. \tag{28.103}$$

Le terme de droite tend vers zéro lorsque $n$ tend vers l'infini. □

Donc $\Delta_a$ est bien une distribution au sens de la définition 28.8.

**Lemme 28.40** ([282])**.**
*Le peigne de Dirac vérifie la relation*

$$\Delta_a = \frac{1}{a}\Delta_1 \circ D_a \tag{28.104}$$

*où* $D_a$ *est l'application* $D_a \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$(D_a f)(x) = af(ax). \tag{28.105}$$

*Démonstration.* Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ nous avons

$$\Delta_a(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ka) = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (D_a\varphi)(k) = \frac{1}{a}\Delta_1(D_a\varphi). \tag{28.106}$$

□

**Proposition 28.41.**
*Le peigne de Dirac est une distribution tempérée.*

Notez qu'il y a plus de fonctions dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ que dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ ; il est donc plus difficile de rentrer dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ que dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ : il est plus compliqué d'avoir existence de $T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

*Démonstration.* Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Nous avons

$$|\Delta_a(\varphi)| = |\sum_k \varphi(ak)| = \left|\sum_k \frac{(1+a^2k^2)\varphi(ak)}{1+a^2k^2}\right| \leqslant_{x\in\mathbb{R}} \left|(1+x^2)\varphi(x)\right| \sum_k \frac{1}{1+a^2k^2}. \tag{28.107}$$

La somme $\sum_k \frac{1}{1+a^2k^2}$ est une somme convergente, et et supremum est borné par la proposition 24.78 en prenant $Q(x) = 1+x^2$. En effet sur $\overline{B(0,r)}$ la fonction $x \mapsto (1+x^2)\varphi(x)$ est bornée par ce que c'est une fonction continue sur un compact, et à l'extérieur de $B(0,r)$ cette fonction est alors bornée par 1. □

Si aucune ambigüité n'est à craindre, nous noterons $f$ la distribution $T_f$.

**Exemple 28.42**
La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est la fonction constante : $\hat{\delta} = 1$. En effet si nous agissons sur une fonction test,

$$\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx. \tag{28.108}$$

△

## 28.4 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$

D'abord parlons un peu de continuité en recopiant la proposition 6.199 dans notre contexte.

**Proposition 28.43.**
*Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $u\colon I \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors*

*(1) Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, l'application $t \mapsto u_t(\varphi)$ est continue.*

*(2) Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, nous avons la limite*

$$\lim_{t\to t_0} u_t(\varphi) = u_{t_0}(\varphi). \tag{28.109}$$

*(3) Nous avons la limite dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$*

$$\lim_{t\to t_0} u_t = u_{t_0}. \tag{28.110}$$

En ce qui concerne la définition de l'espace $C^\infty(I, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$, c'est la définition 6.200. Grâce au point (1) de la proposition 28.43, nous retenons que la propriété fondamentale d'une application $T \in C^k\big(I, \mathscr{D}'(\Omega)\big)$ est que pour tout $\varphi \in (\Omega)$, l'application

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto T_t(\varphi) \end{aligned} \tag{28.111}$$

est de classe $C^k$.

**Proposition 28.44.**
*Soit $(T_t) \in C^0\big(I, \mathscr{D}'(\Omega)\big)$ et $\psi \in \mathscr{D}(I \times \Omega)$. Alors l'application*

$$t \mapsto T_t\big(\psi(t,.)\big) \tag{28.112}$$

*est continue sur $I$.*

*Démonstration.* La fonction dont nous voulons prouver la continuité est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; il est donc loisible de se contenter de la continuité séquentielle. Soit $t_0 \in I$ et $(t_j)$ une suite dans $I$ convergeant vers $t_0$. Nous posons $U_j = T_{t_j}$ et $\psi_j = \psi\big(t_j, .\big)$. Par hypothèse de continuité de $(T_t)$ nous avons $U_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T_{t_0}$. D'autre part le support de $\psi$ étant compact nous avons $\text{supp}(\psi) \subset [c,d] \times K$ où $[c,d] \subset I$ et $K$ est compact dans $\Omega$. Par conséquent nous avons aussi $\text{supp}(\psi_j) \subset K$.

Affin d'alléger les notations notons $\tilde{\psi}(x) = \psi(t_0, x)$. Pour tout multiindice $\alpha$ et pour tout $j$ nous avons

$$p_\alpha(\psi_i - \tilde{\psi}) = \Big|\partial^\alpha \psi(t_j, x) - \partial^\alpha \psi(t_0, x)\Big| \leqslant |t_j - t_0| \sup_{\substack{t \in [c,d] \\ x \in K}} |\partial_t \partial^\alpha \psi(t,x)| \to 0. \tag{28.113}$$

Nous avons donc la convergence

$$\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \psi(t_0, .). \tag{28.114}$$

Étant donné que $U_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T_{t_0}$ et $\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \tilde{\psi}$, le point (3) du corollaire 24.9 nous donne la convergence

$$U_j(\psi_j) \to T_{t_0}(\tilde{\psi}) \tag{28.115}$$

dans $\mathbb{C}$. Cela est bien la continuité de la fonction $t \mapsto T_t\big(\psi(t,.)\big)$. □

**Proposition 28.45** ([304])**.**
*Soit $(T_t) \in C^0\big(I, \mathscr{D}'(\Omega)\big)$. Nous définissons l'application $T \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ par la formule*

$$T(\psi) = \int_I T_t\big(\psi(t,.)\big)\, dt \tag{28.116}$$

*pour tout $\psi \in \mathscr{D}(I \times \Omega)$. Alors $T \in \mathscr{D}'(I \times \Omega)$.*

*Démonstration.* La proposition 28.44 nous indique que la fonction $t \mapsto T_t\big(\psi(t,.)\big)$ est continue. Étant donné qu'elle est seulement non nulle sur un compact, l'intégrale

$$\int_I T_t\big(\psi(t,.)\big) dt \tag{28.117}$$

a un sens et est finie. L'application $T \colon \mathscr{D}(I \times \Omega) \to \mathbb{C}$ ainsi définie est linéaire. Il reste à voir qu'elle est continue. Pour cela nous allons utiliser le théorème 28.9(2) qui nous dit que nous pouvons nous fixer un compact $[c,d] \times K \subset I \times \Omega$ et considérer $\psi \in \mathscr{D}\big([c,d] \times K\big)$.

Soit, pour commencer, donnée une application $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. L'application $t \mapsto T_t(\varphi)$ est continue et non nulle sur le et il existe donc $C_\varphi > 0$ tel que

$$|T_t(\varphi)| \leqslant C_\varphi \tag{28.118}$$

pour tout $t \in [c,d]$.

Nous voulons utiliser le théorème de Banach-Steinhaus dans sa version 24.10 sur la famille d'applications paramétrée par $u \in [c,d]$ :

$$\begin{aligned} U_u \colon \mathscr{D}\big([c,d] \times K\big) &\to \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto T_u\big(\psi(u,.)\big). \end{aligned} \tag{28.119}$$

Commençons par prouver que cela est une application continue pour chaque $u$. Ce sera le cas si la projection

$$\begin{aligned} \texttt{proj} \colon \mathscr{D}\big([c,d] \times K\big) &\to \mathscr{D}(K) \\ \psi &\mapsto \psi(u,.) \end{aligned} \tag{28.120}$$

est continue. Pour cela nous notons $P_{kl}$ la semi-norme sur $\mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)$ donnée par

$$P_{k,l}(\psi)=\sum_{n\leqslant k}\sum_{|\alpha|\leqslant l}\sup_{\substack{t\in[c,d]\\x\in K}}\big|\partial_t^n\partial^\alpha\psi(t,x)\big|. \tag{28.121}$$

Nous montrons que `proj` est séquentiellement continue ; étant donné que les topologies sur $\mathscr{D}(K)$ et $\mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)$ sont données par des métriques (proposition 28.7), cela suffit pour assurer la continuité grâce à la proposition 6.140. Montrons que si $\psi_n\xrightarrow{\mathscr{D}([c,d]\times K)}0$, alors $\texttt{proj}(\psi_n)\xrightarrow{\mathscr{D}(K)}0$. Pour cela nous remarquons que

$$\begin{aligned}p_j\big(\texttt{proj}(\psi)\big)&=\sum_{|\alpha|\leqslant j}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\psi(u,x)| &(28.122a)\\&\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant j}\sup_{t\in[c,d]}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\psi(t,x)| &(28.122b)\\&=P_{0,j}(\psi). &(28.122c)\end{aligned}$$

Par conséquent

$$p_j\big(\texttt{proj}(\psi_n)\big)\leqslant P_{0,j}(\psi_n)\to 0 \tag{28.123}$$

où nous avons utilisé la proposition 6.193. Utilisant cette même proposition à l'envers, nous déduisons que $\texttt{proj}(\psi_n)\xrightarrow{\mathscr{D}(K)}0$. Les applications $U_u$ sont donc continues ; elles sont également bornées parce que si $\psi\in\mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)$ nous avons

$$\sup_{u\in[c,d]}\big|U_u(\psi)\big|=\sup_u\big|T_u\big(\psi(u,.)\big)\big|, \tag{28.124}$$

et la continuité déjà évoquée, sur le compact $[c,d]$, nous dit que cette quantité est finie. Le théorème de Banach-Steinhaus peut maintenant être appliqué et il existe $C>0$ et $k,l\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $\psi\in\mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)$,

$$\big|U_u(\psi)\big|\leqslant CP_{k,l}(\psi)=C\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sum_{n\leqslant l}\sup_{t,x}\big|\partial_t^n\partial^\alpha\psi(t,x)\big|\leqslant C\sum_{|\alpha|+n\leqslant k+l}\sup_{t,x}\big|\partial_t^n\partial^\alpha\psi(t,x)\big|. \tag{28.125}$$

Quelque remarques

- Nous n'avons pas mis de maximum devant le supremum (alors que la conclusion (24.14) en demande) parce que dans le cas des semi-normes $P_{kl}$, c'est toujours celle avec $k$ et $l$ le plus grand possible qui sont les plus grandes parce qu'elles sont des sommes emboitées les unes les autres.
- La fusion de deux sommes est bien une majoration parce qu'il y a plus de termes dans la seconde que dans la première.
- La quantité la plus à droite est (à part le $C$) ce que nous pouvons noter $P_{k+l}(\psi)$ : c'est bien une des semi-normes associées à l'espace de dimension $d+1$.

Nous majorons maintenant $T(\psi)$ par

$$\big|T(\psi)\big|\leqslant\int_c^d\big|T_t\big(\psi(t,.)\big)\big|dt=\int_c^d\big|U_t(\psi)\big|dt\leqslant C|d-c|P_{k+l}(\psi). \tag{28.126}$$

Maintenant le théorème 28.9(2) appliqué à l'ouvert $I\times\Omega$ et avec $\psi$ au lieu de $\varphi$ nous informe que $T\in\mathscr{D}(I\times K)$. □

### 28.4.1 Dérivation

Quelques propriétés de dérivation des fonctions $I\to\mathscr{D}(\Omega)$ seront directement énoncées et démontrées dans le cas des distributions tempérées. Les résultats 28.52 et 28.53 seront a fortiori valables si nous remplaçons $\mathscr{S}$ par $\mathscr{D}$.

## 28.5 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$

Dans cette section nous notons $I$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ; si $\psi$ est une fonction sur $I \times \Omega$ nous allons noter $\psi_t \colon \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction $\psi_t(x) = \psi(t, x)$. C'est une notation plus légère que $\psi(t, .)$.

### 28.5.1 Propriétés générales

La définition de l'espace $C^\infty(I, \mathscr{S}'(\Omega))$ est encore la définition 6.200 et les propriétés énoncées dans la proposition 28.43 sont encore bonnes ici.

D'abord parlons un peu de continuité en recopiant la proposition 6.199 dans notre contexte.

**Proposition 28.46.**
*Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $u \colon I \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors*

*(1) Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, l'application $t \mapsto u_t(\varphi)$ est continue.*

*(2) Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, nous avons la limite*

$$\lim_{t \to t_0} u_t(\varphi) = u_{t_0}(\varphi). \tag{28.127}$$

*(3) Nous avons la limite dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$*

$$\lim_{t \to t_0} u_t = u_{t_0}. \tag{28.128}$$

**Lemme 28.47.**
*Nous avons $C^\infty(I, \mathscr{S}'(\Omega)) \subset C^\infty(I, \mathscr{D}'(\Omega))$.*

*Démonstration.* Soit $(T_t) \in C^\infty(I, \mathscr{S}'(\Omega))$. Pour chaque $t$ nous avons

$$T_t \in \mathscr{S}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega). \tag{28.129}$$

Ensuite il suffit de dire que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ la fonction

$$t \mapsto T_t(\varphi) \tag{28.130}$$

est de classe $C^\infty$ parce que c'est le cas pour toute fonction dans $\mathscr{S}(\Omega)$. La proposition 28.43 (en changeant $\mathscr{D}$ en $\mathscr{S}$) conclut que $(T_t) \in C^\infty(I, \mathscr{D}'(\Omega))$. □

**Proposition 28.48.**
*L'espace $\mathscr{S}(\Omega)$ est complet et métrisable.*

*Démonstration.* En ce qui concerne le métrisable nous reprenons la formule de l'écart (6.168). Dans notre cas pour l'écrire explicitement il faudrait une énumération de $\mathbb{N}^2$ à partir de 1 (et non de zéro). Cette formule donne bien une distance parce que si $d(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ alors en particulier $p_{00}(\varphi_1 - \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty = 0$ et donc $\varphi_1 = \varphi_2$.

Nous montrons maintenant que $\mathscr{S}(\Omega)$ est complet en y considérant une suite de Cauchy $(\varphi_n)$. Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ainsi que $k, l$ assez grands pour que $\varphi_k - \varphi_l \in B_{\alpha\beta}(0, \epsilon)$. En particulier pour $\alpha = \beta = 0$ nous avons $\|\varphi_k - \varphi_l\|_\infty \leqslant \epsilon$, ce qui signifie que nous avons une suite vérifiant le critère de Cauchy uniforme 12.296. Elle converge donc uniformément vers une certaine fonction $\varphi$ que la proposition 12.297 nous assure être continue. Il existe donc $\varphi \in C(\Omega)$ telle que

$$\varphi_k \xrightarrow{unif} \varphi. \tag{28.131}$$

Nous devons montrer que $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$. Le fait que $\varphi$ soit de classe $C^\infty$ s'obtient en utilisant les semi-normes $p_{0,\alpha}(\varphi) = \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$ de la même façon que dans la preuve que $\mathscr{D}(\Omega)$ était complet (proposition 28.7). Nous obtenons en particulier que

$$\partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow{unif} \partial^\alpha \varphi \tag{28.132}$$

pour tout multiindice $\alpha$. Montrons encore que $\varphi$ est à décroissance rapide : nous devons montrer que pour tout $\alpha$ et $\beta$ nous avons

$$p_{\alpha\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\Omega} \left|x^\beta(\partial^\alpha\varphi)(x)\right| < \infty. \tag{28.133}$$

Étant donné que $(\varphi_n)$ est de Cauchy dans $\mathscr{S}(\Omega)$ nous avons (pour $\epsilon$ fixé et $k, l$ assez grands) :

$$\left|x^\beta(\partial^\alpha\varphi_k - \partial^\alpha\varphi_l)(x)\right| \leqslant \epsilon \tag{28.134}$$

pour tout $x \in \Omega$. En considérant $l$ fixé et en prenant la limite $k \to \infty$ et en utilisant la convergence uniforme (28.132) nous trouvons que

$$\left|x^\beta(\partial^\alpha\varphi - \partial^\alpha\varphi_l)(x)\right| \leqslant \epsilon \tag{28.135}$$

Du coup nous pouvons faire la majoration

$$\sup_{x\in\Omega} \left|x^\beta(\partial^{\alpha\varphi})(x)\right| \leqslant \sup_x \left|x^\beta(\partial^\alpha\varphi - \partial^\alpha\varphi_l)(x)\right| + \sup_x \left|(\partial^\alpha\varphi_l)(x)\right| \leqslant \epsilon + p_{\alpha\beta}(\varphi_l) < \infty \tag{28.136}$$

du fait que $p_{\alpha\beta}(\varphi_l) < \infty$ parce que $\varphi_l \in \mathscr{S}(\Omega)$.

Donc $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$ et ce dernier est alors complet. □

**Proposition 28.49.**
*Soit $(T_t) \in C^0\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$ et $\psi \in \mathscr{S}(I \times \Omega)$. Alors la fonction*

$$t \mapsto T_t(\psi_t) \tag{28.137}$$

*est continue sur $I$.*

*Démonstration.* Soit $t_0 \in I$ et une suite convergente vers $t_0$ : $t_j \to t_0$ dans $\mathbb{R}$. Vu que $(T_t)$ est continue en $t$, elle est en particulier séquentiellement continue et nous avons

$$T_{t_j} \xrightarrow{\mathscr{S}'(\Omega)} T_{t_0}. \tag{28.138}$$

Montrons que nous avons aussi $\psi_{t_j} \xrightarrow{\mathscr{S}(\Omega)} \psi_{t_0}$. Pour cela nous utilisons les semi-normes [9] $p_{\alpha\beta}$ définies en (24.299) :

$$\begin{aligned}
p_{\alpha\beta}(\psi_{t_j} - \psi_{t_0}) &= \sum_{x\in\Omega} \Big|x^\beta\big(\partial^\alpha\psi(t_j, x) - \partial^\alpha\psi(t_0, x)\big)\Big| && \text{(28.139a)}\\
&\leqslant \sup_{x\in\Omega} \Big|x^\beta|t_0 - t_j| \sup_{t\in[t_0,t_j]} \big|\partial_t\partial^\alpha\psi(t, x)\big|\Big| && \text{(28.139b)}\\
&\leqslant |t_0 - t_j| \sup_{x\in\Omega} \sup_{t\in I} \left|x^\beta\partial_t\partial^\alpha\psi(t, x)\right| && \text{(28.139c)}\\
&\leqslant |t_0 - t_j| P_{(\alpha t),\beta}(\psi). && \text{(28.139d)}
\end{aligned}$$

Pour la première majoration nous avons utilisé le théorème des accroissements finie 12.241. Pour la dernière ligne nous avons noté $P_{\alpha\beta}$ les semi-normes de $\mathscr{S}(I \times \Omega)$ et $(t\alpha)$ est le multiiindice qui commence par la variable $t$ et qui continue par $\alpha$. Étant donné que $P_{(\alpha t)\beta}(\psi) < \infty$ nous avons bien

$$p_{\alpha\beta}(\psi_{t_j} - \psi_{t_0}) \to 0 \tag{28.140}$$

et donc $\psi_{t_j} \xrightarrow{\mathscr{S}(\Omega)} \psi_{t_0}$.

Étant donné que $\mathscr{S}(\Omega)$ est métrisable et complet, le corollaire 24.9 nous dit que

$$T_{t_j}(\psi_{t_j}) \to T_{t_0}(\psi_{t_0}), \tag{28.141}$$

ce qui est bien le critère de continuité séquentielle de la fonction (28.137). □

9. Pas parce que nous en avons envie, mais bien parce qu'elles font partie de la définition de la convergence et de tous ces trucs.

**Remarque 28.50.**
La proposition 28.45 nous dit, a fortiori, que si $(T_t) \in C^\infty\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$ alors la formule

$$\tilde{T}(\psi) = \int_I T_t(\psi_t) \tag{28.142}$$

donne un élément $\tilde{T} \in \mathscr{D}'(I \times \Omega)$. Au cas où aucune confusion n'est à craindre, nous pourrons noter également $T$ l'élément de $\mathscr{D}'(I \times \Omega)$ déduit de $T \in C^\infty\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$.

Notons que ce $T$ ne sera pas toujours une distribution tempérée comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 28.51**
En posant $T_t(\varphi) = e^{t^2}\varphi(0)$ avec $I = \mathbb{R}$, l'intégrale

$$T(\psi) = \int_{\mathbb{R}} T_t(\psi_t) = \int_{\mathbb{R}} e^{t^2}\psi(t,0)dt \tag{28.143}$$

ne converge pas pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \Omega)$. En effet par rapport à $t$, la fonction $\psi(t,0)$ décroît rapidement mais pas spécialement assez rapidement pour compenser $e^{t^2}$. △

### 28.5.2 Dérivation

**Proposition 28.52** ([304])**.**
*Soit $T \in C^k\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$ et $0 \leqslant l \leqslant k$. Pour tout $t_0 \in I$ l'application*

$$\begin{aligned} T_{t_0}^{(l)} \colon \mathscr{S}(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \left(\frac{d^l}{dt}T_t(\varphi)\right)(t_0) \end{aligned} \tag{28.144}$$

*est bien définie, est une distribution et de plus*

$$t \mapsto T_t^{(l)} \in C^{k-l}\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big). \tag{28.145}$$

Attention que la formule (28.144) est bonne si $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$. Si par contre $\psi \in \mathscr{S}(I \times \Omega)$ et qu'on veut regarder $u_t^{(1)}(\psi_t)$ alors il faut regarder la proposition 28.53 et utiliser la formule (28.150) dans laquelle se trouve $u_t^{(1)}(\psi_t)$.

*Démonstration.* Pour $k = 0$ nous avons $T_t^{(0)} = T_t$ et c'est bon. Pour le cas $k = 1$ et $l = 0$ c'est encore $T_t^{(0)} = T_t$ qui fonctionne.

Le premier cas non trivial à traiter est $k = 1$ et $l = 1$. Nous considérons $t_0 \in I$ ; par définition de la dérivée, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$, nous avons (pour peu que les limites existent) :

$$T_{t_0}^{(1)}(\varphi) = \frac{d}{dt}\Big[T_t(\varphi)\Big]_{t=t_0} = \lim_{j\to\infty} \frac{T_{t_0+\epsilon_j}(\varphi) - T_{t_0}(\varphi)}{\epsilon_j} = \lim_{j\to\infty} U_j(\varphi) \tag{28.146}$$

où

$$U_j = \frac{1}{\epsilon_j}\big(T_{t_0+\epsilon_j} - T_{t_0}\big). \tag{28.147}$$

et $(\epsilon_j)$ est une suite de réels tendant vers zéro.

Vu que $(T_t) \in C^k(I, \mathscr{S}'(\Omega))$, l'application $t \mapsto T_t(\varphi)$ est de classe $C^k$ et en particulier l'expression (28.146) a une limite lorsque $j \to \infty$. Donc $T_{t_0}^{(1)}(\varphi)$ est bien définie. Le point (1) du corollaire 24.9 nous dit que $\lim_{j\to\infty} U_j(\varphi) = T_{t_0}^{(1)}(\varphi)$ et $T_{t_0}^{(1)}$ est une distribution (linéaire et continue).

Nous devons encore voir que $t \mapsto T_t^{(1)}$ est une application $C^0\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$. Cela est une conséquence du fait que $(T_t)$ soit de classe $C^1$, ce qui se traduit par le fait que l'application

$$t \mapsto \frac{d}{dt}\Big(T_t(\varphi)\Big) \tag{28.148}$$

est continue (définition de la dérivée et point (1) de la proposition 28.46 appliquée à la dérivée).

Les cas $k \geqslant 1$ se traitent par récurrence. □

**Proposition 28.53** ([304])**.**
*Soit $(T_t) \in C^1\big(I,\mathscr{S}'(\Omega)\big)$ et $\psi \in \mathscr{S}(I\times\Omega)$. Alors la fonction*

$$t \mapsto T_t\big(\psi(t,.)\big) \tag{28.149}$$

*est de classe $C^1$ sur $I$ et*

$$\frac{d}{dt}\Big(T_t\big(\psi(t,.)\big)\Big) = T_t^{(1)}\big(\psi(t,.)\big) + T_t\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,.)\right) \tag{28.150}$$

*Démonstration.* Soit $t_0 \in I$ et une suite réelle $\epsilon_j \to 0$. Le membre de gauche de (28.150), écrit en $t_0$, donne

$$\spadesuit = \lim_{j\to\infty} \frac{T_{t_0+\epsilon_j}\big(\psi(t_0+\epsilon_j,.)\big) - T_{t_0}\big(\psi(t_0,.)\big)}{\epsilon_j} \tag{28.151}$$

Afin d'alléger les notations nous allons écrire $\psi_t = \psi(t,.)$. Dans le numérateur de (28.151) nous ajoutons et soustrayons la quantité $T_{t_0+\epsilon_j}(\psi_{t_0})$ et nous découpons la limite en deux morceaux :

$$\spadesuit = \lim_{j\to\infty} \frac{T_{t_0+\epsilon_j}(\psi_{t_0+\epsilon_j}-\psi_{t_0})}{\epsilon_j} + \lim_{j\to\infty} \frac{(T_{t_0+\epsilon_j}-T_{t_0})(\psi_{t_0})}{\epsilon_j} \tag{28.152}$$

Le second terme vaut

$$\frac{d}{dt}\Big(T_t(\psi_{t_0})\Big)_{t=t_0} = T_{t_0}^{(1)}(\psi_{t_0}) \tag{28.153}$$

par la proposition 28.52. Occupons nous de l'autre morceau de ♠. Nous posons $U_j = T_{t_0+\epsilon_j}$ et

$$\varphi_j = \frac{1}{\epsilon_j}(\psi_{t_0+\epsilon_j} - \psi_{t_0}). \tag{28.154}$$

Nous voulons utiliser le corollaire 24.9(3) pour obtenir

$$\lim_{j\to\infty} U_j(\varphi_j) = T_{t_0}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)\Big). \tag{28.155}$$

D'une part $(T_t)$ est de classe $C^\infty$ en $t$ et nous avons donc la convergence $U_j \xrightarrow{\mathscr{S}'(\Omega)} T_{t_0}$. Reste à prouver que

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}(\Omega)} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.). \tag{28.156}$$

Cela en remarquant bien que la variable de dérivation n'est pas celle par rapport à laquelle nous voulons la convergence Schwartz [10]. Soient $\alpha$ et $\beta$ des naturels et calculons un peu :

$$p_{\alpha\beta}\big(\varphi_j - \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)\big) = \sup_{x\in\Omega}\left|x^\beta\partial^\alpha\Big(\frac{1}{\epsilon_j}\big(\psi(t_0+\epsilon_j,x)-\psi(t_0,x)\big) - \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,x)\Big)\right| \tag{28.157}$$

Il est à présent l'heure d'utiliser un développement de Taylor avec le reste de la proposition 12.271 :

$$\psi(t_0+\epsilon_j,x) = \psi(t_0,x) + \epsilon_j\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,x) + \frac{\epsilon_j^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(\bar{t},x) \tag{28.158}$$

pour un certain $\bar{t}\in[t_0,t_0+\epsilon_j]$. En mettant ça dans le calcul (28.157) nous restons avec

$$p_{\alpha\beta}\big(\varphi_j - \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)\big) = \sup_{x\in\Omega}\left|x^\beta\partial^\alpha\Big(\epsilon_j\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(\bar{t},x)\Big)\right| \leqslant \epsilon_j P_{\alpha,2;\beta,0}(\psi) \tag{28.159}$$

où $P_{\alpha,k;\beta,l}$ sont les semi-normes de $\mathscr{S}(I\times\Omega)$ avec la notation plus ou moins évidente de prendre $\alpha$ dérivations sur $x$, $k$ sur $t$ puis de multiplier par $x^\beta t^l$. Au final nous avons bien

$$\lim_{j\to\infty} p_{\alpha\beta}\big(\varphi_j - \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)\big) = 0 \tag{28.160}$$

et donc la convergence $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}(\Omega)} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)$. □

10. Je ne sais pas si je me suis bien fait comprendre là.

**Lemme 28.54.**
*Soit $(T_t) \in C^1\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$ alors si $\mathcal{F}$ dénote la transformée de Fourier nous avons*

$$\mathcal{F}\big(T_t^{(1)}\big) = (\mathcal{F}T)_t^{(1)} \tag{28.161}$$

*où $(\mathcal{F}T)$ est la famille de distributions $(\mathcal{F}T)_t = \mathcal{F}T_t$.*

*Démonstration.* Pour la preuve il suffit de tester l'égalité sur une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$ :

$$(\mathcal{F}T_t^{(1)})(\varphi) = T_t^{(1)}(\mathcal{F}\varphi) = \frac{d}{dt}\Big(T_t(\mathcal{F}\varphi)\Big) = \frac{d}{dt}\Big((\mathcal{F}T_t)(\varphi)\Big) = (\mathcal{F}T)_t^{(1)}(\varphi). \tag{28.162}$$

□

## 28.6 Une équation de distribution

Nous allons étudier l'équation

$$(x - x_0)^\alpha u = 0 \tag{28.163}$$

pour $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ est donné fixé. Notons tout de suite que (28.163) est un petit abus de notation pour dire qu'en vertu de la définition 28.14 du produit d'une distribution par une fonction, pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, nous avons $u\Big(x \mapsto (x - x_0)\phi(x)\Big) = 0$.

**Lemme 28.55** ([117])**.**
*Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Une solution à l'équation*

$$(x - x_0)^\alpha u = 0 \tag{28.164}$$

*est une distribution à support dans $\{x_0\}$ et d'ordre fini.*

*Démonstration.* Nous commençons par prouver que $u$ est une solution de (28.164) si et seulement si[11] $\langle u, \phi\rangle = 0$ pour tout $\phi \in \mathscr{D}$ telle que

$$\phi(x_0) = \ldots = \partial^{\alpha-1}\phi(x_0) = 0. \tag{28.165}$$

**Condition nécéssaire** Supposons que $u$ soit une solution. Alors le corollaire 14.76 du théorème de Hadamard donne $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = (x - x_0)^\alpha\psi(x)$. Dans ce cas, si $u$ est solution de (28.164), alors

$$0 = \big\langle (x - x_0)^\alpha u, \psi\big\rangle = \big\langle u, (x - x_0)^\alpha\psi(x)\big\rangle = \langle u, \phi\rangle. \tag{28.166}$$

Nous avons vu que si $u$ est solution, alors $\langle u, \phi\rangle = 0$ pour tout $\phi$ satisfaisant la condition (28.165).

**Condition suffisante** Supposons maintenant l'inverse : $u$ est une distribution s'annulant sur toute fonction $\phi \in \mathscr{D}'$ satisfaisant (28.165). Nous allons alors prouver que $u$ est une solution. Soit donc $\psi \in \mathscr{D}$ et calculons

$$\big\langle (x - x_0)u, \psi\big\rangle = \big\langle u, (x - x_0)\psi\big\rangle = 0 \tag{28.167}$$

parce que la fonction $(x - x_0)\psi(x)$ vérifie la condition (28.165).

Nous passons maintenant au cœur de la preuve : nous supposons que $u$ est une solution. Si le support de $\phi$ est contenu dans $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ alors $\phi$ est nulle dans un voisinage de $x_0$ (et donc $\partial^k\phi = 0$ pour tout $k$) et $\langle u, \phi\rangle = 0$. Autrement dit, pour tout $\phi \in \mathscr{D}\big(\mathbb{R}\backslash\{x_0\}\big)$ nous avons $\langle u, \phi\rangle = 0$, ce qui signifie que $\text{supp}(u) \cap \big(\mathbb{R}\backslash\{x_0\}\big) = \varnothing$ ou encore que $\text{supp}(u) = \{x_0\}$.

Maintenant que $u$ a un support compact, la proposition 28.20 nous indique qu'elle est d'ordre fini. □

11. En réalité nous n'aurons besoin que de la condition nécessaire, en particulier pour le théorème 28.56.

**Théorème 28.56** ([117]).
*Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ et l'équation*

$$(x - x_0)^\alpha u = 0 \tag{28.168}$$

*pour $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Les solutions sont les combinaisons linéaires des dérivées de $\delta_{x_0}$ jusqu'à la $\alpha^e$exclue.*

*Démonstration.* D'abord montrons que les $\partial^i \delta_{x_0}$ sont des solutions. Avec les définition 28.14 et 28.15 des dérivées de distributions et de leur produits avec des fonctions [12],

$$(x - x_0)^\alpha \partial^i \delta_{x_0}(\phi) = \delta_{x_0}\Big(\partial^i\big((x - x_0)^\alpha \phi(x)\big)\Big) \tag{28.169}$$

Si $i < \alpha$ alors dans chaque terme de Leibnitz, il y aura un facteur $(x - x_0)$, et la prise de $\delta_{x_0}$ annulera. Si par contre $i \geqslant \alpha$ alors il y aura le terme

$$\binom{i}{\alpha} \partial^\alpha\big((x - x_0)^\alpha\big)\partial^{i-\alpha} = \binom{i}{\alpha} \alpha!(\partial^{i-\alpha}\phi)(x_0) \tag{28.170}$$

qui est le seul terme contenant $(\partial^{i-\alpha}\phi)(x_0)$. Il suffit alors de choisir $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ de sorte que

$$(\partial^k \phi)(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i - \alpha \\ 1 & \text{si } k = i - \alpha \end{cases} \tag{28.171}$$

et alors on est certain que le tout n'est pas nul, et donc que $(x - x_0)^\alpha(\partial^i \delta_{x_0}) \neq 0$.

Jusqu'ici nous avons prouvé que $\partial^i \delta_{x_0}$ est solution si et seulement si $0 \leqslant i < \alpha$.

Il faut encore prouver que les solutions sont toutes des combinaisons linéaires de dérivées de delta de Dirac centrées en $x_0$. Pour cela nous invoquons d'abord le lemme 28.55 qui nous assure que $u$ est d'ordre fini et de support $\{x_0\}$. Ensuite la proposition 28.23 nous indique que $u$ doit alors être une combinaisons linéaire de dérivées de Dirac. □

12. Comme souvent, dans l'expression suivante, il y a un abus de notation parce que $x$ est une variable muette : il faudrait écrire «$x \mapsto$» au début de la grade parenthèse.

# Chapitre 29

# Espaces de Sobolev, équations elliptiques

## 29.1 Espaces de Sobolev

### 29.1.1 Sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Sauf mention du contraire dans cette section $I$ est un intervalle borné ouvert $I = ]a, b[$ de $\mathbb{R}$.

**Définition 29.1.**
*Soit $f \in L^p(I)$ où $I$ est l'intervalle ouvert $]a, b[$. Sa **dérivée au sens des distributions** est une fonction*[1] *$g$ telle que*

$$\int_I f\varphi' = -\int_I g\varphi \tag{29.1}$$

*pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$.*

**Lemme 29.2.**
*Lorsqu'une fonction admet une dérivée au sens des distributions, cette dernière est unique (et justifie le singulier dans la définition).*

*Démonstration.* Soient $g, h \in L^2$ tels que

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi = -\int_I h\varphi \tag{29.2}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Nous avons alors

$$\int_I (g - h)\varphi = 0. \tag{29.3}$$

Cela implique que $g - h = 0$ presque partout par la proposition 24.65[2]. □

**Définition 29.3.**
*Soit $I = ]a, b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$. L'**espace de Sobolev** $H^1(I)$ est l'ensemble*

$$H^1(I) = \Big\{u \in L^2(I) \text{ tel que } \exists g \in L^2(I) \text{ tel que } \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi\Big\}. \tag{29.4}$$

L'unique élément $g$ de $L^2(I)$ vérifiant $\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi$ est noté $u'$ est est nommé **dérivée** ; nous verrons dans les prochaines pages pourquoi.

L'espace $H^1$ accepte le produit scalaire suivant :

$$\langle u, v\rangle = \int_I uv + \int_I u'v', \tag{29.5}$$

1. En réalité, c'est une classe au sens de l'égalité presque partout.
2. Ou alors par le lemme 24.43 qui est moins général mais tout aussi bien pour ici.

et nous notons $\|.\|_{H^1}$ la norme correspondante qui n'est autre que

$$\|u\|_{H^1} = \langle u, u\rangle = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}. \tag{29.6}$$

Nous introduisons l'espace $L^1_{loc}(I)$ des fonctions étant $L^1$ sur tout compact de $I$.

**Corollaire 29.4.**
*Si $u \in H^1(I)$ et si $u' = 0$ alors il existe une constant $C$ telle que $u = C$ presque partout.*

*Démonstration.* L'hypothèse $u' = 0$ signifie que pour tout fonction $\varphi \in C^\infty_c(I)$,

$$\int_I u\varphi' = \int_I u'\varphi = 0. \tag{29.7}$$

La proposition 24.66 nous dit alors qu'il existe une constante $C$ telle que $u = C$ presque partout. □

**Lemme 29.5.**
*Tout élément de $H^1(I)$ admet un unique représentant continu.*

Nous verrons dans le corollaire 29.7 que ce représentant pourra être prolongé par continuité sur $\bar{I}$.

*Démonstration.* Soit $y_0 \in I$ et $u \in H^1(I)$. Nous considérons la fonction

$$\bar{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt. \tag{29.8}$$

Notons que par définition, $u' \in L^2$ donc l'intégrale ne pose pas de problèmes. Montrons que $\bar{u}$ est continue sur $\bar{I}$. Pour cela nous considérons $x \in \bar{I}$ et $h$ tel que $x + h \in \bar{I}$. Alors

$$\big|\bar{u}(x+h) - \bar{u}(x)\big| = \Big|\int_x^{x+h} u'\Big| \leqslant \int_x^{x+h} |u'|. \tag{29.9}$$

Mais la fonction $|u'|$ est dans $L^1_{loc}(I)$ par le lemme 24.24 ; elle est en particulier intégrable sur un ouvert contenant $x$ et par conséquent la dernière intégrale tend vers zéro lorsque $h$ tend vers 0.

Nous prouvons à présent que $\bar{u}$ est dans $H^1(I)$ et que sa dérivée est égale à $u'$ ; pour cela nous allons montrer que pour tout $\varphi \in C^\infty_c(I)$,

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi. \tag{29.10}$$

Nous avons

$$\int_I \bar{u}\varphi' = \int_I \left(\int_{y_0}^x u'(t)dt\right)\varphi'(x)dx = \int_a^{y_0}\left(\int_{y_0}^x u'(t)dt\right)\varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b\left(\int_{y_0}^x u'(t)dt\right)\varphi'(x)dx. \tag{29.11}$$

Pour faire plus court, nous notons $f(t,x) = u'(t)\varphi'(x)$. La première intégrale vaut

$$\begin{aligned}
\int_a^{y_0}\left(\int_{y_0}^x u'(t)\varphi'(x)\right) &= \int_a^{y_0}\left(\int_{y_0}^a f(t,x)\mathbb{1}_{t<x}(t,x)dt\right)dx && \text{(29.12a)}\\
&= \int_{y_0}^a\int_a^{y_0} f(t,x)\mathbb{1}_{t>x}dxdt && \text{(29.12b)}\\
&= \int_{y_0}^a\int_a^{t} f(t,x)dxdt && \text{(29.12c)}\\
&= -\int_a^{y_0}\int_a^t u'(t)\varphi'(x)dx\,dt && \text{(29.12d)}
\end{aligned}$$

La permutation d'intégrales pour obtenir (29.12b) est due au théorème de Fubini 13.230(3). Par le même petit jeu, la seconde intégrale vaut

$$\int_{y_0}^{b}\int_{t}^{b} u'(t)\varphi'(x)dx\,dt. \tag{29.13}$$

En refaisant la somme,

$$\begin{aligned}
\int_I \bar{u}\varphi' &= -\int_a^{y_0} u'(t)\left(\int_a^t \varphi'(x)dx\right)dt + \int_{y_0}^{b} u'(t)\left(\int_t^b \varphi'(x)dx\right)dt && \text{(29.14a)}\\
&= -\int_a^{y_0} u'(t)\big(\varphi(t)-\varphi(a)\big)dt + \int_{y_0}^{b} u'(t)\big(\varphi(b)-\varphi(t)\big) && \text{(29.14b)}\\
&= -\int_a^b u'\varphi && \text{(29.14c)}\\
&= -\int_I u'\varphi. && \text{(29.14d)}
\end{aligned}$$

Notons que $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ parce que $\varphi$ est à support compact dans $]a,b[$. Nous avons donc prouvé que $\bar{u}$ est dans $H^1(I)$ et que $\bar{u}'=u'$. Par le corollaire 29.4, nous avons une constante $C$ telle que $\bar{u}=u+C$ presque partout, c'est à dire $u=\bar{u}+C$ dans $H^1(I)$.

En résumé, $\tilde{u}\tilde{u}=\bar{u}+C$ est un représentant continu de $u$ dans $L^2(I)$.

L'unicité du représentant continu est simplement le fait que deux fonctions continues égales presque partout sont égales (proposition 14.146).

□

**Proposition 29.6.**
*Si $u\in H^1(I)$, alors*

$$u(x)-u(y)=\int_y^x u' \tag{29.15}$$

*pour tout $x,y\in I$.*

*Démonstration.* Pour fixer les idées, nous supposons $x<y$. Nous considérons une suite $\varphi_n\in C_c^\infty(I)$ convergeant uniformément sur $I$ vers $\mathbb{1}_{[x,y]}$. Nous exigeons de plus que

— $\varphi_n'$ est positive sur $[a,x+\frac{1}{n}]$
— $\varphi_n'$ est négative sur $[y-\frac{1}{n},b]$
— $\varphi_n=1$ sur $[x+\frac{1}{n},y-\frac{1}{n}]$.
— $\varphi_n=0$ sur $[a,x-1/n]$ et sur $[y+1/n,b]$.

Pour chaque $n$, nous découpons l'intégrale comme

$$-\int_I u'\varphi_n=\int_I u\varphi_n'=\int_a^{a-1/n} u\varphi_n'+\int_{x-1/n}^{x+1/n} u\varphi_n'+\int_{x+1/n}^{y-1/n} u\varphi_n'+\int_{y-1/n}^{y+1/n} u\varphi_n'+\int_{y+1/n}^{b} u\varphi_n'. \tag{29.16}$$

Par construction de $\varphi_n$, de ces 5 morceaux, il n'en reste que deux de non nulles :

$$\int_I u\varphi' = \underbrace{\int_{x-1/n}^{x+1/n} u(t)\varphi_n'(t)dt}_{A} + \underbrace{\int_{y-1/n}^{y+1/n} u(t)\varphi_n'(t)dt}_{B} \tag{29.17}$$

Soit $\epsilon>0$ et $n$ suffisamment grand pour avoir $u(t)\in B\big(u(x),\epsilon\big)$ pour tout $t\in B(x,\frac{1}{n})$ et (en même temps) $u(t)\in B\big(u(y),\epsilon\big)$ pour tout $t\in B(y,\frac{1}{n})$. C'est la continuité de $u$ qui permet de trouver un tel $n$. Pour cette valeur de $n$, en tenant compte des hypothèses sur la positivité de $\varphi_n'$ nous avons

$$\int_{x-1/n}^{x+1/n}\big(u(x)-\epsilon\big)\varphi_n'(t)dt \leqslant \int_{x-1/n}^{x+1/n} u(t)\varphi_n'(t)dt \leqslant \int_{x-1/n}^{x+1/n}\big(u(x)+\epsilon\big)\varphi_n'(t)dt, \tag{29.18}$$

mais par hypothèse sur $\varphi_n$ nous trouvons

$$\int_{x-1/n}^{x+1/n} \varphi_n'(t)dt = \varphi_n(x+\frac{1}{n}) - \varphi(x+\frac{1}{n}) = 1. \tag{29.19}$$

donc

$$u(x) - \epsilon \leqslant \int_{x-1/n}^{x+1/n} u(t)\varphi_n'(t)dt \leqslant u(x) + \epsilon. \tag{29.20}$$

Pour encadrer la seconde, il faut être plus prudent avec les signes parce que $\varphi_n'$ y est négative. En posant $\psi_n = -\varphi_n$ nous avons

$$-B = \int_{y-1/n}^{y+1/n} u(t)\psi_n(t)dt, \tag{29.21}$$

et donc

$$u(y) - \epsilon \leqslant -B \leqslant u(y) + \epsilon \tag{29.22}$$

ou encore

$$-\epsilon - u(y) \leqslant B \leqslant \epsilon - u(y). \tag{29.23}$$

En additionnant avec (29.20) nous voyons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $N(\epsilon)$ tel que nous ayons

$$u(x) - u(y) - 2\epsilon \leqslant \int_I u'\varphi_n \leqslant u(x) - u(y) + 2\epsilon \tag{29.24}$$

pour tout $n \geqslant N$. Nous voulons évidemment prendre la limite $\epsilon \to 0$, c'est à dire $n \to \infty$. Étant donné que $\varphi_n(t) < 1$ pour tout $t$ et pour tout $n$, la fonction $t \mapsto u'(t)\varphi_n(t)$ est dominée par $u'$, qui est dans $L^1(I)$ par le lemme 24.24. Le théorème de la convergence dominée nous permet donc d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I u'\varphi_n = \int_I u'\mathbb{1}_{[x,y]} = \int_x^y u', \tag{29.25}$$

et donc les inégalités (29.24) donnent le résultat, grâce au signe dans (29.16). □

**Corollaire 29.7.**
*Si $[u] \in H^1(I)$, le représentant continu $u \in C^0(I)$ peut être prolongé par continuité en $u \in C^0(\bar{I})$.*

*Démonstration.* Soit $(x_n)$ une suite strictement croissante dans $]a,b[$ convergeant vers $b$. Nous voulons montrer que la suite $\big(u(x_n)\big)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, ce qui nous permettra de définir

$$u(b) = \lim_{n\to\infty} u(x_n). \tag{29.26}$$

qui sera évidemment continue. Cette construction ne dépendra pas du choix de la suite $(x_n)$ parce que deux fonctions continues sur $\bar{I}$ et égales sur $I$ sont égales sur $\bar{I}$.

En notant $u'$ la dérivée de $u$ dans $H^1$, nous avons par construction du représentant continu : $u(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$. Et donc

$$\big|u(x_n) - u(x_{n+p})\big| = \left|\int_{y_0}^{x_n} u' - \int_{y_0}^{x_{n+p}} u'\right| = \left|\int_{x_n}^{x_{n+p}} u'\right|. \tag{29.27}$$

Vu que la suite $(x_n)$ est de Cauchy et que $u'$ est intégrable (même sur $\bar{I}$), la limite $n \to \infty$ de cela est zéro, quelle que soit la valeur de $p$. Donc $\big(u(x_n)\big)$ est ce Cauchy dans $\mathbb{R}$ et est donc convergente. □

**Proposition 29.8** ([2, 1])**.**
*Quelques propriétés de l'espace de Sobolev $H^1(I)$ où $I = ]a,b[$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$.*

*(1) $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.*

*(2) $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\bar{I})$.*

*(3) $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$.*

*Démonstration.* Nous prouvons point par point.

(1) Le seul critère à vérifier est la complétude. Pour cela nous considérons une suite de Cauchy $(u_n)$ dans $H^1(I)$. Si $\epsilon > 0$, alors il existe $N > 0$ tel que pour tout $p \geqslant 0$ nous ayons $\|u_{n+p} - u_n\|_{H^1}^2 \leqslant \epsilon$, c'est à dire

$$\|u_{n+p} - u_n\|_{L^2}^2 + \|u'_{n+p} - u'_n\|_{L^2}^2 + \tag{29.28}$$

En particulier les suites $(u_n)$ et $(u'_n)$ sont de Cauchy dans $L^2$ qui est complet par le théorème de Fischer-Riesz 24.30. Nous notons donc

$$u_n \xrightarrow{L^2} u \tag{29.29a}$$

$$u'_n \xrightarrow{L^2} v. \tag{29.29b}$$

Nous allons maintenant montrer quelque limites.

$\underline{u_n\varphi \xrightarrow{L^2} u\varphi}$ Si $M$ est une constante qui majore $\varphi$ alors $\|u_n\varphi - u\varphi\|_2 \leqslant M\|u_n - u\|_2 \to 0$.

$\underline{u'_n\varphi \xrightarrow{L^2} v\varphi}$ C'est la même chose avec $\|u'_n\varphi - v\varphi\|_2 \leqslant M\|u'_n - v\|_2 \to 0$.

$\underline{u \in H^1(I) \text{ avec } u' = v}$ Attendu le corollaire 24.25 qui permet de permuter intégrale et limite dans $L^2(I)$ et les limites que nous venons de prouver,

$$\int_I u\varphi' = \lim_{n\to\infty} \int_I u_n\varphi' = -\lim_{n\to\infty} \int_I u'_n\varphi = -\int_I v\varphi. \tag{29.30}$$

Cela signifie que $v$ est la dérivée faible de $u$ : $u' = v$.

$\underline{u_n \xrightarrow{H^1} u}$ Nous pouvons alors prouver que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$ :

$$\|u_n - u\|_{H^1(I)}^2 = \|u_n - u\|_{L^2}^2 + \|u'_n - u'\|_{L^2}^2. \tag{29.31}$$

Mais nous savons déjà que $u_n \to u$ dans $L^2$ (d'ailleurs c'est la définition de $u$) et que $u' = v$ alors que par définition de $v$, nous avons $u'_n \to v$ dans $L^2$.

Tout cela donne que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$ et donc que $H^1(I)$ est un espace complet.

(2) L'application que nous allons prouver être compacte entre $H^1(I)$ et $C^0(\bar{I})$ est

$$\begin{aligned} \psi\colon H^1(I) &\to C^0(\bar{I}) \\ [u] &\mapsto \tilde{u} \end{aligned} \tag{29.32}$$

où $[u]$ désigne une classe de fonction dans $H^1(I)$ et $\tilde{u}$ est son représentant continu prolongé par continuité à $\bar{I}$[3], qui existe par le lemme 29.5 et le corollaire 29.7. Cette application est une injection par l'unicité du représentant continu. Nous allons prouver que c'est une application compacte en utilisant le critère (2) de la proposition 24.4. Pour cela nous allons commencer par utiliser le théorème d'Ascoli sur l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}$ des représentants continus des éléments de $\mathcal{B}$, prolongés par continuité sur $\bar{I}$ ; c'est à dire $\tilde{B} \subset C^0(\bar{I})$.
Soit $u \in \tilde{\mathcal{B}}$ ; par la proposition 29.6, nous avons

$$\big|u(x) - u(y)\big| = \Big|\int_y^x u'(t)dt\Big| \tag{29.33a}$$

$$= \left|\int_I \mathbb{1}_{[x,y]}(t)u'(t)dt\right| \tag{29.33b}$$

$$\leqslant \|\mathbb{1}_{[x,y]}\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} \tag{29.33c}$$

$$\leqslant \sqrt{|x-y|}\|u'\|_{H^1} \tag{29.33d}$$

$$\leqslant \sqrt{|x-y|}. \tag{29.33e}$$

3. Encore que par soucis d'économie d'encre nous n'allons pas écrire toujours les tildes et noter $u$ le représentant continu prolongé à $\bar{I}$ par le corollaire 29.7.

où nous insistons sur le fait que la continuité n'impliquant pas la dérivabilité, le $u'$ ici est la dérivé au sens de $H^1$, et non la dérivée usuelle. Quoi qu'il en soit, l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}$ est équicontinu [4]. Nous montrons à présent qu'il est également borné pour la norme uniforme. Soit $u \in \tilde{\mathcal{B}}$ ; vu la construction du représentant continu au lemme 29.5, nous avons

$$\begin{aligned}
\big|u(x)\big| &= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dy\right| && (29.34a)\\
&= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_y^x u'(t)dt - u(y)\right)dy\right| && (29.34b)\\
&= \left|\frac{1}{b-a}\int_a\int_y^x u'(t)dtdy - \frac{1}{b-a}\int_a^b u(y)dy\right| && (29.34c)\\
&\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b |u'(t)|dt\,dy + \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(y)|dy. && (29.34d)
\end{aligned}$$

À ce niveau, il faut remarquer que dans la première intégrale, le passage de la valeur absolue à l'intérieur de l'intégrale en même temps que l'élargissement des bornes n'a rien d'innocent. Si $x < y$, les bornes ne sont pas «dans le bon ordre» et nous ne pouvons pas faire la majoration usuelle en entrant simplement la valeur absolue. Ici nous tenons compte de cela en élargissant les bornes, et en les mettant dans le bon ordre. Le passage exact est le suivant : si $x, y \in ]a, b[$, nous avons

$$\left|\int_y^x f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_y^x |f(t)|dt\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(t)|dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt. \tag{29.35}$$

Notons en particulier que dans le cas du passage vers l'équation (29.34d), le nombre $x$ est fixé alors que $y$ est une variable d'intégration. Donc l'ordre des deux est certainement de temps en temps le «mauvais».

Quoi qu'il en soit, la première intégrale se réduit à une multiplication par $b-a$ et le calcul continue :

$$\begin{aligned}
\big|u(x)\big| &\leqslant \int_I |u'(t)|dt + \frac{1}{b-a}\int_I |u| && (29.36a)\\
&\leqslant \sqrt{b-a}\|u'\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\|u\|_{L^2} && (29.36b)\\
&\leqslant \left(\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right)\big(\|u'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\big) && (29.36c)\\
&\leqslant \left(\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right)\|u\|_{H^1} && (29.36d)\\
&= \sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}. && (29.36e)
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{\mathcal{B}}$ est borné pour la norme $L^\infty$. Et c'est même borné par un nombre facilement calculable connaissant $I$. En particulier l'ensemble

$$\{u(x) \text{ tel que } u \in H^1\} \tag{29.37}$$

est pour, tout $x$, contenu dans la boule de rayon $\sqrt{a-b} + \frac{1}{\sqrt{a-b}}$ et donc est relativement compact dans $\mathbb{R}$. Par conséquent le théorème d'Ascoli 24.7 nous dit que l'ensemble $\tilde{B}$ est relativement compact dans $C^0(I)$.

Par conséquent nous avons montré que l'image par $\psi$ de la boule unité fermée $\mathcal{B}$ de $H^1(I)$ est relativement compacte dans $C^0(\bar{I})$, ce qui signifie que $\psi$ est une application compacte.

4. Définition 24.6

(3) Les éléments de $H^1(I)$ sont des éléments de $L^2(I)$ ; donc l'identité est une injection. Nous devons seulement étudier la continuité. Si $(u_n)$ est une suite dans $H^1$ convergeant dans $H^1$ vers $u$, alors

$$\|u_n - u\|_{L^2} \leqslant \|u_n - u\|_{L^2} + \|u'_n - u'\|_{L^2} = \|u_n - u\|_{H^1} \to 0. \tag{29.38}$$

Donc la suite des images (par l'identité) converge dans $L^2$. L'identité est donc continue.

□

### 29.1.2 Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit $\Omega$, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $v \in L^2(\Omega)$ (définition 24.53). Les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

#### 29.1.2.1 Définition

**Définition 29.9** (Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$)**.**
*Soit $\Omega$ une partie de $\mathbb{R}^n$. L'espace de **Sobolev** $H^1(\Omega)$ est :*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i = 1, \dots, n, \partial_i v \in L^2(\Omega)\}. \tag{29.39}$$

*Nous munissons cet espace d'un produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2}, \tag{29.40}$$

*où $\nabla u = \sum_i \partial_i u \in L^2$.*

L'existence des intégrales dans le produit scalaire est assurée par le fait que $u$, $v$, $\nabla u$ et $\nabla v$ sont dans $L^2(\Omega)$. La définition du produit scalaire dans $L^2$ est la définition 24.175 (mais sans la conjugaison complexe).

Pour la même raison, $(u, u)_{H^1} = 0$ demande que chacun des deux termes est séparément nul, et nous avons $u = 0$ dans $L^2$, et donc aussi dans $H^1$.

**Théorème 29.10** ([306])**.**
*L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert*[5]*.*

*Démonstration.* Nous devons nous assurer que l'espace $H^1$ est complet. Pour cela nous considérons une suite de Cauchy $(u_n)$ dans $H^1$. Soit $\epsilon > 0$ ; il existe $N > 0$ tel que si $n, m > N$ alors $\|u_n - u_m\|_{H^1} < \epsilon$. Dans ce cas nous avons en particulier

$$\|u_m - u_n\|^2_{H^1} = (u, u)_{H^1} = \langle u, u\rangle + \langle \nabla u, \nabla u\rangle = \|u\|^2_{L^2} + \|\nabla u\|^2_{L^2}, \tag{29.41}$$

et en particulier les suites $(u_n)$ et $(\nabla u_n)$ sont de Cauchy dans $L^2$. Vu que $L^2$, lui, est complet (théorème 24.29), il existe $u \in L^2$ et $v_i \in L^2$ tels que

$$u_n \xrightarrow{L^2} u \tag{29.42a}$$

$$\partial_i u_n \xrightarrow{L^2} v_i. \tag{29.42b}$$

Nous savons que l'injection $i\colon L^2 \to \mathscr{D}'$ est continue par la proposition 28.13. Nous avons donc aussi les limites

$$T_{u_n} \xrightarrow{\mathscr{D}'} T_u \tag{29.43a}$$

$$T_{\partial_i u_n} \xrightarrow{\mathscr{D}'} T_{v_i}. \tag{29.43b}$$

5. Définition 23.2.

La dérivée étant une opération continue sur $\mathscr{D}'$ nous avons de plus

$$\partial_i(T_{u_n}) \xrightarrow{\mathscr{D}'} \partial_i(T_u) \tag{29.44}$$

En utilisant le lemme 28.16 nous avons alors

$$T_{\partial_i u_n} = \partial_i(T_{u_n}) \xrightarrow{\mathscr{D}} \partial_i(T_u) = T_{\partial_i u}. \tag{29.45}$$

En comparant avec (29.43b) et par l'unicité de la limite, nous avons $T_{v_i} = T_{\partial_i u}$. Cela implique $v_i = \partial_i u$.

Vu que $v_i \in L^2$ nous avons aussi $\partial_i u \in L^2$. Par conséquent $u \in H^1(\Omega)$ parce que ses dérivées sont dans $L^2$.

Nous devons maintenant prouver que $u_n \xrightarrow{H^1} u$. Nous avons

$$\|u_n - u\|_{H^1} = \|u_n - u\|_{L^2} + \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2} \tag{29.46}$$

Le premier terme tend vers zéro parce que $u_n \xrightarrow{L^2} u$ et le second parce que $\partial_i u_n \xrightarrow{L^2} \partial_i u$. □

### 29.1.3 Espace de Sobolev fractionnaire

**Définition 29.11.**
*Pour $m \in \mathbb{N}$ et un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^d$ nous définissons l'**espace de Sobolev***

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \, \forall |\alpha| \leqslant m\}. \tag{29.47}$$

*Nous définissons également un produit scalaire sur $H^m$ par*

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2}. \tag{29.48}$$

En particulier la topologie est celle de la norme dérivée du produit scalaire :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{29.49}$$

Le lemme suivant montre que la proposition 27.11 fonctionne encore avec $L^2$ au lieu de $\mathscr{S}$.

**Lemme 29.12** (Lemme de transfert[307], thème 64)**.**
*Soit $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout multiindice $\alpha$ avec $|\alpha| \leqslant m$ nous avons*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = \big[\xi \mapsto i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)\big]. \tag{29.50}$$

**Lemme 29.13.**
*Il existe des constantes $c_1$ et $c_2$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$c_1(1 + \|x\|^2)^m \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} (x^\alpha)^2 \leqslant c_2(1 + \|x\|^2)^m. \tag{29.51}$$

**Lemme 29.14.**
*Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous avons $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si l'application*

$$\xi \mapsto \big(1 + |\xi|^2\big)^{k/2} \hat{u} \tag{29.52}$$

*est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \leqslant m$. Ici $|\xi|$ est la norme euclidienne de $\xi$ dans $\mathbb{R}^d$.*

*Démonstration.* Vu le lemme 29.12, il suffit de montrer que

$$\big(1+|\xi|^2\big)^{k/2}\hat{u} \tag{29.53}$$

est dans $L^2$ pour tout $k \leqslant m$ si et seulement si

$$\xi^\alpha \hat{u} \tag{29.54}$$

l'est pour tout $\alpha$ avec $|\alpha| \leqslant m$.

L'expression (29.53) est une somme d'expressions du type (29.54). Donc l'implication dans un sens est montrée. Pour l'autre sens, nous savons que

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}, \tag{29.55}$$

et donc

$$|\xi^\alpha| \leqslant |\xi_1|^{\alpha_1}\dots|\xi_n|^{\alpha_n}. \tag{29.56}$$

Or $|\xi|^{|\alpha|} = |\xi|^{\sum_i \alpha_i} = |\xi|^{\alpha_1}\dots|\xi|^{\alpha_n}$ et $|\xi| \geqslant |\xi_i|$ pour tout $i$, donc

$$|\xi^\alpha| \leqslant |\xi|^{|\alpha|}. \tag{29.57}$$

D'autre part pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $k$ positif nous avons

$$(1+x^2)^{k/2} \geqslant x^k \tag{29.58}$$

qui est facile à vérifier en prenant le carré des deux membres.

En remettant tout ensemble,

$$|\xi^\alpha\hat{u}| \leqslant |\xi^\alpha||\hat{u}| \leqslant |\xi|^{|\alpha|}|\hat{u}| \leqslant \big(1+|\xi|^2\big)^{|\alpha|/2}|\hat{u}|. \tag{29.59}$$

Donc si le membre de droite est de carré intégrable, celui de gauche l'est également. □

**Définition 29.15** (Espace de Sobolev $H^s$)**.**
*Pour $s > 0$ nous définissons l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ par*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } \big(1+\|\xi\|^2\big)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}. \tag{29.60}$$

*Nous y mettons le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1+\|\xi\|^2)^s d\xi. \tag{29.61}$$

**29.16.**
Vu que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (théorème 24.33), on pourrait croire à la densité a fortiori dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Mais attention : $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2$ pour la norme $L^2$. Nous n'avons encore rien dit pour la norme $H^s(\mathbb{R}^d)$.

**Proposition 29.17** ([308])**.**
*La partie $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

*Démonstration.* Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Par définition l'application

$$\xi \mapsto (1+\|\xi\|^2)^{s/2}\hat{u} \tag{29.62}$$

est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Elle peut donc être approximée au sens $L^2$ par des fonctions dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (théorème 24.33(5)), c'est à dire qu'il existe des fonctions $\phi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\phi_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} (1+\|\xi\|^2)^{s/2}\hat{u}. \tag{29.63}$$

Nous posons

$$\psi_n = \frac{\phi_n}{(1+\xi^2)^{s/2}} \tag{29.64}$$

Cela est encore une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, et donc de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Vu que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 27.12), nous pouvons considérer une suite $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{\varphi}_n = \psi_n$, et nous allons montrer que $\varphi_n \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u$.

Nous avons :

$$\|\varphi_n - u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}_n - \hat{u}|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \tag{29.65a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\phi_n(\xi)}{(1+\xi^2)^{s/2}} - \hat{u}(\xi)\Big|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \tag{29.65b}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |\phi_n(\xi) - \hat{u}(\xi)(1+\xi^2)^{s/2}|^2 d\xi \tag{29.65c}$$

$$= \|\phi_n - (1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2}^2. \tag{29.65d}$$

Par définition de la suite $\phi_n$ nous avons donc bien

$$\|\varphi_n - u\|_{H^s}^2 = \|\phi_n - (1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{29.66}$$

Notons que même si $\phi_n$ est dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, nous n'avons pas prouvé la convergence $\phi_n \xrightarrow{H^s} u$, mais bien $\varphi_n \xrightarrow{H^s} u$. Or les fonctions $\varphi_n$ sont dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et rien n'assure qu'elles soient à support compact. Nous avons donc bien prouvé la densité de $\mathscr{S}$ et non celle de $\mathscr{D}$. □

**Remarque 29.18.**
Pour qui a tout compris, cela peut sembler une évidence, mais nous précisions que nous parlons de densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, à aucun moment la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ n'entre en compte.

Un peu moins évident : ce que nous avons réellement montré est la densité de $\iota\big(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)\big)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ où $\iota$ est l'application «prise de classe». Nous n'avons pas insisté là-dessus, mais il faut dire que dans la preuve de la proposition 29.17, $u$ est un représentant d'un élément choisit dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Nous avons ensuite prouvé la convergence $\|\varphi_n - u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \to 0$ qui est une convergence d'une suite dans $\mathbb{R}$, et dans laquelle l'opération $\|.\|_{H^s}$ est définie sur un espace de fonctions et n'est pas une norme (c'est pour que cela devienne une norme que l'on prend les classes).

Nous en avons déduit la convergence $\varphi_n \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u$ où maintenant $\varphi_n$ et $u$ sont des classes dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

**Proposition 29.19.**
*La partie $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\big(H^s(\mathbb{R}^d), \|.\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big)$.*

*Démonstration.* Nous savons déjà que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ par la proposition 29.17. Nous devons seulement prouver que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\big(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}\big)$. Pour cela nous utilisons la densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ de la proposition 24.85. Soit donc $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et une suite $f_k$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$f_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} f. \tag{29.67}$$

Vu que la transformée de Fourier est continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 27.12) nous avons aussi

$$\hat{f}_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \hat{f}, \tag{29.68}$$

et en particulier pour tout polynôme $P$ nous avons la convergence uniforme

$$P\hat{f}_k \xrightarrow{unif} P\hat{f}. \tag{29.69}$$

D'autre part la fonction $\xi \mapsto |\hat{f}_k(\xi) - \hat{f}(\xi)|^2(1+\xi^2)^s$ est Schwartz et en tout point décroissante en $k$. Soit $\epsilon > 0$ et $r > 0$ choisit de telle sorte à avoir

$$\int_{\|\xi\|>r} |\hat{f}_k(\xi) - \hat{f}(\xi)|(1+\xi^2)^s d\xi < \epsilon. \tag{29.70}$$

pour tout $k$. La convergence uniforme (29.69) permet de considérer $k_0$ tel que pour tout $k > k_0$,

$$|\hat{f}_k - \hat{f}|(1+\xi^2)^s < \frac{\epsilon}{\text{Vol}\big(B(0,r)\big)} \tag{29.71}$$

dans $B(0,r)$. Avec tout cela, dès que $k > k_0$ nous avons

$$\|f_k - f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_k - \hat{f}|(1+\xi^2)^s d\xi = \int_{B(0,r)} \ldots + \int_{\|\xi\|>r} \ldots \leqslant 2\epsilon. \tag{29.72}$$

Donc nous avons bien $\|f_k - f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \to 0$ et convergence de $f_k$ vers $f$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. □

## 29.2 Trace

**Définition 29.20.**
*Nous définissons la* ***trace*** *d'une fonction par*

$$\begin{aligned} \gamma_0 \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) &\to \mathscr{D}(\mathbb{R}^{d-1}) \\ (\gamma_0 v)(x_1, \ldots, x_{d-1}) &= v(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0). \end{aligned} \tag{29.73}$$

**Théorème 29.21** ([309])**.**
*Si $s > \frac{1}{2}$, alors $\gamma_0$ accepte une unique extension en opérateur linéaire borné*

$$\gamma_0 \colon H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}). \tag{29.74}$$

*Démonstration.* Nous subdivisons la preuve en plusieurs pas.

**Une inégalité pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$** Nous commençons par considérer $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (fonction $C^\infty$ à support compact). Nous allons alors prouver que

$$\|\gamma_0\varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant K\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \tag{29.75}$$

pour une certaine constante $K$ (qui ne dépend en particulier pas de $\varphi$).
Nous avons

$$\begin{aligned} \|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} &= (\gamma_0\varphi, \gamma_0\varphi)_{H^{s-\frac{1}{2}}} && \text{(29.76a)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\widehat{\gamma_0\varphi(\xi)}|^2(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi && \text{(29.76b)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (\gamma_0\varphi)(x) e^{-i\xi x} dx \Big|^2 (1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi && \text{(29.76c)} \\ & && \text{(29.76d)} \end{aligned}$$

Nous appliquons la trace. en appliquant la formule du corollaire 27.21,

$$(\gamma_0\varphi)(x) = \varphi(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} \varphi(x,y) dy\, dk \tag{29.77}$$

En remplaçant dans (29.76c) nous avons

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} e^{-i\xi x} \varphi(x,y) dy\, dk\, dx \Big|^2 (1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi. \tag{29.78}$$

Nous voudrions permuter les intégrales en $k$ et en $x$. Pour cela nous étudions la fonction $u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}\to\mathbb{C}$ donnée par

$$u(k,x)=e^{-ikx}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}\varphi(x,y)dy \tag{29.79}$$

Effectuer l'intégrale par rapport à $y$ revient à calculer la transformée de Fourier partielle dont nous parlons dans la proposition 27.13[6] . Elle est donc une fonction Schwartz de $k$ et de $x$ (conjointement et non seulement séparément) et est donc dans $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1})$. Les intégrales sut $k$ et sur $x$ peuvent donc être réunies et permutées par le théorème de Fubini 13.230 (n'oubliez tout de même pas de vous convaincre que la condition (2) est remplie).

Nous avons donc

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}e^{-iky}e^{-i\xi x}\varphi(x,y)dy\,dx\,dk|^2(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}}d\xi. \tag{29.80}$$

Étant donné que $\varphi$ est à support compact, les intégrales sur $x$ et sur $y$ peuvent se réunir en utilisant encore le théorème de Fubini ; ces intégrales donnent :

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}}e^{-iky}e^{-i\xi x}\varphi(x,y)dx\otimes dy=\int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}}e^{-i(\xi,k)\cdot(x,y)}\varphi(x,y)dx\otimes dy=\hat{\varphi}(\xi,k). \tag{29.81}$$

Nous restons avec

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}|\int_{\mathbb{R}}\hat{\varphi}(\xi,k)dk|^2(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}}d\xi. \tag{29.82}$$

Nous allons maintenant traiter la partie du milieu :

$$\clubsuit=|\int_{\mathbb{R}}\hat{\varphi}(\xi,k)dk|=|\int_{\mathbb{R}}\hat{\varphi}(\xi,k)(1+\xi^2+k^2)^{s/2}\frac{1}{(1+\xi^2+k^2)^{s/2}}dk|=|\langle f_1,f_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \tag{29.83}$$

Ici $\xi$ est vu comme une constante et les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont

$$f_1\colon k\to\hat{\varphi}(\xi,k)(1+\xi^2+k^2)^{s/2} \tag{29.84a}$$

$$f_2\colon k\to\frac{1}{(1+\xi^2+k^2)^{s/2}} \tag{29.84b}$$

Nous pouvons utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz 9.25 :

$$\clubsuit\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}}|\hat{\varphi}(\xi,k)|^2(1+\xi^2+k^2)^s dk\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+\xi^2+k^2)^s}dk\right)^{1/2} \tag{29.85}$$

Nous notons $g(\xi)$ ce qui se trouve dans la seconde parenthèse (après intégration sur $k$). Avec cela nous continuons :

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}|g(\xi)||\hat{\varphi}(\xi,k)|^2(1+\xi^2+k^2)^s(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}}dk\,d\xi. \tag{29.86}$$

Vu que $\hat{\varphi}$ est Schwartz, la fonction qui est à l'intérieur des deux intégrales est dans $L^1(\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R})$ et nous pouvons réunir les deux intégrales :

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}}|g(\xi)||\hat{\varphi}(\xi,k)|^2(1+\xi^2+k^2)^s(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}}dk\otimes d\xi. \tag{29.87}$$

6. Dont une relecture de la preuve ne serait vraiment pas de trop, ainsi que la preuve de 24.79.

À ce point nous démontrons qu'en réalité la combinaison $g(\xi)(1+\xi^2)^{s-\frac{1}{2}}$ ne dépend pas de $\xi$. En effet

$$g(\xi)(1+\xi^2)^{s-\frac{1}{2}} = (1+\xi^2)^{s-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2+k^2)} dk \tag{29.88a}$$

$$= \frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1+\xi^2}{1+\xi^2+k^2} \right)^s dk \tag{29.88b}$$

$$= \frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}} \int \left( \frac{1}{1+\frac{k^2}{1+\xi^2}} \right)^s dk. \tag{29.88c}$$

Nous effectuons le changement de variables $t = \frac{k}{\sqrt{1+\xi^2}}$, $dk = (1+\xi^2)^{1/2} dt$, et le tout vaut

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{1+t^2} \right)^s dt, \tag{29.89}$$

qui est effectivement indépendant de $\xi$. Nous nommons cela $K$ (auquel nous ajoutons le $\frac{1}{2\pi}$) :

$$\|\gamma_0 \varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant K \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{\varphi}(\xi,k)|^2 (1+\xi^2+k^2)^s dk \otimes d\xi = K \|\varphi\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{29.90}$$

Nous avons donc prouvé pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (avec redéfinition du $K$) :

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant K \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{29.91}$$

**À propos de classes** Il serait tentant de conclure en disant que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Hélas, techniquement, l'ensemble $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ n'est même pas un sous-ensemble de $H^s(\mathbb{R}^d)$ parce que ce dernier est un ensemble de *classes* de fonctions. Ce petit détail a ici son importance parce que $\gamma_0$ n'est pas une application qui descend aux classes. En effet, $\mathbb{R}^{d-1}$ étant de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$, deux fonctions de la même classe peuvent différer en *tous* les points de $\mathbb{R}^{d-1}$ en même temps.

Si nous notons $\iota$ l'application qui consiste à prendre la classe ce qui est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, c'est $\iota(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d))$. Or chaque classe contient au maximum une seule fonction continue (qui sera même de classe $C^\infty$ à support compact pour les éléments de $\iota(\mathscr{D})$).

L'application $\gamma_0$ considérée est l'application composée entre le $\gamma_0$ classique et le choix du représentant continu dans la classe. La formule (29.91) que nous venons de prouver est valide pour l'application $\gamma_0$ vue comme

$$\gamma_0 \colon \iota\big(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)\big) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^{d-1}). \tag{29.92}$$

**Densité et conclusion** Ce que la majoration (29.91) prouve est la continuité de l'application

$$\gamma_0 \colon \big(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big) \to \big(H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), \|.\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}\big). \tag{29.93}$$

Mais la proposition 29.19 nous donne la densité de la partie $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. La proposition 18.112 nous donne alors une extension

$$\gamma_0 \colon \big(H^s(\mathbb{R}^d), \|.\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big) \to \big(H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), \|.\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}\big). \tag{29.94}$$

□

**Remarque 29.22.**
L'extension n'est pas évidente parce que les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont en général des classes de fonctions dont les valeurs sur le bord ne sont pas du tout fixées du fait que le bord soit de mesure nulle.

## 29.3 Théorème de plongement

L'objet des théorèmes de plongement de Sobolev est de montrer que si $s > \frac{d}{2} + k$ alors les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ possèdent des représentants de classe $C^k$. Avant de démontrer le théorème, pour alléger, nous allons donner deux lemmes.

**Lemme 29.23.**
*Soit $(u_j)$ une suite dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$u_j \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u \tag{29.95}$$

*avec $s > 0$. Alors nous avons aussi la convergence*

$$u_j \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} u. \tag{29.96}$$

*Démonstration.* Vu que $s > 0$ nous avons $(1 + k^2)^s > 1$ (ici nous écrivons $k^2$ pour $\|k\|^2$). Par conséquent

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\bar{\hat{v}}(1 + k^2)^s dk \geqslant \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\bar{\hat{v}} dk = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{29.97}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\|u_j - u\|_{L^2} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{u}_j - \hat{u}\|_{L^2} && (29.98a)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_j - \hat{u}|^2 && (29.98b)\\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_j - \hat{u}|^2 (1 + k^2)^s dk && (29.98c)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \|u_j - u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. && (29.98d)
\end{aligned}$$

□

**Lemme 29.24.**
*Soient des fonctions $u_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$u_j \xrightarrow{\left(C_0^0(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty\right)} v. \tag{29.99}$$

*Alors nous avons la convergence*

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_j \varphi \to \int_{\mathbb{R}^d} v\varphi \tag{29.100}$$

*pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

*Démonstration.* La suite $(u_j)$ est équibornée. En effet il existe une queue de suite pour laquelle $\|u_j - v\|_\infty < \epsilon$ ; cette queue de suite est alors équibornée par $\|v\|_\infty + \epsilon$. Le début de la suite est un nombre fini de fonctions, toutes bornées. Le maximum des bornes donne alors une borne.

Soit donc $M > 0$ tel que $|u_j(x)| < M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$. Nous avons alors $|u_j\varphi| < M|\varphi|$ pour tout $j$ et les fonctions $|u_j\varphi|$ sont majorées par la fonction $M|\varphi|$ qui est intégrable. Nous pouvons donc utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 13.134 nous donne

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_j\varphi = \int_{\mathbb{R}^d} v\varphi. \tag{29.101}$$

□

Nous pouvons écrire la conclusion du lemme 29.24 sous la forme

$$\langle u_j, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to \langle v, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{29.102}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ (et non pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$).

**Théorème 29.25** (Théorème de Sobolev avec $k = 0$[310])**.**
*Soit $s > \frac{d}{2}$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $u$ possède un représentant dans $C^0_0(\mathbb{R}^d)$ (les fonctions continues et qui s'annulent à l'infini). Nous écrivons cela $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^0_0(\mathbb{R}^d)$.*

*Démonstration.* Nous commençons par supposer que $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et dans ce cas nous notons $u$ le représentant dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous allons prouver l'inégalité

$$\|u\|_\infty \leqslant c\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{29.103}$$

La formule d'inversion de Fourier 27.20 appliquée à $u_j$ donne

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \hat{u}(k) dk, \tag{29.104}$$

nous avons alors

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d |u(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(k)| dk && (29.105a)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (1+k)^{s/2} |\hat{u}(k)| (1+k^2)^{-s+2} dk && (29.105b)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\Big(|\hat{u}(k)|^2 (1+k^2)^s\Big)^{1/2}}_{f} \underbrace{\Big((1+k^2)^{-s}\Big)^{1/2}}_{g} dk && (29.105c)\\
&= \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. && (29.105d)
\end{aligned}$$

Ici il convient nous arrêter un instant pour nous convaincre que $f$ et $g$ sont réellement des éléments de $L^2$. En ce qui concerne $f$, c'est facile : $\hat{u}$ est une fonction Schwartz. En ce qui concerne $g$ il faut l'intégrabilité de $|g|^2$, c'est à dire de $k \mapsto (1+k^2)^{-s}$. Cela a lieu si et seulement si $2s > n$ et donc a lieu dans les hypothèses du théorème. Nous utilisons le théorème de Cauchy-Schwarz [7] pour continuer :

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d |u(x)| &\leqslant \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} && (29.106a)\\
&= c \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(k)|^2 (1+k^2)^s dk \right)^{1/2} && (29.106b)\\
&= c\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. && (29.106c)
\end{aligned}$$

Donc en introduisant le facteur $(2\pi)^d$ dans la constante $c$ nous avons

$$\|u\|_\infty \leqslant c\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{29.107}$$

Cela est tout ce que nous voulions faire avec $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nous considérons maintenant $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Vu que la densité des fonctions Schwartz dans $H^s$ (proposition 29.17) nous considérons une suite $(u_j)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u \tag{29.108}$$

Ici $u$ est une classe, mais nous identifions $u_j$ avec sa classe (parce qu'il ne faut pas exagérer non plus). La suite $(u_j)$ est de Cauchy dans $H^s$, donc si $\epsilon > 0$ est donné, il existe $N$ tel que si $n, m > N$, $\|u_m - u_n\| \leqslant \epsilon$. Nous avons alors aussi

$$\|u_m - u_n\|_\infty \leqslant c\epsilon, \tag{29.109}$$

ce qui signifie que $(u_j)$ est également une suite de Cauchy dans $\big(C^0(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty\big)$ qui est un espace complet par la proposition 12.299.

7. Formule 9.94.

Il existe donc une fonction $v \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \overset{\left(C_0^0(\mathbb{R}^d),\|.\|_\infty\right)}{\longrightarrow} v. \tag{29.110}$$

La question est de savoir si nous pouvons déduire que $v$ est un représentant de $u$.

Par le lemme 29.23 nous avons également la convergence

$$u_j \overset{L^2(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} u. \tag{29.111}$$

Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons alors

$$\langle u_j, \varphi\rangle_{L^2} \to \langle u, \varphi\rangle_{L^2}. \tag{29.112}$$

Mais en même temps, la convergence (29.110) couplée au lemme 29.24 donne également

$$\langle u_j, \varphi\rangle_{L^2} \to \langle v, \varphi\rangle_{L^2}. \tag{29.113}$$

Par unicité de la limite (dans $\mathbb{R}$) nous avons

$$\langle v, \varphi\rangle_{L^2} = \langle u, \varphi\rangle_{L^2} \tag{29.114}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. La proposition 24.1 appliquée à $u - v$ montre alors que $u - v = 0$ presque partout, c'est à dire que $v$ est bien un représentant de $u$.

Le représentant $v$ de $u$ est non seulement continu (comme limite uniforme de fonction continues), mais également bornée, comme limite uniforme de fonctions Schwartz. □

**Proposition 29.26** ([310])**.**
*Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ ($s \in \mathbb{R}$) alors*

*(1) $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$,*

*(2) l'application*

$$\partial^\alpha \colon H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d) \tag{29.115}$$

*est continue.*

Note : ici $\partial$ est l'opération de dérivée faible.

*Démonstration.* Nous allons seulement prouver que $\partial_j \colon H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ est bien définie[8] et continue. Par composition, la thèse suivra.

Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ par le lemme 29.12 nous avons

$$\widehat{\partial_j u} = i\xi_j \hat{u}. \tag{29.116}$$

D'autre part, la fonction

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x_i}{1 + \|x\|^2} \end{aligned} \tag{29.117}$$

est bornée (et même indépendamment de $i$) par une constante $K$. Donc nous avons pour tout[9] $s$ :

$$k_i(1 + \|k\|^2)^{-s} < K(1 + \|k\|^2)^{-s+1}. \tag{29.118}$$

8. Au sens où l'espace d'arrivée est bien celui-là.

9. Question : dans [310], il faut dépendre cette constante de $s$. Je ne comprends pas pourquoi.

Avec cela nous pouvons calculer un peu : si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, nous avons

$$\|\partial_j u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\partial_j u}|(1+k^2)^{s-1}dk \tag{29.119a}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} k_j|\hat{u}|(1+k^2)^{s-1}dk \tag{29.119b}$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} K|\hat{u}|(1+k^2)^{s}dk \tag{29.119c}$$
$$= K\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{29.119d}$$

Nous avons donc que $\|\partial_j u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d)}$ est fini lorsque $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

La majoration $\|\partial_j u\| \leqslant K\|u\|$ donne la majoration suivante pour la norme de l'opérateur $\partial_j$ :

$$\|\partial_j\| = \sup_{\|u\|_{H^s}=1} \|\partial_j u\|_{H^{s-1}} \leqslant K. \tag{29.120}$$

Le fait d'être borné implique d'être continu par la proposition 10.18. □

**Théorème 29.27** (Théorème de plongement de Sobolev [310])**.**
*Soit $k \in \mathbb{N}$ et $m > \frac{d}{2} + k$. Alors*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0^k(\mathbb{R}^d). \tag{29.121}$$

Remarques :
— L'espace $C_0^k(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions de classe $C^k$ qui s'annulent à l'infini.
— L'inclusion (29.121) signifie que tout élément dans $H^s$ possède un représentant dans $C_0^k(\mathbb{R}^d)$.

*Démonstration.* Pour $k = 0$, c'est le théorème 29.25. Si $|\alpha| < k$ nous savons que $\partial^\alpha u \in H^{s-k} \subset C_0^0(\mathbb{R}^d)$. Cela signifie que les dérivées faibles sont continues, mais pas qu'il existe un représentant qui est réellement $k$ fois continument dérivable.

Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et une suite $(u_j)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u. \tag{29.122}$$

Vu que l'espace topologique $\big(C_0^k(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty\big)$ est complet il existe $v \in C_0^k$ tel que

$$u_j \xrightarrow{C_0^k} v. \tag{29.123}$$

Il reste à montrer que $v$ est un représentant de $u$. Cela se fait comme plus haut en montrant que $u_j \xrightarrow{L^2} u$. □

# Chapitre 30

# Équations différentielles ordinaires

Une équation différentielle ordinaire est la recherche de toutes les fonctions définie sur une partie de $\mathbb{R}$ satisfaisant à une certaine égalité, faisant intervenir les dérivées de la fonction recherchée.

Dans la suite, $I$ désignera un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction sera **dérivable sur** $I$ si elle est dérivable au sens usuel sur l'intérieur de $I$, et si elle est dérivable à droite (resp. à gauche) sur l'éventuel bord gauche (resp. droit) de $I$.

**Définition 30.1.**
*Une* ***équation différentielle ordinaire d'ordre*** $n$ ***sur*** $I$ *est la recherche d'une fonction* $y : I \to \mathbb{R}$ *dérivable* $n$ *fois, satisfaisant à une équation du type*

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{n\prime}(t)) = 0 \quad \textit{pour tout } t \in I \tag{30.1}$$

*où* $I$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $F : (I \times D) \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}) \to \mathbb{R}$ *est une fonction donnée.*

**Remarque 30.2.**
L'équation différentielle (30.1) sera raccourcie sous la forme

$$F(t, y, y', \dots, y^{n\prime}) = 0 \tag{30.2}$$

où la dépendance en $t$ est sous-entendue.

**Exemple 30.3**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue fixée. L'équation différentielle

$$y' = f(t) \tag{30.3}$$

se ramène à la recherche des primitives de $f$ sur l'intervalle $I$. △

Le lemme suivant sert de temps en temps.

**Lemme 30.4** (Lemme de Grönwall)**.**
*Soient* $\phi$ *et* $\psi$ *deux fonctions telles que pour tout* $t \in [t_0, t_1]$, $\phi(t) \geqslant 0$, $\psi(t) \geqslant 0$ *et*

$$\phi(t) \leqslant K + L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds \tag{30.4}$$

*où* $K$ *et* $L$ *sont des constantes positives. Alors*

$$\phi(t) \leqslant K \exp\big(L \int_{t_0}^{t} \psi\big). \tag{30.5}$$

**Lemme 30.5** (Lemme de Grönwall[311])**.**
*Si* $u, a, b \in C^0\big([0, T], \mathbb{R}^+\big)$ *sont telles que*

$$u(t) \leqslant b(t) + \int_0^t a(s)u(s)ds \tag{30.6}$$

*pour tout $t \in [0,T]$ alors pour tout $t \in [0,T]$ nous avons aussi*

$$u(t) \leqslant b(t) + \int_0^t b(s)a(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds. \tag{30.7}$$

## 30.1 Équation homogène, solution particulière

Voici un petit morceau d'algèbre linéaire. Soient des espaces vectoriels $V$ et $W$ ainsi qu'une application linéaire $D\colon V \to W$. Nous voulons résoudre $D(u) = v$, c'est à dire déterminer l'ensemble

$$D^{-1}(v) = \{u \in V \text{ tel que } Du = v\}. \tag{30.8}$$

**Lemme 30.6.**
*Soient des espaces vectoriels $V$ et $W$ ainsi qu'une application linéaire $D\colon V \to W$. Si $u_P \in V$ satisfait à $Du_P = v$ alors*

$$D^{-1}(v) = \ker(D) + u_P. \tag{30.9}$$

*Démonstration.* Si $u \in \ker(D) + u_p$ alors $u = k + u_p$ avec $Dk = 0$, ce qui donne tout de suite $Du = Dk + Du_P = v$. Donc $u \in D^{-1}(v)$.

Dans l'autre sens, si $u \in D^{-1}(v)$ alors nous pouvons écrire $u = (u - u_P) + u_P$. Vu que $u - u_P \in \ker(D)$ nous avons bien $u \in \ker(D) + u_P$. □

Ce petit lemme explique pourquoi la résolution d'équation différentielles passe par le principe «générale de l'homogène plus particulière de la non-homogène». Cela marche autant pour les équations différentielles ordinaires que pour celles aux dérivées partielles.

**Exemple 30.7**
Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$y' - y = 4. \tag{30.10}$$

L'opérateur dont nous parlons est par exemple

$$D\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) y \mapsto y' - y. \tag{30.11}$$

Nous devons résoudre $Dy = 4$ où «4» est l'élément fonction constante égale à 4 dans $C^\infty(\mathbb{R})$. L'ensemble $\ker(D)$ sont les éléments $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ tels que $y' = y$ :

$$\ker(D) = \{t \mapsto Ke^t \text{ tel que } K \in \mathbb{R}\}. \tag{30.12}$$

Nous devons trouver un élément quelconque $y_P$ de $D^{-1}(4)$. Facile : $y_P(t) = -4$.

Au final,

$$D^{-1}(4) = \{t \mapsto Ke^t - 4 \text{ tel que } K \in \mathbb{R}\}. \tag{30.13}$$

△

Dans cet exemple nous avons pris $V = W = C^\infty(\mathbb{R})$. Mais souvent nous sommes amenés à considérer des espaces plus subtils, parce qu'il existe simplement pas de solutions dans $C^\infty$, ou alors parce que beaucoup de solutions n'y sont pas.

## 30.2 Que faire avec $f(z)dz = g(t)dt$ ?

Dans de nombreux exercices d'équations différentielles, nous tombons sur $u' = f(t)$, et nous faisons formellement

$$\frac{du}{dt} = f(t) \quad \Rightarrow \quad du = f(t)dt, \tag{30.14}$$

et ensuite, il y a la formule un peu magique

$$u - u_0 = \int_{t_0}^{t} f(t)dt. \tag{30.15}$$

Voyons ce qu'il en est. Tout d'abord, il faut comprendre ce que signifie la formule

$$f(z)dz = g(t)dt. \tag{30.16}$$

Il s'agit d'une égalité entre deux formes différentielles sur $\mathbb{R}$ où $z$ est une fonction de $t$. Étant donné que $z$ est une fonction de $t$, il faut voir $dz$ comme la différentielle de cette fonction. La différentielle d'une fonction à une variable est donné par la dérivée :

$$dz_t = z'(t)dt \tag{30.17}$$

Écrire l'équation (30.16) pour chaque $t$ revient donc à écrire

$$f\big(z(t)\big)z'(t)dt = g(t)dt \tag{30.18}$$

Cela est une égalité entre deux formes différentielles. Nous avons donc égalité entre les intégrales des formes sur un chemin. Prenons un chemin tout simple de $t_0$ vers $t$ :

$$\int_{t_0}^{t} f\big(z(t)\big)z'(t)dt = \int_{t_0}^{t} g(t)dt. \tag{30.19}$$

Dans le premier membre, nous faisons un changement de variable $\xi = z(t)$, $d\xi = z'(t)dt$, et nous obtenons

$$\int_{z_0}^{z(t)} f(\xi)d\xi = \int_{t_0}^{t} g(t)dt. \tag{30.20}$$

où nous avons remplacé la constante $z(t_0)$ par $z_0$ dans la borne d'intégration. Si $F$ est une primitive de $f$ et $G$ une primitive de $g$, nous avons

$$F(z) - F(z_0) = G(t) - G(t_0). \tag{30.21}$$

Si aucun problème de Cauchy n'est donné, les constantes $F(z_0)$ et $G(t_0)$ sont mises en une seule et nous écrivons la solution

$$F\big(z(t)\big) = G(t) + C, \tag{30.22}$$

qui est une équation implicite pour $z(t)$.

Nous trouvons assez souvent le cas simple

$$f(z)dz = dt. \tag{30.23}$$

En remplaçant $g(t) = 1$ dans (30.20), nous trouvons la fameuse

$$t - t_0 = \int_{z_0}^{z} f(z)dz, \tag{30.24}$$

dans laquelle il y a un abus de notation terrible entre le $z$ de la borne (que les étudiants oublient souvent) et la variable d'intégration $z$ ! !

Le passage de (30.23) à (30.24) sera très souvent utilisé dans le cours de mécanique par exemple.

## 30.3 Équations linéaires du premier ordre

Une **équation différentielle linéaire** est une équation de la forme

$$y' + u(t)y = v(t). \tag{30.25}$$

**Exemple 30.8**
Tant qu'il n'y a pas de second membre, c'est facile. Prenons l'exemple suivant :

$$y' + 2ty = 0. \tag{30.26}$$

Nous mettons tous les $t$ d'un côté et tous les $y$ et $y'$ de l'autre :

$$\frac{y'}{y} = -2t, \tag{30.27}$$

et puis on intègre sans oublier la constante d'intégration :

$$\ln(y) = -t^2 + C, \tag{30.28}$$

et donc $y(t) = Ke^{-t^2}$. △

**Exemple 30.9**

Lorsqu'il y a un second membre, il y a une astuce. Prenons par exemple

$$y' + 2ty = 4t. \tag{30.29}$$

L'astuce est de commencer par résoudre l'équation sans le second membre (l'équation homogène associée). Nous notons $y_H$ la solution. Ici, la réponse est

$$y_H(t) = Ke^{-t^2}. \tag{30.30}$$

Ensuite le truc est d'essayer de trouver la solution de l'équation (30.29) sous la forme

$$y(t) = K(t)e^{t^2}. \tag{30.31}$$

L'idée est de prendre la même que la solution de l'équation homogène (sans second membre), mais en disant que $K$ est une fonction. Afin de trouver la fonction $K$ qui donne la solution, il suffit de remettre l'essai (30.31) dans l'équation (30.29) :

$$\underbrace{K'e^{-t^2} - 2tKe^{-t^2}}_{y'(t)} + \underbrace{2tKe^{-t^2}}_{2ty(t)} = 4t \tag{30.32}$$

Les deux termes avec $K$ se simplifient et il reste

$$K'(t) = 4te^{t^2}, \tag{30.33}$$

ce qui signifie $K(t) = 2e^{t^2+C}$. Nous avons donc déterminé la fonction qui fait fonctionner l'essai, et la solution à l'équation est

$$y(t) = \big(2e^{t^2} + C\big)e^{-t^2} = 2 + Ce^{-t^2}. \tag{30.34}$$

△

La technique pour résoudre cette équation est de commencer par résoudre l'équation homogène associée. Si $U(t)$ est une primitive de $u(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} y'_H(t) + u(t)y_H(t) &= 0 \\ \frac{y'_H}{y_H} &= -u(t) \\ \ln(y_H) &= -U(t) + C \\ y_H(t) &= e^{-U(t)+C} = Ke^{-U(t)} \end{aligned} \tag{30.35}$$

où $K = e^C$.

Cela fournit la solution générale de l'équation homogène. Il existe un truc génial qui permet d'en tirer la solution générale du système non homogène. Lorsque nous avons trouvé $y_H(t) = Ke^{-U(t)}$, le symbole $K$ désigne une constante. La méthode de **variation des constantes** consiste à essayer la solution

$$y(t) = K(t)e^{-U(t)}, \tag{30.36}$$

c'est à dire à dire que la constante est en réalité une fonction. Afin de trouver quelle fonction $K(t)$ fait en sorte que l'essai (30.36) soit une solution, nous la remplaçons dans l'équation de départ $y' + uy = v$. Maintenant,

$$y'(t) = K'(t)e^{-U(t)} - K(t)u(t)e^{-U(t)}. \tag{30.37}$$

En remettant dans l'équation,

$$y' + uy = K'e^{-U} - Kue^{-U} + uKe^{-U} = K'e^{-U} = v. \tag{30.38}$$

Notez que les termes en $K$ se sont miraculeusement simplifiés. Cela est directement dû au fait que $e^{-U}$ est solution de l'équation homogène. Nous restons avec l'équation

$$K' = \frac{v}{e^{-U}} \tag{30.39}$$

pour $K(t)$. La solution générale du problème non homogène est donc finalement donnée par

$$y(t) = \big(W(t) + C\big)e^{-U(t)} \tag{30.40}$$

si $W(t)$ est une primitive de $v(t)e^{U(t)}$.

Tout ceci est un peu heuristique. La proposition suivante dit dans quels cas ça fonctionne.

**Proposition 30.10.**
*Soient $u$ et $v$ continues sur $I$ et $U$, une primitive de $u$ sur $I$ et $W$ une primitive de $ve^{-U}$ sur $I$. Une fonction $y\colon I \to \mathbb{R}$ est solution de $y' + u(t)y = v(t)$ si et seulement s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que*

$$y(t) = \big(W(t) + C\big)e^{U(t)} \tag{30.41}$$

*pour tout $t \in I$.*

### 30.3.1 Pourquoi la variation des constantes fonctionne toujours ?

Prenons une équation non homogène

$$z'(t) = f(t)z(t) + g(t), \tag{30.42}$$

et supposons avoir une solution de l'homogène associée sous la forme $z_H(t) = Ch(t)$. Le coup de la variation des constates consiste à essayer une solution pour l'équation non homogène sous la forme [1]

$$z(t) = K(t)h(t). \tag{30.43}$$

1. Je ne sais plus qui a eu l'idée de changer le nom de la constante de $C$ vers $K$ au moment de la transformer en fonction, mais c'est une bonne idée.

Nous injectons cette solution dans l'équation de départ en utilisant le fait que $z'(t) = K'(t)h(t) + K(t)h'(t)$ :

$$K'(t)h(t) + K(t)h'(t) = f(t)K(t)h(t) + g(t). \tag{30.44}$$

Le terme $K(t)h'(t)$ se récrit en utilisant la propriété de définition de $h$, c'est à dire que $h'(t) = f(t)h(t)$. Nous voyons que les termes ne contenant pas de $K'$ se simplifient ; il reste

$$K'h = g. \tag{30.45}$$

Cette équation a comme solution

$$K = \int \frac{f}{h} + C. \tag{30.46}$$

J'insiste sur la constante d'intégration ! En réalité, celles et ceux qui auront compris l'équation (30.24) sauront que $K$ est donné par

$$K(t) = \int_{\xi_0}^{t} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} d\xi \tag{30.47}$$

où $\xi_0$ joue le rôle de la constante d'intégration.

Quoi qu'il en soit, la solution générale de l'équation non homogène est

$$z(t) = K(t)h(t) = \left( \int \frac{g}{h} + C \right) h. \tag{30.48}$$

Cette solution comprend deux termes : $Ch$ qui est solution de l'homogène, et $\left(\int \frac{g}{h}\right) h$ qui est une particulière de l'équation non homogène.

Quelques conclusions :

(1) Si vous avez encore du $K$ (et pas que du $K'$) dans votre équation qui donne $K$, c'est que vous n'être pas dans le cadre d'une équation de type (30.42). Le plus souvent, c'est que vous avez fait une faute de calcul quelque part.

(2) La méthode des variations des constantes n'est pas en contradiction avec le principe de « SGEH+SPENH ». En effet, la SGEP et la SPENH sont toutes deux dans la solution (30.48).

(3) La variation des constantes peut être vue comme une façon cool de trouver une solution particulière de l'équation non homogène.

(4) La simplification ne se fait que après avoir remplacé $Kh'$ par $Kfh$, c'est à dire après avoir utilisé le fait que $z_H$ est solution de l'homogène. Sinon, la simplification n'est pas du tout évidente a priori. Il se peut même que, visuellement, les termes $Kh'$ et $Kfh$ ne se ressemblent pas du tout. Un exemple de cela arrivera par exemple dans l'exemple 30.13, pour arriver à l'équation (30.64).

## 30.4 Équations à variables séparées

Une **équation à variables séparées** est une équation de la forme

$$y' = u(t)f(y) \tag{30.49}$$

où $u\colon I \to \mathbb{R}$ et $f\colon J \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues données. Les propositions 30.11 et 30.12 résolvent ce cas, mais avant de voir cela, nous allons donner quelque indication «pratiques».

### 30.4.1 La méthode rapide

On peut évidement mettre tous les $y$ et $y'$ d'un côté :

$$\frac{y'}{f(y)} = u(x). \tag{30.50}$$

Une fois que cela est fait, on écrit $y' = \frac{dy}{dx}$, et on envoie le $dx$ du côté des $x$ :

$$\frac{dy}{f(y)} = u(x)dx. \tag{30.51}$$

Maintenant il suffit de prendre l'intégrale des deux côtés : comme la position des $dx$ et $dy$ l'indiquent, il faut intégrer par rapport à $y$ d'un côté et par rapport à $dx$ de l'autre côté.

L'intégrale à gauche est facile : c'est $\ln(y)$. À droite, par contre, ça dépend tout à fait de $u$.

### 30.4.2 La méthode plus propre

$$y'(t) = u(t)f\big(y(t)\big). \tag{30.52}$$

Nous considérons $U$, une primitive de $u$ sut $I$ et $G$, une primitive de $1/f$ sur $J$. Si $I' \subseteq I$ et $y\colon I' \to J$, alors $y$ est solution de (30.49) si et seulement s'il existe une constante $C$ telle que

$$G\big(y(t)\big) = U(t) + C. \tag{30.53}$$

La recherche des solutions de l'équation différentielle se ramène donc à la recherche de primitives et de solutions d'une équation algébrique (il faut isoler $y(t)$ dans (30.53)). Réciproquement toute solution régulière de cette dernière relation est solution de l'équation différentielle.

Remarque : lorsque nous cherchons $U$ et $G$, nous ne cherchons que *une* primitive. Il ne faut pas considérer des constantes d'intégration à ce niveau.

### 30.4.3 Les théorèmes

**Proposition 30.11.**
*Nous considérons l'équation* (30.49) *avec $u(t)$ continue sur $I$ et $f$ continue sur $J$ avec $f(\eta) \neq 0$ pour tout $\eta \in J$. Soit $U$, une primitive de $u$ sur $I$, et $G$, une primitive de $1/f$ sur $J$.*

*Si $y\colon Y' \to J$ est une fonction sur un intervalle $I' \subset I$, alors $y$ est solution de l'équation* (30.49) *si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que*

$$G\big(y(t)\big) = U(t) + C. \tag{30.54}$$

Cette proposition dit que toutes les solutions qui ne s'annulent jamais sur un intervalle ont la forme $G\big(y(t)\big) = U(t) + C$ et peuvent donc être trouvées en calculant des primitives.

La formule (30.54) peut être obtenue de la façon heuristique suivante, en écrivant $y' = dy/dt$, et en passant le $dt$ à droite. Nous trouvons successivement

$$\begin{aligned} y' &= u(t)f(y) \\ dy &= u(t)f(y)dt \\ \frac{dy}{f(y)} &= u(t)dt \\ \int \frac{dy}{f(y)} &= \int u(t)dt \\ G(y) &= U(t) + C. \end{aligned} \tag{30.55}$$

**Proposition 30.12.**
*Soient $u$ continue sur $I$ et $f$ continue sur $J$, et $f(\eta) \neq 0$ sur $J$. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in J$. Alors il existe $I' \subset I$ avec $t_0 \in I'$ et $f \in C^1(I' \to J)$ tels que*

*(1) $y$ est solution de* (30.49) *sur $I'$ et vérifie $y(t_0) = y_0$,*

*(2) si $z$ est une solution de* (30.49) *sur $I'' \subset I'$ avec $t_0 \in I''$ et $z(t_0) = y_0$, alors $I'' \subset I'$ et $z(t) = y(t)$ pour tout $t \in I''$.*

**Exemple 30.13**
Résoudre l'équation différentielle

$$y - \cos(t)y' = \cos(t)\big(1 - \sin(t)\big)y^2. \tag{30.56}$$

La fonction $y = 0$ est solution. En posant $z = 1/y$, nous trouvons l'équation

$$z + \cos(t)z' = \cos(t)\big(1 - \sin(t)\big) \tag{30.57}$$

à laquelle $z$ doit satisfaire. L'équation homogène est

$$z'_H = -\frac{z_H}{\cos(t)}. \tag{30.58}$$

Ceci est une équation à variables séparées que nous résolvons en suivant les méthodes données plus haut : nous posons

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\cos(t)}, \\ f(z) &= -z, \\ U(t) &= \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right] \quad \text{(voir formulaire)}, \\ G(z) &= \ln\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned} \tag{30.59}$$

La solution $z_H$ est donnée par l'équation

$$\ln\left(\frac{1}{z}\right) = \ln\left[K\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right], \tag{30.60}$$

c'est à dire

$$z_H(t) = \frac{K}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)}. \tag{30.61}$$

Nous appliquons maintenant la méthode de variation des constantes sur cette solution afin de trouver la solution générale de l'équation (30.57). En utilisant la règle de Leibnitz, $z' = K'z_H + Kz'_H$, nous trouvons

$$\frac{K}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)} + \cos(t)\left(\frac{K'}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)} - \frac{K}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)}\right) = \cos(t)\big(1 - \sin(t)\big). \tag{30.62}$$

Malgré leurs apparences, les deux termes en $K$ se simplifient. En effet, en vertu de l'équation $z'_H = \frac{-z_H}{\cos(t)}$, nous avons

$$\frac{-K}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)} = \frac{-K}{\cos(t)\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)}. \tag{30.63}$$

Le travail de voir quel est le lien entre $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)$ et $\cos(t)$ est en réalité fait dans votre formulaire au moment où vous l'avez utilisé pour intégrer $u$ pour obtenir le $U(t)$ de (30.59).

Après cette simplification durement méritée, nous trouvons l'équation suivante pour $K(t)$ :

$$\frac{K'}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)} = 1 - \sin(t). \tag{30.64}$$

Résoudre cela revient à trouver la primitive de

$$\big(1 - \sin(t)\big)\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right), \tag{30.65}$$

ce qui est relativement compliqué. La réponse est

$$\begin{aligned} K(t) = \ln\left(\sin\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right)+1\right) + \ln\left(\sin\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right)-1\right) \\ + 2\,\ln\sec\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right) + 2\,\sin^2\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right) \end{aligned} \tag{30.66}$$

Nous pouvons un peu simplifier en utilisant le fait que $\ln(a+b)+\ln(a-b)=\ln(a^2-b^2)$ :

$$K(t) = \ln\left(-\cos^2\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right)\right) + 2\,\ln\sec\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right) + 2\,\sin^2\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right). \tag{30.67}$$

Il me semble toutefois qu'il faudrait prendre des valeurs absolues pour les logarithmes.

△

## 30.5 Équations linéaires d'ordre supérieur

### 30.5.1 Équations et systèmes linéaire à coefficients constants

Nous regardons l'équation

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = v(t) \tag{30.68}$$

où les coefficients $a_k$ sont maintenant des constantes. Il faut commencer par résoudre le polynôme caractéristique

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{30.69}$$

Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ sont les solutions avec multiplicité $\mu_1,\ldots,\mu_k$, alors le **système fondamental** de solutions linéairement indépendantes est l'ensemble suivant de solutions à l'équation homogène :

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{\mu_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ & \vdots \\ & e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{\mu_k-1}e^{\lambda_k t}. \end{aligned} \tag{30.70}$$

Nous notons $y_i$ ces solutions. La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par

$$y_H = \sum_i c_i y_i. \tag{30.71}$$

Afin de trouver la solution générale de l'équation non homogène, nous appliquons la méthode de variation des constantes, en imposant les $n-1$ conditions

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i^{(l)}(t) = 0 \tag{30.72}$$

avec $l=0,\ldots,n-2$. Ces condition plus l'équation de départ (30.68) forment un système de $n$ équations différentielles pour les $n$ fonctions inconnues $c_i(t)$.

Cette condition peut paraître mystérieuse. Il est cependant encore possible de travailler sans poser la condition (30.72) en suivant la recette, en calculant des déterminants de Wronskien. Des exemples sont donnés dans les exercices sur le second ordre.

### 30.5.2 Si les coefficients ne sont pas constants ?

Une équation différentielle linéaire d'ordre $n$ sur $I$ est une équation de la forme

$$y^{(n)} + u_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + u_{n-1}(t)y' + u_n(t)y = v(t) \tag{30.73}$$

où $v$ et $u_k$ sont des fonctions continues fixées de $I$ vers $\mathbb{R}$.

Pour résoudre cette équation, il faut commencer par résoudre l'équation homogène correspondante (c'est à dire celle que l'on obtient en posant $v(t) = 0$). Ensuite, nous trouvons la solution de l'équation (30.73) en appliquant la méthode de la **variation des constantes**.

Donnons un exemple du pourquoi la méthode de variations des constantes est efficace. Soit l'équation

$$u' + f(t)u = g(t), \tag{30.74}$$

et disons que $u_H$ est une solution de l'équation homogène. La méthode de variations des constantes consiste à poser $u(t) = K(t)u_H(t)$, et donc $u'(t) = K'u_H + Ku'_H$. En remettant dans l'équation de départ,

$$K'u_H + Ku'_H + fKu_H = g. \tag{30.75}$$

La somme $Ku'_H + fKu_H$ est nulle, par définition de $u_H$. Par conséquent, il ne reste que

$$K' = \frac{g(t)}{u_H}. \tag{30.76}$$

Lorsqu'on utilise la méthode de variation des constantes, nous trouvons toujours une simplification « miraculeuse ».

Dans l'immédiat, nous ne considérons que le cas où les $u_i$ sont des constantes. Le cas où les $u_i$ deviennent des fonctions de $t$ sera vu plus tard.

## 30.6 Système d'équations linéaires

### 30.6.1 La magie de l'exponentielle...

Prenons l'équation différentielle très simple

$$y' = ay. \tag{30.77}$$

La solution est $y(t) = Ae^{at}$. Et si on a la donnée que Cauchy $y(t_0) = y_0$, alors

$$y(t) = Ae^{at}e^{-at_0}e^{at_0} = e^{a(t-t_0)}y(t_0). \tag{30.78}$$

Donc on a le facteur multiplicatif $e^{a(t-t_0)}$ qui sert à faire passer de $y(0)$ à $y(t)$. C'est un peu un opérateur d'évolution. Ce qui fait la magie de l'exponentielle, c'est son développement en série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{30.79}$$

qui est tel que chaque terme est la dérivée du terme suivant.

Maintenant, si on a un système

$$\bar{y}' = A\bar{y}, \tag{30.80}$$

il n'est pas du tout étonnant d'avoir comme solution $\bar{y}(t) = e^{At}$ où l'exponentielle de la matrice est définie exactement par la série (30.79). C'est un peu longuet, mais dans le cours, c'est effectivement ce qui est prouvé. La matrice résolvante $R(t, t_0)\colon \bar{y}_0 \to \bar{y}(t; t_0, y_0)$ est donné par

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}, \tag{30.81}$$

exactement comme dans l'équation (30.78).

### 30.6.2 ... mais la difficulté

Maintenant, il est suffisant de calculer des exponentielles de matrices pour résoudre des systèmes. Hélas, il est en général très difficile de calculer des exponentielles. Tu peux essayer de prouver les deux suivantes :

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow e^A = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \\ S = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow e^S = \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{30.82}$$

La première, tu vas la revoir si tu fais de la géométrie différentielle ou de la mécanique quantique : l'algèbre de Lie du groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 est l'algèbre des matrices antisymétriques.

La seconde se retrouve en relativité parce que $e^S$ est la matrice qui préserve $x^2-y^2$, tout comme $e^A$ préserve $x^2+y^2$. Quelque mots sur l'uutilisation des fonctions hyperboliques en relativité dans 39.4.8.1.

### 30.6.3 La recette

Afin d'éviter de devoir calculer explicitement des exponentielles de matrices, nous faisons appel à toutes sortes de trucs, dont la forme de Jordan. Le résultat final est la méthode suivante. Soit le système homogène

$$\bar{y}' = A\bar{y}. \tag{30.83}$$

1. D'abord, nous calculons les valeurs propres de $A$.
2. Ensuite les vecteurs propres.
3. Une bonne valeur propre, c'est une valeur propre dont l'espace propre a une dimension égale à sa multiplicité. C'est à dire que si $\lambda$ est de multiplicité $m$, alors on a, dans les bon cas, $m$ vecteur propres linéairement indépendants.

   Dans ce cas, si $v_1, \dots, v_m$ sont les vecteurs, alors on a les solutions linéairement indépendantes suivantes :

   $$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_1 \\ \vdots \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \dots, \begin{pmatrix} \vdots \\ v_m \\ \vdots \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \tag{30.84}$$

   Pour chaque bonne valeur propre, ça nous fait un tel paquet de solutions linéairement indépendantes.
4. Si $\lambda$ n'est pas une bonne valeur propre, alors les choses se compliquent. Mettons que $\lambda$ ait $k$ vecteurs propres en moins que sa multiplicité. Dans ce cas, il faut chercher des solutions sous la forme

   $$\begin{pmatrix} a_1^{(k)}t^k + \dots + a_1^{(0)} \\ \vdots \\ a_1^{(k)}t^k + \dots + a_n^{(0)} \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \tag{30.85}$$

   C'est à dire qu'on prend comme coefficient de $e^{\lambda t}$, un vecteur de polynômes de degré $k$. Il faut mettre cela dans l'équation de départ pour voir quelles sont les contraintes sur les constantes $a_i^{(j)}$ introduites.
5. Nous avons un cas particulier du cas précédent. Si $\lambda$ est une valeur propre de multiplicité $m$ qui n'a que un seul vecteur propre $v$, alors il faut chercher des polynômes de degré $m-1$, et on peut directement fixer le coefficient de $t^{m-1}$, ce sera l'unique vecteur propre :

   $$\left[ \begin{pmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^{(m-2)} \\ \vdots \\ a_n^{(m-2)} \end{pmatrix} t^{m-2} + \dots \right] e^{\lambda t}. \tag{30.86}$$

Cela économise quelques calculs par rapport à poser brutalement (30.85).

### 30.6.4 Système d'équations linéaires avec matrice constante

Nous considérons l'équation différentielle

$$y'(t) = Ay(t) \tag{30.87}$$

pour la fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $A$ est une matrice ne dépendant pas de $t$. Nous supposons que $A$ est diagonalisable pour les vecteurs propres $v_i$ et les valeurs propres $\lambda_i$ correspondantes.

La matrice

$$R(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}v_1 & \dots & e^{\lambda_n t}v_n \end{bmatrix} \tag{30.88}$$

est la **matrice résolvante** du système. Alors la solution du système (30.87) pour la condition initiale $y(0) = y_0$ est

$$y(t) = R(t)y_0. \tag{30.89}$$

En effet

$$AR(t) = \begin{bmatrix} A\begin{pmatrix}\uparrow\\ e^{\lambda_1 t}v_1\\ \downarrow\end{pmatrix} & \dots & A\begin{pmatrix}\uparrow\\ e^{\lambda_n t}v_n\\ \downarrow\end{pmatrix} \end{bmatrix} = R'(t). \tag{30.90}$$

Par conséquent $y'(t) = R'(t)y_0 = AR(t)y_0 = Ay(t)$.

### 30.6.5 Système d'équations linéaires avec matrice non constante

**Théorème 30.14.**
*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $M\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Si les composantes $M_{ij}$ sont des fonctions continues sur $I$ alors :*

*(1) pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in R^n$ le système*

$$y'(t) = M(t)y(t) \tag{30.91}$$

*admet une unique solution maximale définie sur $I$ telle que $y(t_0) = y_0$ ;*

*(2) l'ensemble des solutions de l'équation* (30.91) *sur $I$ est un espace vectoriel de dimension $n$.*

## 30.7 Réduction de l'ordre

Afin de diminuer l'ordre d'une équation dans laquelle le paramètre n'apparaît pas, il y a deux changements de variables très utiles. Le premier, le plus simple, est simplement de poser $z(t) = y'(t)$, ce qui donne $z'(t) = y''(t)$. Le second, *qui n'est pas le même*, est $z\big(y(t)\big) = y'(t)$, qui entraîne $y''(t) = z'\big(y(t)\big)z(t)$. Dans ce second cas, il faut également changer de variable, et utiliser $y(t)$ comme variable au lieu de $t$.

Si ça ne marche pas, il faut suivre la procédure ci-après.

Nous supposons avoir une équation différentielle d'ordre $p$ dans laquelle $y^{(p)}$ est isolée des autres dérivées :

$$y^{(p)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)\big) \tag{30.92}$$

où $f$ est une fonction $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, et la fonction cherchée est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La méthode proposée ici consiste à transformer cette équation d'ordre $p$ en un système d'équations d'ordre 1. Pour cela nous posons

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^p \\ (t, x) &\mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_p \\ f(t, x_1, \dots, x_p) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{30.93}$$

Nous considérons alors l'équation différentielle

$$Y'(t) = F\big(t, Y(t)\big). \tag{30.94}$$

pour $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$. La fonction $y = Y_1$ résout l'équation (30.92) si et seulement si la fonction $Y$ résout l'équation (30.94).

De plus si l'équation (30.92) est donnée avec les conditions initiales $y^{(k)} = a_k$ $(k = 0, \dots, p-1)$ alors l'équation (30.94) vient avec les conditions initiales

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}, \tag{30.95}$$

c'est à dire $Y(t_0) = A_0$ avec $A_0 \in \mathbb{R}^p$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37 nous donne existence et unicité locale de la solution au système 30.94. Lorsque le système est linéaire, c'est à dire sous la forme $Y'(t) = M(t)Y(t)$, alors il y a mieux : le théorème 30.14.

**Exemple 30.15**

Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u''(t) - u(t) = 1 & \text{(30.96a)} \\ u(0) = a_0 \in \mathbb{R} & \text{(30.96b)} \\ u'(0) = a_1 \in \mathbb{R}, & \text{(30.96c)} \end{cases}$$

et nous voulons montrer que ce système accepte une unique solution. Vu que l'équation différentielle se présente sous la forme $u'' = f(t, u)$ avec $f(t, u) = -1 - u$ nous posons

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -1 - x_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{30.97}$$

et nous considérons l'équation différentielle

$$Y' = F(t, Y) \tag{30.98}$$

pour la fonction $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. La fonction $F$ est Lipschitz (et même globalement) par rapport à $Y$. En effet,

$$\|F(x) - F(y)\| = (x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2 = \|x - y\|^2. \tag{30.99}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37 s'applique et en posant $Y_0 = (a_0, a_1)$, il existe une unique solution à l'équation $Y' = F(t, Y)$ vérifiant $Y(0) = Y_0$. Nous notons $t \mapsto Y(t)$ cette solution.

En quoi cela nous aide ? Nous posons $u(t) = Y_1(t)$. Alors

$$u'(t) = Y_1'(t) = F_1'(t, Y) = Y_2(t). \tag{30.100}$$

En dérivant encore,

$$u''(t) = Y_2'(t) = F_2'(t, Y) = -1 - Y_1(t) = -1 - u(t), \tag{30.101}$$

ce qu'il fallait. La fonction $t \mapsto Y_1(t)$ est solution de notre équation de départ. Quid des conditions initiales ? Vu que $u = Y_1$ et $u' = Y_2$ nous avons

$$u(0) = Y_1(0) = a \tag{30.102}$$

et

$$u'(0) = Y_2(0) = b. \tag{30.103}$$

Toutes les prescriptions sont respectées.

Si vous voulez vraiment résoudre cette équation, il faudra plus de travail. D'abord résoudre l'équation homogène associée, c'est à dire l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, ce qui va donner

$$u_H(t) = Ae^{it} + Be^{-it}, \tag{30.104}$$

et ensuite faire le coup de la variation des constantes pour déterminer la solution générale du problème non homogène. △

**Exemple 30.16**
Nous reprenons l'équation différentielle

$$-u''(t) - u(t) = 1. \tag{30.105}$$

Nous avons déjà vu dans l'exemple 30.15 que cette équation avait une solution unique pour toute condition initiale. Cette fois nous voulons étudier les solutions lorsque nous imposons les conditions aux limites $u(0) = u(\pi) = 0$. Nous allons voir qu'il n'y a pas de telles solutions.

Pour ce faire, soit une solution $u$. D'abord $u''$ existant, la fonction $u$ est de classe au moins $C^1$. Mais $u'' = -1 - u$, donc $u''$ est également $C^1$, ce qui donne la régularité $C^3$ pour $u$. En continuant ainsi nous trouvons que $u$ est de classe $C^\infty$.

Le truc est de considérer a fonction $v(t) = \sin(t)$ qui vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} -v'' - v = 0 & \text{(30.106a)} \\ v(0) = 0 & \text{(30.106b)} \\ v'(0) = 0. & \text{(30.106c)} \end{cases}$$

Nous calculons le produit scalaire sur $L^2\big(]0, \pi[\big)$ de (30.105) avec $v$ :

$$\langle u'', v\rangle + \langle u, v\rangle = -\langle v, 1\rangle. \tag{30.107}$$

Le calcul de $\langle v, 1\rangle$ est simplement l'intégrale de $\sin(t)$ pour $t$ allant de 0 à $\pi$, c'est à dire $\langle v, 1\rangle = 2$. Vu que $u$ et $v$ sont toutes deux des fonctions qui s'annulent en 0 et en $\pi$ nous pouvons faire des intégrations par partie les yeux fermés et exprimer $\langle u'', v\rangle$ sans dérivées sur $u$ :

$$\langle u'', v\rangle = -\langle u', v'\rangle = \langle u, v''\rangle = -\langle u, v\rangle \tag{30.108}$$

où la dernière égalité n'est autre que le fait que $v = \sin$, donc $v'' = -v$. Le membre de gauche de (30.107) vaut donc zéro alors que celui de droite vaut $-2$.

Nous concluons que le problème au limites posé n'admet pas de solutions. △

## 30.8 Autour de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section nous étudions les équations différentielles du type

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(30.109a)} \\ y(t_0) = y_0 & \text{(30.109b)} \end{cases}$$

### 30.8.1 Fuite des compacts et explosion en temps fini

**Théorème 30.17** (Fuite des compacts[312, 224])**.**
*Nous considérons l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(30.110a)} \\ y(t_0) = y_0 & \text{(30.110b)} \end{cases}$$

*où $f\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue et $\Omega$ ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Soit la solution maximale $y_M\colon J_M = ]t_{min}, t_{max}[ \to \Omega$. Si $t_{max} < \sup(I)$ alors $y_M(t)$ sort de tout compact de $\Omega$ lorsque $t \to t_{max}$.*

*Démonstration.* Soit $K$ un compact de $\Omega$ et nous considérons une suite $(t_m)$ dans $]t_{min}, t_{max}[$ telle que $t_m \to t_{max}$. Si nous supposons que $y_M(t)$ ne sort pas de $K$ alors nous avons $y_M(t_m) \in K$, c'est à dire une suite dans un compact. Quitte à passer à une sous-suite, nous supposons qu'elle est convergente. Soit $x_1 \in K$ la limite $\lim_{m\to\infty} y_M(t_m) = x_1$.

Vu que $t_{max} \in I$, la condition initiale $y(t_{max}) = x_1$ est valide et le théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37 nous donne une unique solution maximale $y_P$ définie sur un ouvert $J_P$ autour de $t_{max}$.

Nous allons maintenant construire une solution au problème initial qui contredit la maximalité de $y_M$. Attention : il n'est pas évident a priori que $y_P(t) = y_M(t)$ sur l'intersection des domaines. Si c'était évident, la proposition serait démontrée.

Soit $\tilde{J} = J_M \cup J_P \cap ]t_{min}, +\infty[$ et la fonction

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y_M(t) & \text{si } t < t_{max} \\ y_P(t) & \text{si } t \geqslant t_{max}. \end{cases} \tag{30.111}$$

La fonction $\tilde{y}$ est continue par construction parce que

$$\lim_{t\to t_{max}} y_M(t) = x_1 = y_P(t_{max}). \tag{30.112}$$

Nous vérifions à présent que $\tilde{y}$ est une solution : $\tilde{y}'(t_{max}) = f\big(t_{max}, y(t_{max})\big)$ :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\tilde{y}(t_{max}-\epsilon) - \tilde{y}(t_{max})}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{y_M(t_{max}-\epsilon) - y_P(t_{max})}{\epsilon} \tag{30.113a}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{y_M(t_{max}-\epsilon) - y_P(t_{max}-\epsilon) + y_P(t_{max}-\epsilon) - y_P(t_{max})}{\epsilon} \tag{30.113b}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{y_P(t_{max}-\epsilon) - y_P(t_{max})}{\epsilon} \tag{30.113c}$$

$$= y'_P(t_{max}). \tag{30.113d}$$

Donc $\tilde{y}$ est solution pour la condition initiale $\tilde{y}(t_{max}) = x_1$ et coïncide avec $y_P$ en $t_{max}$ et avec $y_M$ avant $t_{max}$. Donc en réalité $y_P$, $y_M$ et $\tilde{y}$ sont identiques et cela contredit la maximalité de $y_M$. □

**Corollaire 30.18** (Explosion en temps fini)**.**
*Soit $(y_m, J)$ la solution maximale du problème de Cauchy* (18.124) *:*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & \text{(30.114a)} \\ y(t_0) = y_0 & \text{(30.114b)} \end{cases}$$

*avec $f\colon U = I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ où $I$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et $\Omega$ ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Nous supposons que $f$ est continue sur $U$ et localement Lipschitz par rapport à $y$.*

*Si la solution maximale est définie sur $J = ]t_{min}, t_{max}[$ alors nous avons l'alternative suivante :*

*(1) Soit $t_{max} = \sup(I)$,*

*(2) soit $t_{max} < \sup(I)$ et $\lim_{t\to t_{max}} \|y(t)\| = \infty$.*

*Le résultat tient aussi* mutatis mutandis *pour $t_{\min}$.*

**Remarque 30.19.**
Attention : ceci n'est pas une simple paraphrase de la fuite des compacts. L'information supplémentaire que ce corollaire donne est que la solution sort de tout compact *pour ne plus y retourner.*

*Démonstration.* L'hypothèse $t_{max} < \sup(I)$ signifie que la solution finit d'exister avant que les hypothèses sur $f$ cessent d'être vraies. C'est à dire que la solution maximale est moindre que ce que nous aurions pu espérer.

Soit $K$ compact et supposons que que pour tout $t_0 < t_{max}$ il existe $t \in ]t, t_{max}[$ tel que $y_M(t) \in K$. Alors cela crée une suite $t_k$ dans $J$ telle que $y_M(t_k)$ est dans $K$. Comme dans le théorème de la fuite des compacts nous concluons l'impossibilité de la chose.

Donc pour tout compact $K$ de $\Omega$, il existe $T < t_{max}$ tel que $y_M(t) \in \Omega \backslash K$ pour tout $t \in [T, t_{max}[$. En prenant des boules fermées de plus en plus grandes en guise de compacts nous concluons que

$$\lim_{t \to t_{max}} \|y_M(t)\| = \infty. \tag{30.115}$$

□

**30.20.**
Notons que si $t_{max} < \infty$, si nous sommes dans l'alternative 30.18(2) et si la solution maximale $y$ est de classe $C^1$ (ce qui est le cas lorsqu'on utilise Cauchy-Lipschitz 18.37) alors la dérivée de $y$ est également non bornée dans un voisinage de $t_{max}$.

Mais si $f$ est globalement bornée, alors dans l'équation $y' = f(t, y)$, la dérivée $y'$ sera globalement bornée. Dans ce cas, la solution ne peut pas exploser en temps fini et existe donc globalement.

**Problèmes et choses à faire**

Êtes-vous d'accord avec 30.20 ?

**Exemple 30.21**
Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = y(y-1)\sin(yt) & \text{(30.116a)} \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. & \text{(30.116b)} \end{cases}$$

La fonction $f(t, y) = y(y-1)\sin(yt)$ ayant une dérivée bornée partout, est localement Lipschitz et le théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37 s'applique. Pour toute condition initiale, une solution maximale unique existe.

Si nous oublions la condition initiale, il est facile de trouver des solutions constantes : $y' = 0$ avec $y(t) = k$ donne l'équation

$$0 = k(k-1)\sin(kt). \tag{30.117}$$

Les solutions $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = 1$ sont des solutions existant pour tout $t$.

Le graphe de la solution correspondante à la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ ne pouvant pas croiser les graphes de $y_1$ et $y_2$, elle est obligée d'exister pour tout $t$ parce qu'elle ne peut pas exploser en temps fini. △

### 30.8.2 Écart entre deux conditions initiales

**Proposition 30.22** ([311, 313])**.**
*Soit une fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et globalement Lipschitz en sa seconde variable ($\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$). Soient deux solutions $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ aux problèmes*

$$\begin{cases} y_i'(t) = f\big(t, y_i(t)\big) & \text{(30.118a)} \\ y_i(t_0) = a_i & \text{(30.118b)} \end{cases}$$

*Alors pour tout $t \in I_1 \cap I_2$ nous pouvons estimer l'écart entre $y_1$ et $y_2$ par la formule*

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant e^{L|t-t_0|}\|a_1 - a_2\| \tag{30.119}$$

*où $L$ est la constante de Lipschitz de $f$.*

*Démonstration.* Nous avons d'abord les majorations suivantes, qui semblent juste jouer avec les notations, mais qui utilisent le fait (contenu dans le théorème de Cauchy-Lipschitz) que $y_i$ soit de

classe $C^1$ :

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| = \| \int_{t_0}^{t} \big(y_1'(s) - y_1'(s)\big) \| \tag{30.120a}$$

$$\leqslant L \int_{t_0}^{t} \|f\big(s, y_1(s)\big) - f\big(s, y_2(s)\big)\| ds \tag{30.120b}$$

$$= L \int_{t_0}^{t} \|y_1(s) - y_2(s)\| ds \tag{30.120c}$$

C'est à ce moment que nous utilisons le lemme de Grönwall. Vu que

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant L \int_{t_0}^{t} \|y_1(s) - y_2(s)\| ds, \tag{30.121}$$

nous sommes dans les hypothèses de Grönwall 30.5 en posant

$$u(t) = \|y_1(t) - y_2(t)\| \tag{30.122a}$$

$$b(t) = \|y_1(0) - y_2(0)\| \tag{30.122b}$$

$$a(t) = L. \tag{30.122c}$$

Nous avons la majoration

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant \|y_1(0) - y_2(0)\| + L \int_{0}^{t} \|y_1(0) - y_2(0)\| e^{L(t-s)} ds. \tag{30.123}$$

Le calcul de l'intégrale intérieure donne

$$\int_{0}^{t} e^{L(t-s)} ds = -\frac{1}{L}(e^{-Lt} - 1). \tag{30.124}$$

Avec ça, nous avons

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant e^{Lt} \|y_1(0) - y_2(0)\|. \tag{30.125}$$

□

**30.23.**
Notons que la proposition 30.22 est plutôt une mauvaise nouvelle parce que les solutions restent seulement linéairement proches l'une de l'autre lorsqu'on rapproche les conditions initiales, mais elle divergent exponentiellement vite avec le temps. Donc deux trajectoires arbitrairement proches au départ finissent assez vite par être bien séparées.

Cette proposition est cependant cruciale parce qu'elle explique que pour des petits $t$, les solutions ne s'écartent pas beaucoup, c'est à dire que pour $t$ fixé, l'application qui à une donnée initiale fait correspondre la solution en $t$ est continue. C'est le premier pas pour parler de régularité du flot.

### 30.8.3 Flot d'un champ de vecteurs

Nous reprenons l'équation différentielle du théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37. En ce qui concerne les notations, $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et l'application $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue et localement Lipschitz en sa seconde variable. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, nous notons $(J_a, y_a)$ la solution maximale (donc $y_a\colon J_a \to \mathbb{R}^n$) du problème

$$\begin{cases} y_a(t) = f\big(t, y_a(t)\big) & \text{(30.126a)} \\ y_a(0) = a. & \text{(30.126b)} \end{cases}$$

Nous noterons aussi de temps en temps $\varphi(t, a) = y_a(t)$.

Nous savons que $t \mapsto y_a(t)$ est de classe $C^1$, et cela est directement dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. Une question d'une toute autre difficulté est la régularité de $a \mapsto y_a(t)$ pour $t$ fixé, et encore pire : celle de $(t, a) \mapsto y_a(t)$.

Il se fait que l'application $(t, a) \mapsto y_a(t)$ a la même régularité que celle de $f$, mais cela va être un peu long à prouver. En ce qui concerne la régularité $C^1$, ce sera le théorème 30.28 dont la démonstration, comme vous pouvez le voir sera copieuse et demandera des propositions intermédiaires pas simples.

**Définition 30.24.**
*Si $t$ est fixé, l'application*

$$\begin{aligned} \varphi_t \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \varphi(t, x) = y_x(t) \end{aligned} \tag{30.127}$$

*est le **flot** du problème de Cauchy* (30.126).

*L'application $t \mapsto \varphi_t$ est ce qui est appelé le groupe à un paramètre de flot, pour des raisons qui arriverons plus tard*[2] .

Le but est d'étudier les propriétés du flot : est-il continu, une difféomorphisme, existe, pour quels $t$ ? Où se cache le champ de vecteurs du titre dans l'équation différentielle ?

Nous posons

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x \in \Omega} \big(J_x \times \{x\}\big). \tag{30.128}$$

Comme tout produit d'espaces métrique, l'ensemble $\mathcal{D}$ est muni d'une métrique via la définition 6.161.

**Proposition 30.25** ([311])**.**
*Soit un intervalle $I$ ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $0$ et $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Soit une application $f \colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitz en sa seconde variable. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, nous notons $(J_a, y_a)$ la solution maximale (donc $y_a \colon J_a \to \mathbb{R}^n$) du problème*

$$\begin{cases} y_a(t) = f\big(t, y_a(t)\big) & \text{(30.129a)} \\ y_a(0) = a. & \text{(30.129b)} \end{cases}$$

*Nous posons*

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x \in \Omega} \big(J_x \times \{x\}\big) \tag{30.130}$$

*Nous définissons la fonction $\varphi$ par $\varphi(t, x) = y_x(t)$ là où ça existe.*

*L'ensemble $\mathcal{D}$ est ouvert. L'application $\varphi \colon \mathcal{D} \to \Omega$ est localement Lipschitz.*

*Démonstration.* Soit $(s, a) \in \mathcal{D}$ et $(J_a, y_a)$ la solution maximale passant par $a$ en $t = 0$. Par définition de $\mathcal{D}$ nous avons $s \in J_a$. Nous considérons $J$, un compact inclus à $J_a$ et contenant $0$ et $s$ en son intérieur. Nous posons

$$K = J \times y_a(J). \tag{30.131}$$

Vu que $y_a$ est continue, cela est un compact. Chaque point de $K$ possède un voisinage ouvert sur lequel $f$ est Lipschitz [3] ; nous considérons un sous recouvrement fini et le maximum des constantes de Lipschitz. Cela nous crée un voisinage $V$ de $K$ dans $I \times \Omega$ dans lequel $f$ est Lipschitz.

Vu que $V$ est ouvert et $K$ est compact avec $K \subset V$, nous pouvons trouver un ouvert $V'$ et un compact $K'$ tels que

$$K \subset V' \subset K' \subset V. \tag{30.132}$$

Sur ce $V'$, la fonction $f$ est de plus bornée parce que continue sur le compact $K'$. Nous renommons $V'$ en $V$. Sur $V$ nous avons :

— $\|f\|_{\infty, V} \leqslant M$,

2. ou pas...

3. Cela est à peu près la définition d'être localement Lipschitz : 12.246, voir aussi 12.247.

— $f$ est Lipschitz en sa seconde variable, de constante de Lipschitz $L$.

En tant qu'espace produit, nous avons une distance sur $I \times \Omega$ donnée en 6.161 :

$$d\big((t,y),(t',y')\big) = \max\big\{|t-t'|, \|y-y'\|\big\}. \tag{30.133}$$

Nous posons

$$V_\epsilon(K) = \{z \in I \times \Omega \text{ tel que } d(z,K) < \epsilon\} \tag{30.134a}$$
$$W_\epsilon = \{(t,y) \in J \times \Omega \text{ tel que } \|y - y_a(t)\| < \epsilon\}. \tag{30.134b}$$

$\overline{W_\epsilon} \subset \overline{V_\epsilon(K)}$ Soit $(t,y) \in W_\epsilon$. Nous avons :

$$d\big((t,y),K\big) = \inf_{(t',y')\in K} d\big((t,y),(t',y')\big) \tag{30.135a}$$
$$= \inf_{(t',y')\in K} \max\{|t-t'|, \|y-y'\|\}. \tag{30.135b}$$

Mais demander $(t,y) \in W_\epsilon$ signifie que $t \in J$ et $\|y - y_a(t)\| \leqslant \epsilon$. Dans $K$ nous avons l'élément $\big(t, y_a(t)\big)$ qui vérifie

$$d\big((t,y),(t,y_a(t))\big) = \|y - y_a(t)\| \leqslant \epsilon. \tag{30.136}$$

Donc l'infimum de (30.135b) est majoré par $\epsilon$. Nous avons prouvé que $W_\epsilon \subset V_\epsilon(K)$ et donc même inclusion pour les fermetures.

**Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\overline{V_\epsilon(K)} \subset V$** Supposons que $\overline{V_\epsilon(K)}$ ne soit inclus à $V$ pour aucun $\epsilon$. Alors nous considérons

$$z_n \in \overline{V_{1/n}(K)} \backslash V. \tag{30.137}$$

Nous avons par définition $d(z_n,K) \leqslant \frac{1}{n}$. Vu que $K$ est compact, il comprend (au moins) un élément réalisant la distance : soit $z'_n \in K$ tel que

$$d(z_n, z'_n) = d(z_n, K). \tag{30.138}$$

Nous avons $d(z_n,z'_n) \to 0$, de telle sorte que les valeurs d'adhérence de $(z_n)$ et $(z'_n)$ sont les mêmes. Et comme $(z'_n)$ est une suite dans un compact, elle a des valeurs d'adhérence. Soit $z_\infty$ l'une d'elles. Vu que c'est une valeur d'adhérence d'une suite contenue dans le compact $K$, elle est également dans $K$ : $z_\infty \in K$. Mais en même temps, $z_n$ est hors de l'ouvert $V$, et donc dans le fermé $V^c$. Les valeurs d'adhérences restent dans le fermé, c'est à dire $z_\infty \notin V$. Vu que $K \subset V$, il y a contradiction.

Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\overline{V_\epsilon(K)} \subset V$.

**Il existe $\epsilon$ tel que $\overline{W_\epsilon} \subset V$** Il suffit de prendre le $\epsilon$ dont nous venons de parler pour avoir

$$\overline{}_\epsilon \subset \overline{V_\epsilon(K)} \subset V. \tag{30.139}$$

Soit le $\epsilon$ en question, et $T > 0$ tel que $J \subset [-T,T]$. Nous posons $r = \epsilon e^{-LT}$. Soit $b \in \overline{B(a,r)}$ et

$$X = \{\tau \in J_+ \text{ tel que } ]0,\tau] \subset J_b \text{ et } \big(t, y_b(t)\big) \in \overline{W_\epsilon}\, \forall\, t \in [0,\tau]\}. \tag{30.140}$$

Nous allons prouver que $X = J_+$ en prouvant qu'il est ouvert, fermé et non vide dans $J_+ = J \cap ]0,\infty[$. Nous parlons bien de la topologie de $J_+$, celle induite [4] de $\mathbb{R}$. Vu que $0 \in J$, l'ensemble $J_+$ est ouvert à gauche, mais comme il est compact, il ne va certainement pas jusqu'à $+\infty$, de telle sorte qu'il est fermé à gauche. Les ouverts de $J_+$ sont les ensembles de la forme $\mathcal{O} \cap J_+$ où $\mathcal{O}$ est ouvert de $\mathbb{R}$. Il y en a de la forme $]0,m]$.

**$X$ est fermé** C'est parce que $\overline{W_\epsilon}$ et $J_b$ sont fermés.

4. Définition 6.78.

**$X$ est ouvert** Soit $\tau \in X$. Si $\tau = \sup J_+$ alors $X = J_+$ est un ouvert de $J_+$. Supposons donc que $0 < \tau < \sup J_+$. Dans ce cas nous avons

$$\big(\tau, y_b(\tau)\big) \in \overline{W_\epsilon} \subset V, \tag{30.141}$$

et nous pouvons résoudre localement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(30.142a)} \\ y(\tau) = \varphi(\tau, b) = y_b(\tau). & \text{(30.142b)} \end{cases}$$

Ce $y$ existe jusqu'à $\tau + \eta$ (pour au moins un petit $\eta$), et par l'unicité de la solution, $y = y_b$ sur $[\tau, \tau + \eta[$. Ceci pour dire que le flot $\varphi(., b)$ existe au moins jusqu'à $\tau + \eta$.

Grâce à la proposition 30.22 nous pouvons évaluer

$$\|\varphi(\tau, b) - \varphi(\tau, a)\| = \|y_a(\tau) - y_b(\tau)\| \leqslant e^{L\tau}\|b - a\|. \tag{30.143}$$

Comme nous avions choisi $r = \epsilon e^{-LT}$ et $b \in \overline{B(a, r)}$ nous avons aussi $\|b - a\| \leqslant \epsilon e^{-LT}$ et donc

$$\|\varphi(\tau, b) - \varphi(\tau, a)\| \leqslant \epsilon e^{L(\tau - T)} < \epsilon \tag{30.144}$$

parce que nous avions $\tau < \sup J_+ \leqslant T$, ce qui garantit que $e^{L(\tau - T)} < 1$.

Est-ce que ceci nous garantit que $\tau + \eta \in X$ ? Il faudrait $\big(\tau + \eta, y_b(\tau + \eta)\big) \in \overline{W_\epsilon}$, c'est à dire $\|y_b(\tau + \eta) - y_a(\tau + \eta)\| \leqslant \epsilon$. L'ensemble $J_+$ étant fermé dans l'ouvert $J_a$, ce dernier déborde certainement. Prenons donc $\eta$ assez petit pour que $y_a$ existe jusqu'en $\tau + \eta$.

Vu que $y_a$ et $y_b$ sont continues, et qu'en $\tau$ elles sont distantes de moins de $\epsilon$, en $\tau + \eta$, elles restent distantes de moins de $\epsilon$ (quitte à prendre encore $\eta$ plus petit).

Ceci nous permet de conclure que $X$ est ouvert.

**$X$ est non vide** La solution $y_b$ au problème

$$\begin{cases} y_b'(t) = f\big(t, y_b(t)\big) & \text{(30.145a)} \\ y_b(0) = b & \text{(30.145b)} \end{cases}$$

existe au moins localement et vérifie $\|y_b(0) - y_a(0)\| = \|b - a\| \leqslant \epsilon e^{-LT} < \epsilon$. Par continuité nous avons

$$\|y_b(t) - y_a(t)\| < \epsilon \tag{30.146}$$

pour tout $t$ dans un voisinage de 0. Donc $X$ est non vide.

**Conclusion pour $X$** La partie $X$ est ouverte, fermée et non vide dans $J_+$ qui est connexe. Donc $X = J_+$ par la proposition 6.85(3).

La conclusion $X = J_+$ nous enseigne que pour tout $t \in J_+$ nous avons $]0, t] \in J_b$ et $\big(t, y_b(t)\big) \in \overline{W_\epsilon}$. Nous pouvons faire la même chose pour $J_-$ et au final nous avons que pour tout $\tau \in J$ nous avons d'abord $\tau \in J_b$, ce qui prouve $J \subset J_b$. De plus pour tout $t \in J$ nous avons aussi

$$\big(t, y_b(t)\big) \in \overline{W_\epsilon} \subset V. \tag{30.147}$$

Nous en concluons que

$$J \times \overline{B(a, r)} \subset V. \tag{30.148}$$

Nous savons de plus que pour tout $b \in \overline{B(a, r)}$, $J \subset J_b$. Cela signifie que

$$J \times \overline{B(a, r)} \subset \mathcal{D}. \tag{30.149}$$

Mais $J \times \overline{B(a, r)}$ est un voisinage de $(s, a)$ qui était au début de la preuve un point générique choisit dans $\mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}$ est ouvert parce qu'il contient un voisinage de chacun de ses points.

Il nous reste à voir que $\varphi\colon \mathcal{D} \to \Omega$ est localement Lipschitz. Soit donc le point générique $(s, a)$ dans $\mathcal{D}$ et l'ensemble $V$ qui avait été construit plus haut. Nous allons montrer que $\varphi$ est Lipschitz sur $J \times \overline{B(a, r)} \subset V$. D'abord sur $V$, l'application $f$ est Lipschitz, donc

$$\|\varphi(t, b_1) - \varphi(t, b_2)\| \leqslant e^{Lt}\|b_1 - b_2\| \leqslant e^{LT}\|b_1 - b_2\| \tag{30.150}$$

pour tout $t \in J$ et $b_1, b_2 \in \overline{B(a,r)}$.

Ensuite, $f$ est bornée, majorée par $M$ sur $V$, donc

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t_1,b) - \varphi(t_2,b)\| &= |\int_{[t_1,t_2]} y_(s)'ds| && (30.151a)\\
&= |\int_{[t_1,t_2]} f\big(s, y_b(s)\big)| && (30.151b)\\
&\leqslant \int_{[t_1,t_2]} |f\big(s, y_b(s)\big)|ds && (30.151c)\\
&\leqslant M|t_1 - t_2|. && (30.151d)
\end{aligned}$$

Et enfin nous prouvons que $\varphi$ est localement Lipschitz. En posant $k = \max\{e^{LT}, M\}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t_1,b_1) - \varphi(t_2,b_2)\| &\leqslant \|\varphi(t_1,b_1) - \varphi(t_1,b_2)\| + \|\varphi(t_1,b_2) - \varphi(t_2,b_2)\| && (30.152a)\\
&\leqslant e^{LT}\|b_1 - b_2\| + M|t_1 - t_2| && (30.152b)\\
&\leqslant k\big(\|b_1 - b_2\| + |t_1 - t_2|\big) && (30.152c)\\
&\leqslant 2k \max\{\|b_1 - b_2\|, |t_1 - t_2|\} && (30.152d)\\
&= 2kd\big((b_1,t_2),(b_2,t_2)\big). && (30.152e)
\end{aligned}$$

Le flot $\varphi$ est donc Lipschitz de constante $2k$. □

**Exemple 30.26**

**Problèmes et choses à faire**

Cet exemple doit être lu attentivement. Il me semble prouver que le flot n'est pas dérivable en la condition initiale sans que $f$ le soit. Le document [314] semble dire le contraire. Je ne suis pas assez sûr de mon coup pour contredire.

Il n'y a pas de raisons de penser que $a \mapsto y_a(t)$ soit mieux que continue en sans hypothèses supplémentaires sur $f$. Pour illustrer cela nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial s} = f\big(X(s), s\big) & (30.153a)\\ X(t) = x & (30.153b) \end{cases}$$

où $t$ et $x$ sont des paramètres fixés. Nous allons étudier la dérivabilité de $X$ en $x$ lorsque

$$f(x,t) = |x|. \tag{30.154}$$

Cela est un exemple typique de fonction autant Lipschitz que l'on veut sans être dérivable. L'équation différentielle est

$$\frac{\partial X}{\partial s}(s) = |X(s)|. \tag{30.155}$$

Si $x > 0$ alors $X(s) > 0$ dans un voisinage de $s = t$ et nous avons $X(s) = Ke^s$. La constante $K$ se fixe par la condition initiale $X(t) = x$ :

$$X(s) = xe^{s-t}. \tag{30.156}$$

Et cette solution tient en réalité pour tout $s$ parce que $X(s)$ est alors toujours positif.

Si au contraire $x < 0$ nous avons la solution

$$X(s) = xe^{t-s}. \tag{30.157}$$

Au final,

$$X(s;x,t) = \begin{cases} xe^{t-s} & \text{si } x < 0\\ 0 & \text{si } x = 0\\ xe^{s-t} & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{30.158}$$

L'application $(s,x,t)\mapsto X(s;x,t)$ est continue. En ce qui concerne la dérivée partielle $\partial_x X$ en $x=0$ nous avons :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(s,0,t)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{X(s,\epsilon,t)-X(s,0,t)}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{X(s,\epsilon,t)}{\epsilon}. \tag{30.159}$$

La limite à droite donne :

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{X(s,\epsilon,t)}{\epsilon}=\frac{\epsilon e^{s-t}}{\epsilon}=e^{s-t}. \tag{30.160}$$

La limite à gauche donne :

$$\lim_{\epsilon\to 0^-}\frac{X(s,\epsilon,t)}{\epsilon}=e^{t-s}. \tag{30.161}$$

Les deux limites n'étant pas égales, la limite (30.159) n'existe pas[5] et l'application $(s,x,t)\mapsto X(s,x,t)$ n'est pas dérivable par rapport à $x$. △

**Lemme 30.27** ([315])**.**
*Soit un application $A\colon \overline{B(t_0,\tau)}\times\overline{B(a,R)}\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ continue par rapport à sa première variable ($t_0\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}^n$). Alors en posant l'équation*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}(t,b)=A(t,b)\psi(t,b) & \text{(30.162a)}\\ \psi(t_0,b)=\psi_0. & \text{(30.162b)}\end{cases}$$

*Nous avons l'estimation*

$$\|\psi(t,v)-\psi(t,w)\|\leqslant\|\psi_0\|\tau\max_{s\in\overline{B(t_0,\tau)}}\|A(s,v)-A(s,w)\|\times \\ \times\exp\left(\tau\max_{s\in\overline{B(t_0,\tau)}}\max\{\|A(s,v)\|,\|A(s,w)\|\}\right) \tag{30.163}$$

*pour tout $t\in\overline{B(t_0,\tau)}$ et $v,w\in V$.*

**Théorème 30.28** (Régularité $C^1$ du flot [315])**.**
*Soit un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et un ouvert connexe $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction $f\in C^1\big(I\times\Omega,\mathbb{R}\big)$, $a\in\Omega$ et $t_0\in I$.*

*Il existe un voisinage $W\times V=\overline{B(t_0,\tau)}\times\overline{B(a,r)}$ de $(t_0,a)$ dans $I\times\Omega$ et une unique application $\varphi\colon W\times V\to\Omega$ telle que*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)=f\big(t,\varphi(t,x)\big) & \text{(30.164a)}\\ \varphi(t_0,x)=x & \text{(30.164b)}\end{cases}$$

*pour tout $x\in V$.*

*L'application $(t,x)\mapsto\varphi(t,x)$ est de classe $C^1$.*

**Problèmes et choses à faire**

La preuve qui suit doit être lue avec beaucoup d'attention, en particulier sur les incohérences possibles de notations, et sur les oublis possibles de précautions oratoires type «quitte à encore réduire les voisinages $V$ et $W$».

*Démonstration.* En termes de notations, pour $x\in\Omega$ fixé nous écrivons $y_x(t)$ pour $\varphi(t,x)$ et pour $t\in I$ fixé nous notons $\varphi_t(x)$ pour $\varphi(t,x)$.

De plus lorsque nous écrirons des choses comme $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nous n'entendrons pas que $g$ est effectivement définie sur tout $\mathbb{R}$. La notation «$g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$» indiquera seulement que la variable de $g$ est réelle, et que nous comptons préciser le domaine plus tard. Cette remarque s'applique seulement à cette démonstration et non à l'ensemble du livre.

5. Si vous comptez donner ça à manger au jury d'un concours, soyez prudent et n'écrivez pas l'équation (30.159) au tableau. Réfléchissez comment rédiger cela correctement.

Nous considérons $R > 0$ tel que $\overline{B(a, 2R)} \subset \Omega$ et ensuite nous posons $V = \overline{B(a, R)}$. La fonction $y_x$, solution pour la condition initiale $y_x(t_0) = x$ est définie sur $W = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ et prend ses valeurs dans $\overline{B(x, R)}$. Ceci est parce que $y_x$ est continue, alors en prenant $\tau$ assez petit, la valeur de $y_x(t)$ ne va pas s'éloigner de $x$ lorsque $t$ ne s'éloigne pas de $t_0$.

Nous savons déjà de la proposition 30.25 que $\varphi$ est $C^1$ en $t$ et localement Lipschitz en sa seconde variable, avec une constante Lipschitz uniforme sur $W \times V$. Elle est donc continue en tant que fonction

$$\varphi\colon V \times W \to \mathbb{R}^d. \tag{30.165}$$

**La différentielle partielle $Df$** Pout $t$ fixé nous notons $Df_{(t,x)}$ la différentielle de $f$ par rapport à $x$. C'est à dire que

$$\begin{aligned} Df_{(t,x)}\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \frac{d}{ds}\Big[f(t, x + su)\Big]_{s=0}. \end{aligned} \tag{30.166}$$

C'est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des application linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$. Nous allons montrer que

$$(t, x) \mapsto Df_{(t,x)} \tag{30.167}$$

est continue en tant qu'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Pour cela nous introduisons l'application d'inclusion $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $i(u) = (0, u)$. Elle donne

$$Df_{(t,x)}(u) = \frac{d}{ds}\Big[f\big((t, x) + s(0, u)\big)\Big]_{s=0} = df_{(t,x)} \circ i(u). \tag{30.168}$$

Autrement dit

$$Df_{(t,x)} = df_{(t,x)} \circ i. \tag{30.169}$$

Or l'application $(t, x) \mapsto df_{(t,x)}$ est continue par hypothèse ($f$ est de classe $C^1$) et l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ A &\mapsto A \circ i \end{aligned} \tag{30.170}$$

est également continue. Donc $(t, x) \mapsto Df_{(t,x)}$ est continue[6] .

**L'équation aux variations** Soit $x \in \Omega$. Nous introduisons l'opérateur

$$\begin{aligned} S_x\colon \mathbb{R} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ S_x(t, \psi) &= Df_{(t,y_x(t))} \circ \psi. \end{aligned} \tag{30.171}$$

Par ce que nous avons raconté, cela est une fonction continue en sa première variable et Lipschitz en sa seconde variable. Nous identifions $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ à $\mathbb{R}^{2^n}$.

Toujours pour chaque $x$ considéré nous posons l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = S_x\big(t, \psi(t, x)\big) & \text{(30.172a)} \\ \psi(t_0, x) = \mathrm{Id}\,. & \text{(30.172b)} \end{cases}$$

qui est une équation différentielle ordinaire pour $\psi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ rentrant dans le cadre de Cauchy-Lipschitz.

Quel est le domaine de définition de $\psi$ pour sa première variable ? C'est un ouvert autour de $t_0$. Nous réduisons $W$ de telle sorte que la solution $\psi$ soit définie sur $W$. Idem pour la variable $x$ qui est dans un voisinage de $a$.

L'équation (30.172) s'appelle l'**équation aux variations**. Nous allons montrer dans la douleur que $\psi$ est continue et est la différentielle de $\varphi_t$, c'est à dire que

$$(d\varphi_t)_b = \psi(t, b). \tag{30.173}$$

6. Si quelqu'un peut prouver ça de façon moins verbeuse, je suis preneur. Il me semble que quel que soit la façon dont on s'y prend, sous le capot, on passe par la continuité de l'application (30.170).

**$\psi$ est continue en $(t,x)$ (début)** Il s'agit de majorer les deux termes de

$$\|\psi(t_1,a_1)-\psi(t_2,a_2)\|\leqslant\|\psi(t_1,a_1)-\psi(t_2,a_1)\|+\|\psi(t_2,a_1)-\psi(t_2,a_2)\|. \tag{30.174}$$

**Premier terme** Nous avons

$$\begin{aligned}\|\psi(t_1,b)-\psi(t_2,b)\|&=\|\int_{[t_1,t_2]}\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,b)ds\| &\text{(30.175a)}\\ &\leqslant\int_{[t_1,t_2]}\|Df_{(s,y_b(s))}\circ\psi(s,b)\|ds &\text{(30.175b)}\\ &\leqslant\int_{[t_1,t_2]}\|Df_{(s,t_b(s))}\|\|\psi(s,b)\|ds &\text{(30.175c)}\\ &\leqslant|t_1-t_2|\max_{s\in[t_1,t_2]}\|Df_{(s,y_b(s))}\|\max_{s\in[t_1,t_2]}\|\psi(s,b)\|. &\text{(30.175d)}\end{aligned}$$

Nous allons majorer le second maximum. Prenons $t\in[0,\tau]$ ; et posons $A(u,b)=Df_{(u,y_b(u))}$ pour alléger les notations. Par l'équation de définition de $\psi$ nous avons

$$\psi(t,b)=\psi(0,b)+\int_{[0,t]}A(u,b)\psi(u,b)du, \tag{30.176}$$

et donc

$$\|\psi(t,b)\|\leqslant\|\psi_0\|+\int_{[0,t]}\|A(u,b)\|\|\psi(u,b)\|du. \tag{30.177}$$

En y appliquant le lemme de Grönwall dans sa version 30.4 nous trouvons

$$\begin{aligned}\|\psi(s,b)\|&\leqslant\|\psi_0\|\exp\left(\int_{[0,s]}\|A(u,b)\|du\right) &\text{(30.178a)}\\ &\leqslant\|\psi_0\|\exp\left(s\max_{u\in[0,s]}\|A(u,b)\|\right). &\text{(30.178b)}\end{aligned}$$

En retournant à (30.175d) nous avons $\psi_0=\mathrm{Id}$ et donc $\|\psi_0\|=1$ et

$$\max_{s\in[t_1,t_2]}\|\psi(s,b)\|\leqslant\max_{s\in[t_1,t_2]}\exp\left(s\max_{u\in[0,t]}\|Df_{(u,y_b(u))}\|\right) \tag{30.179}$$

Là dedans nous pouvons remplacer $t$ par $\max\{|t_1|,|t_2|\}$. Posons enfin, pour alléger les expressions

$$a(t_1,t_2,b)=\max_{s\in[t_1,t_2]}\|Df_{(s,y_b(s))}\|. \tag{30.180}$$

La majoration que nous retenons est :

$$\|\psi(t_1,b)-\psi(t_2,b)\|\leqslant|t_1-t_2|a(t_1,t_2,b)\exp\big(\max\{|t_1|,|t_2|\}a(0,t,b)\big). \tag{30.181}$$

Cela tend vers zéro lorsque $t_1\to t_2$.

**Deuxième terme** En ce qui concerne le second terme,

$$\|\psi(t,b_1)-\psi(t,b_2)\| \tag{30.182}$$

nous utilisons le lemme 30.27 qui donne, pour $t\in[t_0-\tau,t_0+\tau]$,

$$\begin{aligned}\|\psi(t,b_1)-\psi(t,b_2)\|\leqslant\tau\max_{s\in\overline{B(0,\tau)}}\|Df_{s,y_{b_1}(s)}-Df_{s,y_{b_2}(s)}\|\times\\ \times\exp\left(\tau\max\{\|Df_{s,y_{b_1}(s)},\|Df_{s,y_{b_2}(s)}\|\|\}\right).\end{aligned} \tag{30.183}$$

Dans notre cas, $t_0=0$, donc $t\in[-\tau,\tau]$. Vu la continuité de $Df$, nous avons

$$\max_{s\in\overline{B(0,\tau)}}\|Df_{s,y_{b_1}(s)}-Df_{s,y_{b_2}(s)}\|\to0 \tag{30.184}$$

lorsque $b_1\to b_2$.

**$\psi$ est continue en $(t,x)$ (fin)** Les deux bons calculs faits, nous avons, en repartant de (30.174),

$$\lim_{(t_1,b_1)\to(t_2,b_2)} \|\psi(t_1,b_1)-\psi(t_2,b_2)\| = 0, \tag{30.185}$$

ce qui signifie que $\psi$ est une fonction continue de ses deux variables en même temps.

**Différentiabilité de $\varphi$ (début)** Nous montrons maintenant que $D\varphi(t,x)$ existe. Pour rappel, $D$ est la différentielle par rapport à la seconde variable. Nous sommes à étudier l'existence de $D\varphi_{(t,b)} = d(\varphi_t)_b$. Nous posons

$$\theta(t,h) = \varphi(t,b+h) - \varphi(t,b) = y_{b+h}(t) - y_b(t) \tag{30.186}$$

où $b$ est le point où nous étudions la différentiabilité. Il est dans un voisinage du point $a$ fixé depuis le début et autour duquel il existe un voisinage qui donne un sens à tout ce que nous avons fait jusqu'à présent. La dépendance de $\theta$ en $b$ est implicite. Vu que $\varphi$ est Lipschitz en sa seconde variable, nous avons la majoration

$$\|\theta(t,h)\| \leqslant C\|h\| \tag{30.187}$$

dès que $t \in V$ et $b, b+h \in W$.

De plus, parce que $t_0$ est le temps de la condition initiale nous avons

$$\theta(t_0,h) = y_{b+h}(t_0) - y_b(t_0) = a + h - a = h. \tag{30.188}$$

Et aussi, par définition de $\psi$ :

$$\psi(t,b) = \psi_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,b)ds = \psi_0 + \int_{t_0}^{t} Df_{(s,y_b(s))} \circ \psi(s,b) \tag{30.189}$$

En appliquant à $h$ et en se souvenant que $\psi_0 = \mathrm{Id}$,

$$\psi(t,b)h = h + \int_{t_0}^{t} \Big(Df_{s,y_b(s)} \circ \psi(s,b)\Big)h\, ds. \tag{30.190}$$

Puis on peut faire un calcul assez classique en se souvenant que $\theta(t_0,h) = h$ :

$$\theta(t,h) = \theta(t_0,h) + \int_{t_0}^{t} \big[\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,b+h) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,b)\big]ds \tag{30.191a}$$

$$= h + \int_{t_0}^{t} \big[f\big(s,y_{b+h}(s)\big) - f\big(s,y_b(s)\big)\big]ds. \tag{30.191b}$$

On fait la différence entre les deux :

$$\theta(t,h) - \psi(t,b)h = -\int_{t_0}^{t} \big[Df_{s,y_b(s)} \circ \psi(s,b)h - f\big(s,y_{b+h}(s)\big) + f\big(s,y_b(s)\big)\big]ds. \tag{30.192}$$

Nous y ajoutons et soustrayons $Df_{s,y_b(s)}\theta(s,h)$ et nous retenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\|\theta(t,h) - \psi(t,b)h\| \leqslant &\int_{t_0}^{t} \|Df_{(s,y_b(s))}\psi(s,b) - Df_{(s,y_b(s))}\theta(s,h)\|ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \|f(s,y_{b+h}(s)) - f(s,y_b(s)) + Df_{(s,y_b(s))}\theta(s,h)\|ds.\end{aligned} \tag{30.193}$$

Nous allons encore majorer ces deux termes séparément. Soit $\epsilon > 0$.

**Premier terme** Ce qui est dans la norme à majorer est

$$Df_{(s,y_b(s))}\big(\psi(s,b)h-\theta(s,h)\big). \tag{30.194}$$

Vu que $Df$ est continue et que $y_b$ est continue [7], l'application $s\mapsto Df_{s,y_b(s)}$ est continue et donc de norme majorée sur le compact $[t_0,t]$. Nous rapellons la notation

$$a(t_0,t,b)=\max_{s\in[t_0,t]}\|Df_{s,y_b(s)}\|, \tag{30.195}$$

et nous majorons encore et toujours. D'abord

$$\int_{t_0}^{t}\|Df_{(s,y_b(s))}\big(\psi(s,b)h-\theta(s,h)\big)\|ds\leqslant a(t_0,t,b)\int_{t_0}^{t}\|\psi(s,b)-\theta(s,h)\|ds. \tag{30.196}$$

**Deuxième terme** Pour traiter le deuxième terme, nous allons provisoirement noter $x=y_b(s)$ et $y=y_{b+h}(s)$ ; entre autres, $y-x=\theta(s,h)$. Ce qui est écrit dans le second terme de (30.193) est

$$f(s,y)-f(s,x)+Df_{(s,x)}\theta(s,h)=f(s,y)-f(s,x)+Df_{(s,x)}(y-x) \tag{30.197}$$

Comme $D$ ne s'applique pas à la variable $s$, nous pouvons alléger la notation et déduire de la différentiabilité de $f$ qu'il existe un $\eta>0$ tel que $x,y\in W$ avec $\|y-w\|\leqslant\eta$ implique

$$\|f(y)-f(x)-Df_x(y-x)\|\leqslant\epsilon\|y-x\|. \tag{30.198}$$

Prenons $\|h\|\leqslant\eta/C$ (le $C$ de (30.187)) ; en déballant les notations,

$$\|f\big(s,y_{b+h}(s)\big)-f\big(s,y_b(s)\big)-Df_{(s,y_b(s))}\theta(s,h)\|\leqslant\epsilon\|\theta(s,h)\|\leqslant\epsilon C\|h\|. \tag{30.199}$$

**Les deux termes ensemble** En remettant les deux dans (30.193) nous trouvons la majoration

$$\|\theta(t,h)-\psi(t,b)h\|\leqslant|t-t_0|\epsilon C\|h\|+a(t_0,t,v)\int_{t_0}^{t}\|\psi(s,b)h-\theta(s,h)\|ds \tag{30.200}$$

qui est encore de la graine à Grönwall avec

$$\begin{cases} u(t)=\|\theta(t,h)-\psi(t,b)\| & \text{(30.201a)}\\ b(t)=|t-t_0|\epsilon C\|h\| & \text{(30.201b)}\\ a(s)=a(t_0,t,v), & \text{(30.201c)}\end{cases}$$

la troisième étant une fonction constante. Cela donne, pour $t\in[t_0-\tau,t_0+\tau]$,

$$\|\theta(t,h)-\psi(t,b)h\|\leqslant|t-t_0|\epsilon C\|h\|+\int_{t_0}^{t}(s-t_0)\epsilon C\|h\|a(t_0,t,b)\exp\left(\int_{s}^{t}a(t_0,t,b)du\right)ds. \tag{30.202}$$

En valeur absolue, la différence $s-t_0$ est majorée par $\tau$, l'intégrale dans l'exponentielle vaut $(t-s)a(t_0,t,b)$, et restons avec

$$\|\theta(t,h)-\psi(t,b)h\|\leqslant\tau\epsilon C\|h\|+\tau\int_{t_0}^{t}\epsilon C\|h\|a(t_0,t,b)e^{a(t_0,t,b)(t-s)}ds. \tag{30.203}$$

En supposant $t>t_0$ nous pouvons calculer l'intégrale. Si vous m'avez suivi jusqu'ici, vous devriez avoir de tels maux de tête que je vous donne la réponse :

$$\int_{t_0}^{t}a(t_0,t,b)e^{(t-s)a(t_0,t,b)}ds=e^{(t_0-t)a(t_0,t,b)}-1. \tag{30.204}$$

7. Il faut encore réduire les voisinages $V$ et $W$ pour que ceci ait un sens.

En remettant dans l'expression,

$$\|\theta(t,h)-\psi(t,b)h\| \leqslant \tau\epsilon C\|h\| + \epsilon C\|h\|a(t_0,t,b)\tau\big(e^{(t-t_0)}-1\big) = \tau\epsilon C\|h\|e^{(t-t_0)a(t,t_0,b)}. \tag{30.205}$$

Nous pouvons majorer $t-t_0$ par $\tau$ et $a(t,t_0,b)$ par $a(t_0-\tau,t_0+\tau,b)$ pour avoir la majoration

$$\|\theta(t,h)-\psi(t,b)h\| \leqslant \tau\epsilon C\|h\|e^{\tau a(t_0-\tau,t_0+\tau,b)}. \tag{30.206}$$

**Différentiabilité de $\varphi(t,b)$ (fin)** Nous écrivons la définition 12.174 de la différentiabilité : nous voulons vérifier que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t,b+h)-\varphi(t,b)-\psi(t,b)h}{\|h\|}=0. \tag{30.207}$$

Nous remplaçons $\varphi(t,b+h)-\varphi(t,b)$ par $\theta(t,h)$ et prenons la norme avec les majorations données :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\varphi(t,b+h)-\varphi(t,b)-\psi(t,b)h\|}{\|h\|} \leqslant \lim_{h\to 0}\tau\epsilon C e^{\tau e(t_0-\tau,t_0+\tau,b)}. \tag{30.208}$$

Cela étant valable pour tout $\epsilon$, nous en déduisons la nullité de la limite.

Nous avons démontré que $\varphi$ était différentiable par rapport à sa deuxième variable et que

$$D\varphi_{(t,b)} = \psi(t,b). \tag{30.209}$$

**Conclusion : $\varphi$ est de classe $C^1$** Nous avons déjà prouvé que $(t,b)\mapsto\psi(t,b)$ est continue. Donc de (30.209) nous déduisons que les dérivées partielles $(t,b)\mapsto\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,b)$ sont continues. Mais comme $\varphi$ est Lipschitz en $t$, la dérivée partielle $(t,b)\mapsto\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,b)$ est également continue. La continuité de toutes les dérivées partielles de $\varphi$ nous donne la classe $C^1$ pour $\varphi$ par la proposition 12.238.

□

**Proposition 30.29** (Régularité $C^p$ du flot[316])**.**
*Soit un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et un ouvert connexe $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction $f\in C^p\big(I\times\Omega,\mathbb{R}\big)$, ainsi que $a\in\Omega$ et $t_0\in I$.*

*Il existe un voisinage $W\times V=\overline{B(t_0,\tau)}\times\overline{B(a,r)}$ de $(t_0,a)$ dans $I\times\Omega$ et une unique application $\varphi\colon W\times V\to\Omega$ telle que*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)=f\big(t,\varphi(t,x)\big) & \text{(30.210a)}\\ \varphi(t_0,x)=x & \text{(30.210b)}\end{cases}$$

*pour tout $x\in V$.*

*L'application $(t,x)\mapsto\varphi(t,x)$ est de classe $C^p$.*

*Démonstration.* Nous savons déjà par le théorème 30.28 que $(t,x)\mapsto\varphi(t,x)$ est de classe $C^1$. Nous supposons que $f$ est de classe $C^p$ avec $p\geqslant 2$.

Vu que $\varphi$ et $f$ sont de classe $C^1$, nous avons aussi que l'application $(t,x)\mapsto f\big(t,\varphi(t,x)\big)$ est de classe $C^1$. L'équation donne alors immédiatement le fait que

$$(t,x)\mapsto\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) \tag{30.211}$$

est de classe $C^1$.

En ce qui concerne la régularité par rapport aux autres variables, il faudra travailler un peu plus.

**Une équation différentielle pour le flot** Nous allons commencer par un habile jeu d'écriture : la formule

$$\varphi(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} f\big(s,\varphi(s,x)\big)ds \tag{30.212}$$

devient

$$\varphi_t(x) = x + \int_{t_0}^{t} f\big(s,\varphi_s(x)\big)ds. \tag{30.213}$$

Dans le même ordre d'idée nous notons $f_s(x) = f(s,x)$, et ce qui se trouve dans l'intégrale (30.213) n'est autre que la fonction

$$g_s(x) = (f_s \circ \varphi_s)(x). \tag{30.214}$$

Tout cela pour différentier l'égalité (30.213) par la proposition 14.73 :

$$(d\varphi_t)_x = \mathrm{Id} + \int_{t_0}^{t} (dg_s)_x ds \tag{30.215a}$$

$$= \mathrm{Id} + \int_{t_0}^{t} (df_s)_{\varphi_s(x)} \circ (d\varphi_s)_s ds. \tag{30.215b}$$

Nous dérivons ensuite cela par rapport à $t$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((d\varphi_t)_x\Big) = (df_t)_{\varphi_t(x)} \circ (d\varphi_t)_x. \tag{30.216}$$

Cela est une égalité dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Nous introduisons la fonction

$$\begin{aligned} F\colon I \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \Omega &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ (t,A,x) &\mapsto (df_t)_{\varphi_t(x)} \circ A. \end{aligned} \tag{30.217}$$

En fait, à la place de $I$ et $\Omega$ il faut prendre des petits voisinages dans lesquels les choses ont un sens. Ce que dit l'équation 30.216 est que l'application

$$\begin{aligned} A\colon I \times \Omega &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ (t,x) &\mapsto (d\varphi_t)_x \end{aligned} \tag{30.218}$$

vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t}(t,x) = F\big(t,A(t,x),x\big) & \text{(30.219a)} \\ A(t_0,x) = \mathrm{Id}\,. & \text{(30.219b)} \end{cases}$$

**Une autre équation différentielle** Nous n'oublions pas l'équation différentielle pour la dérivée par rapport à $t$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = f\big(t,\varphi(t,x)\big). \tag{30.220}$$

**Réécriture pour la différentielle** Nous allons récrire l'équation (30.219) de façon à ce que le paramètre $x$ soit inclus dans la condition initiale. De cette manière, la solution pourra profiter de la régularité $C^1$ du flot déjà prouvée dans le théorème 30.28.

Soit

$$\begin{aligned} g\colon I \times \big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \Omega\big) &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \Omega \\ \big(t,(A,x)\big) &\mapsto \Big(F(t,a,x),0\Big). \end{aligned} \tag{30.221}$$

Nous posons $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \Omega$ ; c'est cet espace qui va jouer le rôle de $\Omega$. Nous considérons à présent l'équation différentielle suivante pour $z_x\colon I \to E$ :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = z'(t) = g(t,z(t)) = \begin{pmatrix} F\big(t,z_1(t),z_2(t)\big) \\ 0 \end{pmatrix} & \text{(30.222a)} \\ z(t_0) = (\mathrm{Id},x). & \text{(30.222b)} \end{cases}$$

Il devrait y avoir un indice $(\mathrm{Id}, x)$ à $z$ parce que c'est sa condition initiale. La fonction $g$ est de classe $C^p$, donc cette équation admet une unique solution dont le flot est de classe $C^1$. Autrement dit, si $S$ est dans un voisinage de Id, l'application

$$(t, x) \mapsto z(t) \tag{30.223}$$

est de classe $C^1$. Nous allons montrer qu'en posant $A(t, x) = z_1(t)$, nous avons une solution de (30.219) (l'unicité de la solution impose que cette solution est effectivement la différentielle de $d\varphi_t$). D'abord, la seconde ligne de l'équation différentielle est $z_2'(t) = 0$, c'est à dire $z_2(t) = x$ pour tout $t$.

Sachant cela, la première équation devient

$$\begin{cases} z_1'(t) = F\big(t, z_1(t), x\big) & \text{(30.224a)} \\ z_1(t_0) = \mathrm{Id}, & \text{(30.224b)} \end{cases}$$

qui est l'équation différentielle pour $A$. Rappel : il y a partout une dépendance de $z$ en sa condition initiale $x$ que nous n'avons pas écrite pour des raisons de légèreté notionnelle. Il n'en reste pas moins que le flot de l'équation différentielle pour $z$ est $C^1$, c'est à dire que $(t, x) \mapsto z_1(t)$ est de classe $C^1$.

Par conséquent, $(t, x) \mapsto A(t, x)$ est également $C^1$.

**Régularité $C^2$ du flot** Le fait que $A$ soit $C^1$ n'implique pas que le flot le soit parce que le flot suit la même équation différentielle que $A$ ne signifie pas que il soit égal. Il y a un raisonnement à faire.

Le fait est que si $A$ est une solution de (30.219), alors $z(t) = \big(A(t, x), x\big)$ est solution de (30.222). C'est l'unicité de cette dernière qui permet de déduire l'unicité de la solution pour $A$.

Nous avons donc que l'unique solution $A$ du système (30.219) est égale à $A(t, x) = (d\varphi_t)_x$ et est de classe $C^1$ par rapport à $(t, x)$.

Donc $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ est de classe $C^2$.

**Régularité $C^p$** Nous avons vu que le flot de $y' = f(t, y)$ est de classe $C^2$ dès que $f$ est de classe $C^2$. Supposons que $f$ soit de classe $C^p$ et montrons que si le flot est de classe $C^k$ $(k < p)$ alors il est de classe $C^{k+1}$.

Vu que le flot d'une équation différentielle de classe $C^p$ est de classe $C^k$, en particulier celui de (30.222) est de classe $C^k$. Donc aussi la solution pour $A(t, x) = (d\varphi_t)_x$ est de classe $C^k$. Et vu que $(t, x) \mapsto (d\varphi_t)_x$ est de classe $C^k$, l'application $\varphi$ est de classe $C^{k+1}$.

□

**30.30.**

Le théorème d'inversion locale 18.47 nous permet de dire que, pour $t$ fixé, le flot $x \mapsto \varphi_t(x)$ est un $C^p$-difféomorphisme local.

**Proposition 30.31** (Cauchy-Lipschitz avec paramètre, régularité $C^p$[317, 318, 319])**.**
*Soit un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$, un connexe ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ et un intervalle ouvert $\Lambda$ de $\mathbb{R}^d$. Soit une fonction $f \in C^p(I \times \Omega \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ localement Lipschitz en $\Omega$. Soient $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$ et $\lambda_0 \in \Lambda$. Il existe un voisinage compact de $(t_0, y_0, \lambda_0)$ sur lequel le problème*

$$\begin{cases} y_\lambda'(t) = f\big(t, y_\lambda(t), \lambda\big) & \text{(30.225a)} \\ y_\lambda(t_0) = y_0 & \text{(30.225b)} \end{cases}$$

*possède une unique solution. De plus $(t, \lambda) \mapsto y_\lambda(t)$ est de classe $C^p$ par rapport à ses deux variables.*

*Démonstration.* Nous récrivons immédiatement le problème pour la fonction $y\colon I \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ donné par $y(t, \lambda) = y_\lambda(t)$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) = f\big(t, y(t, \lambda), \lambda\big) & \text{(30.226a)} \\ y(t_0) = y_0. & \text{(30.226b)} \end{cases}$$

Nous allons montrer que ce problème est en réalité équivalent à un problème sans paramètre. Nous posons $E = \Omega \times \Lambda$ et

$$\begin{aligned} g\colon I \times E &\to E \\ (t,x) &\mapsto \big(f(t,x_1,x_2),0\big) \end{aligned} \tag{30.227}$$

où $x_1$ est la composante $\Omega$ de $x$ et $x_2$ est la composante $\Lambda$ de $x$. Pour une valeur $\mu \in \Lambda$ donnée nous considérons le problème au condition initiales

$$\begin{cases} x'(t) = g\big(t,x(t)\big) & \text{(30.228a)} \\ x(t_0) = (y_0,\mu). & \text{(30.228b)} \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz que nous prenons sous la forme 30.29 nous indique que ce problème admet une unique solution maximale et que le flot $\big(t,(y_0,\mu)\big) \mapsto x_{(y_0,\mu)}(t)$ est de classe $C^p$.

Nous passons maintenant à la résolution du problème (30.226)

**Existence d'une solution $C^1$** Nous montrons à présent que la fonction $y$ donnée par

$$y(t,\mu) = x_{(t_0,\mu)}(t)_1 \tag{30.229}$$

est solution de (30.226). Vu que $x$ a deux composantes, nous pouvons un peu déballer l'équation. Afin d'éviter les notations laborieuses nous allons noter $x$ pour $x_{(t_0,\mu)}$ et donc $x_1(t)$ pour $x_{(t_0,\mu)}(t)$. Nous avons l'équation différentielle

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\big(t,x_1(t),x_2(t)\big) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30.230}$$

avec la condition initiale

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \mu \end{pmatrix}. \tag{30.231}$$

La seconde ligne de l'équation donne immédiatement $x_2(t) = \mu$ pour tout $t$. En injectant dans la première ligne :

$$x_1'(t) = f\big(t,x_1(t),\mu\big). \tag{30.232}$$

Or vue la définition de $y$, le nombre $x_1'(t)$ n'est autre que $\frac{\partial y}{\partial t}(t,\mu)$. La fonction $y$ que nous avons définie vérifie donc

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,\mu) = f\big(t,y(t,\mu),\mu\big) \tag{30.233}$$

et la condition initiale $y(t_0) = x_1(t_0) = y_0$. Elle est donc bien solution du problème initial. De plus l'application $(t,\mu) \mapsto y(t,\mu) = x_{(t_0,\mu)}(t)_1$ est de classe $C^p$.

**Unicité** Pour l'unicité, soit on invoque la proposition 18.40 qui donne l'unicité dans les fonctions continues et a fortiori dans les fonctions $C^1$. Soit on fait le jeu inverse : on prouve qu'à chaque solution de (30.226) correspond une solution de (30.228), et l'unicité de la solution $x$ donne l'unicité du côté de $y$.

□

**Lemme 30.32.**
*Soit le problème*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial s}(s) = f\big(y(s),s\big) & \text{(30.234a)} \\ y(t) = x & \text{(30.234b)} \end{cases}$$

*avec $t$ et $x$ fixés. Nous supposons que $f$ est de classe $C^p$.*

*Alors l'application $t \mapsto y_x(s)$ est de classe $C^p$.*

*Démonstration.* Soit $t$ fixé, et l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s}(s)a- = f\big(z(s), t-s\big) & (30.235a) \\ z(0) = x. & (30.235b) \end{cases}$$

Par le théorème 30.29, La solution $z$ est de classe $C^p$ en $(s, x)$. En posant $y(s) = z(t-s)$ il est vite vérifié que $y$ est solution de (30.234). C'est alors bien de classe $C^p$ en $t$. □

### 30.8.4 Stabilité de Lyapunov

**Définition 30.33.**
*Dans le cas de l'équation différentielle $y'(t) = f\big(y(t), t\big)$ pour $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, un point $a \in \mathbb{R}^n$ est un* ***point d'équilibre*** *lorsque la fonction constante $y(t) = a$ est une solution.*

*Le point d'équilibre $a \in \mathbb{R}^n$ est* ***stable*** *si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|y(0) - a\| < \delta$ implique $\|y(t) - a\| < \epsilon$ pour tout $t$.*

**Théorème 30.34** (Théorème de stabilité de Lyapunov[1, 320, 117, 312])**.**
*Soit l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) = f(y) & (30.236a) \\ y(0) = y_0 & (30.236b) \end{cases}$$

*avec une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ vérifiant $f(0) = 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous supposons que l'application linéaire $df_0$ n'a que des valeurs propres dont la partie réelle est strictement négative.*

*Alors*

*(1) Il existe $k > 0$ tel que si $\|y_0\| < k$ alors la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$,*

*(2) pour le même nombre $k > 0$, si $\|y_0\| < k$ alors $y(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ exponentiellement vite,*

*(3) la solution $y = 0$ est un point d'équilibre attractif.*

*Démonstration.* Placer ici une phrase intelligente[8].

**Prolégomène** Le théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37 nous enseigne que l'équation différentielle considérée possède une unique solution maximale (entre autres parce qu'une fonction de classe $C^1$ est localement Lipschitz) et nous nommons $J$ l'intervalle sur lequel elle est définie.

**Système linéarisé** Nous posons $A = df_0$. La fonction $y_L(t) = e^{tA}y_0$ est solution du système linéarisé

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) & (30.237a) \\ y(0) = y_0. & (30.237b) \end{cases}$$

Pour évaluer la norme de $y_L$ nous utilisons le lemme 15.94 : il existe un polynôme $P$ tel que

$$\|y_L(t)\| \leqslant P\big(|t|\big) \sum_{i=1}^{r} e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\|y_0\|. \tag{30.238}$$

Mais par hypothèse, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ et si nous posons $\lambda = \max\{\operatorname{Re}(\lambda_i)\}$ nous avons $\lambda < 0$ et

$$\|y_L(t)\| \leqslant P\big(|t|\big)e^{\lambda t}\|y_0\|. \tag{30.239}$$

Donc quel que soit $y_0$ nous avons $\lim_{t\to\infty} \|y_L(t)\| = 0$ c'est à dire $\lim_{t\to\infty} y_L(t) = 0$.

8. Parce que sinon l'environnement `description` qui suit donne un mauvais effet.

**Une forme linéaire** Nous définissons la forme bilinéaire suivante sur $\mathbb{R}^n$ :

$$b(x,y)=\int_0^\infty \langle e^{tA}x,e^{tA}y\rangle dt. \tag{30.240}$$

D'abord cela est bien défini pour tout $x,y\in\mathbb{R}^n$ parce que

$$\big|\langle e^{tA}x,e^{tA}y\rangle\big|\leqslant \|e^{tA}x\|\|e^{tA}y\|\leqslant P_1\big(|t|\big)P_2\big(|t|\big)e^{2\lambda t}\|x\|\|y\|, \tag{30.241}$$

qui est intégrable entre 0 et $\infty$ à cause de la décroissance exponentielle[9]. Montrons que $b$ est définie positive. Soit donc $x\neq 0$ et calculons

$$b(x,x)=\int_0^\infty \|e^{tA}x\|^2dt. \tag{30.242}$$

Ce qui est dans l'intégrale est forcément (pas strictement) positif pour tout $t$. Mais si $x\neq 0$ alors $\|x\|^2$ est strictement positif et sur un voisinage de $t=0$ nous avons aussi $\|e^{tA}x\|^2$ qui est strictement positif. Ergo $b(x,x)>0$ dès que $x\neq 0$, ce qui signifie que $b$ est strictement définie positive (lemme 9.170).

Nous notons $q\colon V\to\mathbb{R}$ la forme quadratique associée à $b$ et aussi la norme qui va avec : $\|x\|_q=\sqrt{q(x)}$. En ce qui concerne le gradient $\nabla q\colon V\to V$, nous avons la formule $\nabla q(x)\cdot y=2b(x,y)$[320]. En effet, nous utilisons une des nombreuses formules du lemme 12.178[10] :

$$\begin{aligned}\nabla q(x)\cdot y&=\frac{d}{dt}\Big[q(x+ty)\Big]_{t=0} &(30.243a)\\ &=\frac{d}{dt}\Big[q(x)+t^2q(y)+2tb(x,y)\Big]_{t=0} &(30.243b)\\ &=2b(x,y). &(30.243c)\end{aligned}$$

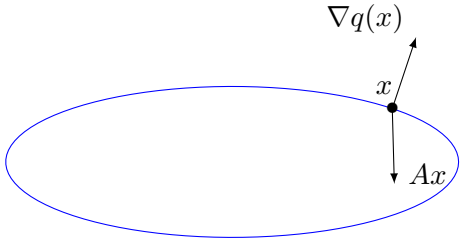
Nous avons aussi

$$\begin{aligned}\nabla q(x)\cdot Ax&=2b(x,Ax) &(30.244a)\\ &=2\int_0^\infty \langle e^{tA}x,e^{tA}Ax\rangle &(30.244b)\\ &=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\Big(\langle e^{tA}x,e^{tA}x\rangle\Big)(t)dt &(30.244c)\\ &=\lim_{T\to\infty}\Big[\langle e^{tA}x,e^{tA}x\rangle\Big]_{t=0}^{t=T}. &(30.244d)\end{aligned}$$

Mais vu que $\|e^{tA}x\|\to 0$, pour $t\to\infty$ il ne reste que terme $t=0$ de la différence, c'est à dire

$$\nabla q(x)\cdot Ax=2b(x,Ax)=-\|x\|^2. \tag{30.245}$$

Étant donné que $\nabla q(x)$ est le vecteur dirigé vers l'extérieur de l'ellipsoïde de la courbe de niveau de $q$ au point $x$, le vecteur $Ax$ est dirigé vers l'intérieur.




9. Proposition 15.67.
10. Le fait que $q$ soit différentiable est simplement le fait que $b$ soit bilinéaire.

**Majoration de $q\big(y(t)\big)'$** Nous posons

$$\begin{aligned} r\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) - Ax. \end{aligned} \tag{30.246}$$

Soit $y$ la solution maximale au problème (30.236) que nous pouvons aussi écrire sous la forme

$$y'(t) = r\big(y(t)\big) + Ay(t). \tag{30.247}$$

Calculons un peu ...

$$\begin{aligned} q\big(y(t)\big)' &= b\big(y(t), y(t)\big)' && \text{(30.248a)}\\ &= 2b(y, y') && \text{(30.248b)}\\ &= 2b\big(y, Ay\big) + 2b\big(y, r(y)\big) && \text{(30.248c)}\\ &= -\|y\|^2 + 2b\big(y, r(y)\big) && \text{(30.245) avec } x = y(t) \quad \text{(30.248d)}\\ &\leqslant -\|y\|^2 + 2\|y(t)\|_q \|r\big(y(t)\big)\|_q && \text{Cauchy-Schwarz : } |b(a,b)| \leqslant \|a\|_q\|b\|_q. \quad \text{(30.248e)} \end{aligned}$$

Chacun des deux termes peut encore être majoré. En ce qui concerne le premier, par équivalence des normes[11], il existe une constante $C$ telle que $\|y\| \geqslant C\|y\|_q$. En renommant immédiatement $C^2$ en $C$, $\|y\|^2 \geqslant C\|y\|_q^2 = Cq(y)$.

Pour le second, nous allons utiliser la différentiabilité de $r$ et le théorème des accroissements finis. Vu que $df_0 = A$ nous avons $dr_0 = df_0 - A = 0$ et de plus $r$ est de classe $C^1$ parce que $f$ l'est. Toutes les normes étant équivalentes[12] sur $\mathbb{R}^n$ nous pouvons exprimer la continuité de $dr$ pour la norme $\|.\|_q$ : si $\epsilon > 0$ est fixé alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\| < \alpha$ implique $\|dr_x\|_q < \epsilon$. Nous pouvons écrire les accroissements finis[13] pour la fonction $r$ :

$$\|r(x) - r(0)\|_q \leqslant \sup_{a\in[0,x]} \|df_a\|\|x\|_q. \tag{30.249}$$

La chose facile à remarquer est que $r(0) = f(0) = 0$. En ce qui concerne les choses difficiles, vu que $dr$ est continue (parce que $r$ est $C^1$) il existe un $\delta > 0$ tel que $\|dr_a\|_q < \epsilon$ dès que $a \in B_q(0, \delta)$. Si nous prenons $\|x\|_q < \delta$ alors cette majoration est valable pour tous les éléments sur lequel est pris le supremum dans la formule (30.249). Donc

$$\|r(x)\|_q \leqslant \epsilon\|x\|_q \tag{30.250}$$

tant que $\|x\|_q \leqslant \delta$. Par conséquent, tant que $\|y(t)\|_q \leqslant \delta$ nous avons $\|r\big(y(t)\big)\| \leqslant \epsilon\|y(t)\|_q$. Nous continuons le calcul (30.248) :

$$\begin{aligned} q\big(y(t)\big)' &\leqslant Cq(y) + 2\epsilon\|y(t)\|_q^2 && \text{(30.251a)}\\ &= -(C - 2\epsilon)q(y). && \text{(30.251b)} \end{aligned}$$

Si $\epsilon$ est petit on a $C - 2\epsilon > 0$ et on pose $\beta = C - 2\epsilon$ pour écrire

$$q\big(y(t)\big)' \leqslant -\beta q\big(y(t)\big) \tag{30.252}$$

tant que $\|y(t)\|_q < \delta$.

**Si $q(y_0) < \delta$ alors $q\big(y(t)\big) < \delta$** Nous posons[14]

$$\begin{aligned} t_1 &= \min\{t > 0 \text{ tel que } q\big(y(t)\big) = \delta\} && \text{(30.253a)}\\ t_2 &= \max\{t < 0 \text{ tel que } q\big(y(t)\big) = \delta\}. && \text{(30.253b)} \end{aligned}$$

11. Définition 10.1 et théorème 10.3.
12. Théorème 10.3.
13. Théorème 12.229.
14. $t_1$ est bien définit et est bien un minimum. J'en veux pour preuve[15] que si $q\big(y(t_s)\big) = \delta$, on peut prendre le minimum seulement sur les $t \in [0, t_s]$ ; or par continuité $q\big(y(t)\big) = \delta$ définit un fermé. Bref $t_1$ est un infimum sur un compact (fermé borné) et donc bien un minimum atteint.

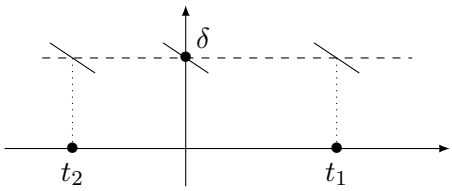
L'inégalité (30.252) est valable pour $t = 0$, $t = t_1$ et $t = t_2$ ; nous l'écrivons pour $t_1$ :

$$q\big(y(t)\big)'_{t=t_1} \leqslant -\beta q\big(y(t_1)\big) \leqslant -\beta\delta < 0 \tag{30.254}$$

Nous avons donc $q\big(y(t_1)\big) = \delta$ et $q\big(y(t)\big)'_{t=t_1} < 0$. Par conséquent pour tout $t$ proche de $t_1$ avec $0 < t < t_1$ il y a $q\big(y(t)\big) > \delta$.

Pour la même raison, prise en $t = 0$ nous avons pour tout $t$ proche de 0 avec $t > 0$ que $q\big(y(t)\big) < \delta$. Par continuité de $t \mapsto q\big(y(t)\big)$ cette fonction doit passer par la valeur $\delta$ dans $]t_2, 0[$ et $]0, t_1[$, ce qui contredit la maximalité de $t_2$ et la minimalité de $t_1$.

Ci-dessous, une partie de ce à quoi ressemble le graphe de $t \mapsto q\big(y(t)\big)$ :




Deux conclusions :

— Vu que $q\big(y(t)\big)$ est borné pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous sommes dans le cas (1) de l'alternative du théorème d'explosion en temps fini 30.18. Donc la solution $y(t)$ existe sur tout $\mathbb{R}$ pourvu que $\|y_0\|$ soit assez petit. Plus précisément par équivalence des normes, il existe un nombre $D > 0$ tel que $\|x\| \geqslant D\|x\|_q$ pour tout $x$. Si $\|y_0\| \leqslant D\delta$ alors

$$D\|y_0\|_q \leqslant \|y_0\| \leqslant D\delta, \tag{30.255}$$

qui donne immédiatement $\|y_0\|_q \leqslant \delta$, ce qui faut pour faire fonctionner l'existence de $y(t)$ pour tout $t$.

— Nous pouvons maintenant d'utiliser l'inégalité (30.252) pour tout $t \in \mathbb{R}$ sous la seule hypothèse que $q(y_0) < \delta$ au lieu de $q\big(y(t)\big) < \delta$.

La partie (1) de ce théorème est prouvée ; nous passons au reste à la partie (2). Pour cela nous supposons que $q(y_0) < \delta$.

**À propos de $e^{\beta t}q(y)$** En sous-entendant la dépendance en $t$ dans $y$ nous avons

$$\Big(e^{\beta t}q(y)\Big)' = \beta e^{\beta t}q(y) + e^{\beta t}q(y)' = e^{\beta t}\big(\beta q(y) + q(y)'\big), \tag{30.256}$$

mais nous avons déjà prouvé que $q(y)' \leqslant -\beta q(y)$ (équation (30.252)), donc

$$\Big(e^{\beta t}q(y)\Big)' \leqslant 0 \tag{30.257}$$

**Décroissance exponentielle** Si $t \geqslant 0$, l'inégalité (30.257) donne

$$e^{\beta t}q\big(y(t)\big) \leqslant q(y_0), \tag{30.258}$$

c'est à dire

$$q\big(y(t)\big) \leqslant e^{-\beta t}q(y_0) \tag{30.259}$$

lorsque $t \geqslant 0$. Par équivalence des normes, nous avons des nombres $D_1$ et $D_2$ tels que

$$D_1\|x\|_q \leqslant \|x\| \leqslant D_2\|x\|_q \tag{30.260}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Nous avons donc pour tout $t \geqslant 0$ que

$$\|y(t)\| \leqslant D_2\|y(t)\|_q \leqslant D_2\|y_0\|_q e^{-\beta t}. \tag{30.261}$$

Pour rappel, $\beta > 0$, ce qui prouve la partie (2) du théorème.

**Point d'équilibre** Le point $y = 0$ est point d'équilibre (définition 30.33) parce que $f(0) = 0$, donc $y(t) = 0$ fonctionne. Dans ce cas, $y_0 = 0$.

**Stabilité** La stabilité est le fait que $\|y(t)\|_q \leqslant \delta$ dès que $\|y_0\|_q \leqslant \delta$.

□

### 30.8.5 Système proie et prédateurs : Lokta-Voltera

Le système de **Lokta-Voltera** est l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy & (30.262a) \\ y' = -cy + dxy & (30.262b) \end{cases}$$

où $a, b, c, d$ sont des constantes positives et avec la condition $x(t_0) > 0$, $y(t_0) > 0$.

En ce qui concerne l'interprétation des équations[321],

(1) $x(t)$ est le nombres proies
(2) $y(t)$ est le nombres prédateurs
(3) Les proies ont une reproduction rapide qui mène à une croissance exponentielle en absence de prédation (d'où le terme $ax$).
(4) Au contraire, les prédateurs meurent (ou migrent) rapidement lorsqu'ils n'ont pas de proies et nous supposons une décroissance exponentielle du nombre de prédateurs en l'absence de proies. D'où le terme $-cy$ avec le signe négatif.
(5) Les termes $-bxy$ et $dxy$ sont les termes d'interaction entre le proies et les prédateurs. Ils sont proportionnels à la fréquence de leurs rencontres, lesquelles sont avantageuses pour les prédateurs et problématiques pour les proies.

**Théorème 30.35** (Lokta-Voltera[117])**.**
*Soient des constantes positives $a, b, c, d$ et le système équations différentielles*

$$\begin{cases} x' = ax - bxy & (30.263a) \\ y' = -cy + dxy & (30.263b) \\ x(t_0) > 0, y(t_0) > 0. & (30.263c) \end{cases}$$

*Alors*

*(1) Les solutions sont positives sur leur domaines.*
*(2) Les solutions existent sur $\mathbb{R}$.*
*(3) Les solutions sont périodiques.*

*Démonstration.* Nous divisions la preuve.

**Comment théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique** Tel quel, le théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37 ne s'applique pas parce qu'il demande une condition initiale pour avoir unicité. En ce qui concerne les notations, ce qui est noté «$y$» dans le théorème est ici le couple $x, y$ et la fonction $f$ est alors

$$f(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}. \quad (30.264)$$

C'est une fonction continue localement Lipschitz partout par le lemme 12.249 et la proposition 12.248.

Nous savons cependant que les solutions sont de classe $C^1$ et que moyennant la donnée d'une condition initiale, la solution est unique.

**Les solutions restent positives** Supposons $x(s) = 0$ pour un certain $s > t_0$. Alors le solution

$$\begin{cases} x(t) = 0 & (30.265a) \\ y(t) = \exp(-ct) & (30.265b) \end{cases}$$

est une solution pour $[t_0, s + \epsilon]$. Par unicité de la solution avec condition initiale $s(s) = 0$, nous avons aussi $x(t_0) = 0$ pour toutes les solutions, ce qui contredit notre condition.

De la même façon, avoir $y(s) = 0$ donne une solution avec $y(t) = 0$ pour tout $t$ et donc une contradiction.

**Solutions sur $\mathbb{R}$** Nous montrons maintenant que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Nous avons $x' < ax$, donc pour tout $t$ où la solution est définie,

$$0 < x(t) < x(t_0)e^{a(t-t_0)}, \tag{30.266}$$

c'est à dire que la solution ne peut pas exploser en temps fini [16] : elle est bornée par le haut et le bas. Elle doit donc exister pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $y' < dxy$ donc

$$0 < y(t) < y(t_0)e^{d\int_{t_0}^{t} x(s)ds} \tag{30.267}$$

qui est également contraire à l'explosion en temps fini.

**4 zones : monotonie** Nous divisons $\mathbb{R}^2$ en quatre zones d'après les signes de $a - by$ et $c - dx$. Nous montrons que dans chacune de ces zones, les solutions sont monotones. Prenons par exemple la partie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a - by > 0\} \times \{c - dx < 0\}. \tag{30.268}$$

Vu l'équation $x' = x(a - by)$, tant que $\big(x(t), y(t)\big)$ est dans cette zone, la fonction $x'$ a le signe de $x$ et est donc positive. Donc $x$ est croissante dans cette zone.

De la même façon, $y' = -y(c - dx)$ est $y'$ a un signe constant dans la zone.

**4 zones : on bouge** Nous prouvons à présent qu'une solution ne reste pas dans une zone.

(1) Supposons que $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ soit dans la zone

$$\{a - by > 0\} \quad \times \quad \{c - dx > 0\} \tag{30.269a}$$
$$x' > 0 \qquad\qquad y' < 0 \tag{30.269b}$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$). Nous avons en particulier $x' > 0$, donc $x$ est croissante tout en ayant la borne supérieure $x < c/d$. Par conséquent $x$ a une limite que nous appelons $x_1 \in [0, \frac{c}{d}]$.

De la même façon, ; $y$ est décroissante et bornée vers le bas par zéro. Donc $y$ a une limite que nous notons $y_1 \in [0, y(t_0)]$.

Vu que $x$ est bornée et de classe $C^1$ nous avons forcément $\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$. Mais vu que $x' = ax - bxy$ nous devons avoir

$$ax_1 - bx_1y_1 = 0. \tag{30.270}$$

Mais ni $x_1 > 0$ donc $a - by_1 = 0$, ce qui donne $y_1 = \frac{a}{b}$ et aussi $x_1 = \frac{c}{d}$. Bref, $y$ est décroissante et tend vers $a/b$ ; donc $y(t_0) > a/b$, ce qui contredit que $y(t_0)$ soit dans la zone considérée.

Étant donné que $x' > 0$ et $y' < 0$, la solution sort de la zone pour entrer dans la zone ...

(2) Supposons que $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ soit dans la zone

$$\{a - by > 0\} \quad \times \quad \{c - dx < 0\} \tag{30.271a}$$
$$x' < 0 \qquad\qquad y' > 0 \tag{30.271b}$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$). Les fonctions $x$ et $y$ sont convergentes. Par conséquent $\ln(y)$ converge aussi et vu que $x$ est croissante,

$$\frac{y'}{y} = -c + dx \geqslant -x + dx(t_0) > 0 \tag{30.272}$$

Cela signifie que $\ln(y)'$ est toujours positive et bornée par le bas. Cela est impossible si $y$ est borné.

Donc on sort de la zone pour entrer dans ...

16. Voir le corollaire 30.18.

(3) Supposons que $\big(x(t_0),y(t_0)\big)$ soit dans la zone

$$\{a-by<0\} \quad \times \quad \{c-dx<0\} \tag{30.273a}$$
$$x'<0 \qquad\qquad y'>0 \tag{30.273b}$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t>t_0$).

Le même type de raisonnement fait passer à la zone...

(4) Supposons que $\big(x(t_0),y(t_0)\big)$ soit dans la zone

$$\{a-by<0\} \quad \times \quad \{c-dx>0\} \tag{30.274a}$$
$$x'<0 \qquad\qquad y'<0 \tag{30.274b}$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t>t_0$). Encore une fois, cela nous fait sortir de la zone et retourne vers la première zone.

À ce moment nous voyons déjà que la relation entre proie et prédateurs, c'est un peu le mythe de Sisyphe

**Une intégrale première** Posons la fonction

$$H(x,y)=by+dx-a\ln(y)-c\ln(x). \tag{30.275}$$

Une simple dérivation montre que $x\mapsto H\big(x(t),y(t)\big)$ est constante. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ s&\mapsto H\big(\frac{c}{d},s\big)\end{aligned} \tag{30.276}$$

dont la dérivée n'est autre que $f'(s)=b-\frac{a}{s}$. La fonction $f$ est donc décroissante sur l'intervalle $[\frac{a}{b},\infty[$ et donc injective. Sur les changements de zones, il existe un $t_0$ tel que

$$x(t_0)=\frac{d}{c} \tag{30.277a}$$
$$y(t_0)>0. \tag{30.277b}$$

Pour cette valeur $t_0$ nous avons alors $H\big(x(t_0),y(t_0)\big)=f\big(y(t_0)\big)$. En posant $s_0=y(t_0)>0$ nous avons

$$H(x_0,y_0)=f(s_0) \tag{30.278}$$

et $f$ étant injective, ce $s_0$ est la seule valeur de $s$ à vérifier $H(x_0,y_0)=f(s)$.

**Conclusion** La fonction $x$ passant d'une zone à l'autre, il existe un $t_1>t_0$ tel que $x(t_1)=a/b$. Nous avons évidemment

$$H\big(x(t_1),y(t_1)\big)=H(x_0,y_0) \tag{30.279}$$

parce que $H$ est constante le long du mouvement. Cela se traduit par

$$H\big(\frac{a}{b},y(t_1)\big)=f(s_0), \tag{30.280}$$

et donc $y(t_1)=f(s_0)=y(t_0)$. Avec tout cela nous avons

$$\begin{cases} y(t_1)=y(t_0) & \text{(30.281a)}\\ x(t_1)=x(t_2)=\frac{a}{b}. & \text{(30.281b)}\end{cases}$$

Cela est donc un point par lequel la solution repasse. Par unicité de la solution, elle est donc périodique.

□

## 30.9 Équation du second ordre

### 30.9.1 Wronskien

Nous considérons ici une équation différentielle de la forme

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0 \tag{30.282}$$

Dans ce point nous allons considérer la fonction $q$ sans hypothèse de périodicité. L'équation de Hill (sous-section 30.9.4) sera la même équation, mais en supposant que $q$ est périodique.

Nous commençons par argumenter que si $q$ est continue, alors l'ensemble des solutions de l'équation (30.282) est un espace vectoriel de dimension deux. Pour cela il suffit d'appliquer la méthode de réduction de l'ordre (section 30.7) puis le théorème de dimension pour les systèmes linéaires (théorème 30.14). En effet si la fonction $y_1$ est solution de (30.282) si et seulement si le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est solution du système linéaire

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} Y(t). \tag{30.283}$$

Soient deux solutions $y_1$ et $y_2$ de l'équation différentielle. Le **Wronskien** de ces deux solutions est le déterminant

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}. \tag{30.284}$$

Si nous considérons l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{30.285}$$

le Wronskien peut être déterminé sans savoir explicitement $y_1$ et $y_2$ parce que $W = y_1y_2' - y_1'y_2$, et en dérivant,

$$\begin{aligned} W' &= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_1''y_2 - y_1'y_2' && \text{(30.286a)} \\ &= y_1(-py_2' - qy_2) - (-py_1' - qy_1)y_2 && \text{(30.286b)} \\ &= -p \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, && \text{(30.286c)} \end{aligned}$$

c'est à dire

$$W' = -pW. \tag{30.287}$$

Il suffit donc de savoir une condition initiale pour obtenir une équation différentielle pour $W$.

### 30.9.2 Avec second membre

Une équation différentielle du second ordre avec un second membre se présente sous la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = v(t) \tag{30.288}$$

où $v(t)$ est une fonction donnée. Le truc est de commencer par résoudre l'équation différentielle sans second membre, c'est à dire trouver la fonction $y_H(t)$ telle que

$$ay_H''(t) + by_H'(t) + cy_H(t) = 0. \tag{30.289}$$

Cela se fait en utilisant la méthode du polynôme caractéristique.

Ensuite, il faut trouver une solution particulière $y_P(t)$ de l'équation avec le second membre. Une seule. Pour y parvenir, il faut du doigté et un peu de technique. Il faut faire des essais en fonction de ce à quoi ressemble le $v(t)$ :

(1) Si $v(t)$ est un polynôme, alors il faut essayer un polynôme,
(2) Si $v(t) = \cos(\omega t)$ ou bien $v(t) = \sin(\omega t)$, alors essayer $y_P(t) = A\cos(t) + B\sin(\omega t)$,
(3) Si $v(t) = e^{\omega t}$, alors essayer $y_P(t) = Ae^{\omega t}$.

### 30.9.3 Équation $y'' + q(t)y = 0$

Nous allons donner quelque propriété des solutions de l'équation

$$y'' + qy = 0 \tag{30.290}$$

en fonction de telle ou telle hypothèse sur $q$.

**Proposition 30.36.**
*Si $q\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue et si*

$$\int_0^\infty |q(t)|dt \tag{30.291}$$

*converge, alors*

*(1) toute solution bornée de $y'' + qy = 0$ vérifie $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$,*

*(2) l'équation $y'' + qy = 0$ admet des solutions non bornées.*

*Démonstration.* Soit $y$ une solution bornée, et intégrons l'équation différentielle entre 0 et $\infty$ :

$$\int_0^\infty y''(t)dt = -\int_0^\infty q(t)y(t)dt. \tag{30.292}$$

La fonction $y$ étant bornée, l'hypothèse sur $q$ permet de dire que l'intégrale de droite existe. Par ailleurs,

$$\int_0^\infty y'' = \lim_{a\to\infty} \int_0^a y'' = \lim_{a\to\infty} y'(a) - y'(0). \tag{30.293}$$

Cela justifie que la limite $\lim_{t\to\infty} y'(t)$ existe. Posons $\alpha = \lim_{t\to\infty} y'(t)$ et supposons par l'absurde que $\alpha \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$ et $\lambda$ assez grand pour que

$$\|y' - \alpha\|_{[\lambda,\infty[} < \epsilon. \tag{30.294}$$

Soit aussi $x > \lambda$. Nous avons

$$y(x) = y(\lambda) + \int_\lambda^x y'(t)dt \tag{30.295a}$$

$$\geqslant y(\lambda) \int_\lambda^x (\alpha - \epsilon) \tag{30.295b}$$

$$= y(\lambda) + \alpha x - \epsilon\lambda. \tag{30.295c}$$

En prenant la limite des deux côtés on voit que $y(x) \to \infty$ dès que $\alpha \neq 0$, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc $\alpha = 0$.

Pour la seconde partie de la proposition, nous devons prouver que l'équation $y'' + qy = 0$ possède des solutions non bornées. Si l'équation a seulement des solutions bornées et si $\{u, v\}$ est une base de solutions, alors nous avons $u', v' \to 0$. Si nous reprenons l'équation (30.287) avec $p = 0$ nous savons que dans notre cas le Wronskien satisfait à $W' = 0$, c'est à dire qu'il est constant. Mais vu que $u$ et $v$ sont bornées et que les dérivées tendent vers zéro, nous avons $W(t) \to 0$ et donc $W(t) = 0$.

Or l'annulation identique du Wronskien contredit que $\{u, v\}$ serait une base de solutions. Donc il existe des solutions non bornées. □

**Proposition 30.37.**
*Soit l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Si $q$ est $C^1$, strictement positive et croissante, alors toutes les solutions sont bornées.*

*Démonstration.* Soit $y$ une solution et multiplions l'équation par $2y'$ (qui est non nulle par hypothèse) :

$$2y'y'' + 2qy'y = 0. \tag{30.296}$$

Nous allons intégrer cela en nous souvenant que $2y'y''$ est la dérivée de $(y')^2$. Pour tout $t > 0$ nous avons

$$0 = y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2\underbrace{\int_0^t q(t)y'(t)y(t)dt}_{\text{par partie}} \tag{30.297a}$$

$$= y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2\left([qy^2]_0^t - \int_0^t q'y^2\right) \tag{30.297b}$$

$$\tag{30.297c}$$

Le terme qui nous intéresse est celui qui contient $y(t)$ :

$$2q(t)y(t)^2 = -y'(t)^2 + y'(0)^2 + 2q(0)y(0)^2 + 2\int_0^t q'y^2 \tag{30.298}$$

Nous pouvons majorer $-y'(t)^2$ par zéro et remplacer toutes les constantes par $K$ :

$$q(t)y(t)^2 \leqslant \int_0^t q'y^2 + K = \int_0^t \frac{q'}{q}qy^2. \tag{30.299}$$

C'est le moment d'utiliser le lemme de Grönwall 30.4 avec $\phi = qy^2$ et $\psi = q'/q$. Les hypothèses de croissance et de positivité ont été posées exprès. Bref, on a

$$qy^2 \leqslant K\exp\left(\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)}ds\right) \tag{30.300a}$$

$$= K\exp\left(\ln\frac{q(t)}{q(0)}\right) \tag{30.300b}$$

$$= K\frac{q(t)}{q(0)}. \tag{30.300c}$$

Notons que $q(0)$ est strictement positif. Nous déduisons que

$$y^2 \leqslant \frac{K}{q(0)} \tag{30.301}$$

et donc $y$ est bornée. □

### 30.9.4 Équation de Hill

L'équation **de Hill** est une équation différentielle de la forme

$$y'' + qy = 0 \tag{30.302}$$

où

(1) $q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(2) $q$ est paire et $\pi$-périodique

Nous nous intéressons aux solutions complexes de cette équation différentielle.

Nous nommons $W \subset C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des solutions complexes de l'équation (30.302). Nous savons par ce qui a été dit en 30.9.3 que cet espace est de dimension deux. De plus avec le hypothèses faites ici sur $q$, nous savons que les solutions sont de classe $C^3$ parce que si $y$ est une solution, alors l'équation $y'' = qy$ nous indique que $y$ est $C^1$ parce que $y''$ existe ($y'$ est dérivable et donc continue). Mais si $y$ est de classe $C^1$, alors le membre de droite $qy$ est $C^1$ et donc $y''$ est $C^1$, ce qui prouve que $y$ est de classe $C^3$. La récurrence ne va pas plus loin parce que $q$ est seulement de classe $C^1$.

Nous considérons l'application de translation

$$\begin{aligned} T\colon C^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) &\to C^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ (Ty)(x) &= y(x+\pi). \end{aligned} \tag{30.303}$$

En utilisant la règle de dérivation de fonctions composées, $(Ty)' = Ty'$ et $(Ty)'' = Ty''$, de telle sorte que si $u$ est solution de l'équation (30.302), alors $Tu$ est également solution. Donc $W$ est un espace stable par $T$.

Le théorème 30.14 nous permet de choisir une base de $W$ en imposant des conditions. Nous choisissons une base $\{y_1, y_2\}$ telles que

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \quad y_2(0) = 0 \\ y_1'(0) &= 0 \quad y_2'(0) = 1. \end{aligned} \tag{30.304}$$

Le théorème 30.14 nous assure que deux telles solutions existent et qu'elles forment une base de $W$ parce que $W$ est de dimension 2.

**Lemme 30.38.**
*Avec ce choix de base $\{y_1, y_2\}$ la matrice de $T$ est donnée par*

$$T = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}. \tag{30.305}$$

*De plus la fonction $y_1$ est paire et la fonction $y_2$ est impaire.*

*Démonstration.* Cherchons la matrice de $T$ dans cette base en associant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ à $y_1$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à $y_2$. Si $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$Ty_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = ay_1 + cy_2. \tag{30.306}$$

En évaluant cela en $t = 0$,

$$(Ty_1)(0) = ay_1(0) + cy_2(0) = a, \tag{30.307}$$

donc $a = (Ty_1)(0) = y_1(\pi)$. En dérivant (30.306), en tenant compte du fait que $(Ty_1)' = Ty_1'$ et en évaluant en $t = 0$, nous trouvons de même $c = y_1'(\pi)$. Puis le même cinéma avec $y_2$ donne

$$T = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}. \tag{30.308}$$

Passons maintenant à la parité de $y_1$ et $y_2$. Nous posons $\psi(t) = y_1(-t)$. Alors $\psi'(t) = -y_1'(-t)$ et $\psi''(t) = y_1''(t)$, tant et si bien que

$$\psi''(t) + q(t)\psi(t) = y_1''(-t) + q(t)y_1(-t) = 0. \tag{30.309}$$

donc $\psi$ est une solution de l'équation. Mais

$$\begin{cases} \psi(0) = y_1(0) & \text{(30.310a)} \\ \psi'(0) = -y_1'(0) = 0, & \text{(30.310b)} \end{cases}$$

donc $\psi$ a les mêmes conditions initiales que $y_1$. Par conséquent $\psi = y_1$ (par le l'unicité donnée dans le théorème de Cauchy-Lipschitz 18.37) et $y_1$ est paire. Nous procédons de même en partant de $\varphi(t) = -y_2(-t)$ pour trouver que $\varphi = y_2$ et que donc que $y_2$ est impaire.

□

Remémorons nous toutefois, pour calmer toute enthousiasme excessif, que $T$ dépend de deux solutions et donc de la fonction $q$ donnée dans l'équation.

**Proposition 30.39** ([2]).
*Nous considérons l'équation $y'' + qy = 0$ et sa base de solutions $\{y_1, y_2\}$ en suivant les notations données plus haut.*

*(1) Si $|\operatorname{Tr}(T)| < 2$, alors toutes les solutions de l'équation sont bornées.*

*(2) Si $|\operatorname{Tr}(T)| = 2$ alors nous avons une solution non bornée.*

*(3) Si $|\operatorname{Tr}(T)| > 2$ alors toutes les solutions de l'équation sont non bornées.*

*(4) Le cas $|\operatorname{Tr}(T)| = 2$ se présente si et seulement si $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.*

*Démonstration.* Remarquons que le déterminant de la matrice $T$ est égal au Wronskien des solutions $y_1$ et $y_2$ calculé en $t = \pi$. Calculons sa valeur :

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2'. \tag{30.311}$$

En dérivant et en remplaçant $y_i''$ par $-qy_i$, nous trouvons tout de suite $W(y_1, y_2)' = 0$. Donc le Wronskien est constant et il est facile de le calculer en $t = 0$ :

$$W(y_1, y_2)(0) = 1 - 0 = 1. \tag{30.312}$$

Donc pour tout $t$ nous avons $W(y_1, y_2)(t) = 1$. En particulier

$$\det(T) = W(y_1, y_2)(\pi) = 1, \tag{30.313}$$

et notons au passage que $T$ est inversible.

Nous écrivons le polynôme caractéristique de $T$ sous la forme $\chi_T = X^2 - \operatorname{Tr}(T)X + \det(T)$, c'est à dire

$$\chi_T = X^2 - \operatorname{Tr}(T)X + 1, \tag{30.314}$$

dont le discriminant est $\Delta = \operatorname{Tr}(A)^2 - 4$.

Nous passons à présent aux différents points de la proposition.

(1) Si $|\operatorname{Tr}(T)| < 2$, alors $\Delta < 0$ et $\chi_T$ a deux racines complexes conjuguées que nous notons $\rho$ et $\bar{\rho}$. De plus le produit des racines étant le terme indépendant, $\rho\bar{\rho} = 1$ ; en particulier $|\rho| = |\bar{\rho}| = 1$. Notons $\{u, v\}$ une base de vecteurs propres : $Tu = \rho u$ et $Tv = \bar{\rho}v$. Il est vite vu que la fonction $|u|$ est $\pi$-périodique :

$$|u|(t + \pi) = |u(t + \pi)| = |(Tu)(t)| = |(\rho u)(t)| = |\rho||u|(t) = |u|(t). \tag{30.315}$$

La fonction $|u|$ est continue[17] et périodique ergo bornée. La fonction $|v|$ est bornée pour la même raison et par linéarité, toutes les fonctions de $W$ sont bornées.

(2) Si $\operatorname{Tr}(T) = \pm 2$, alors $\Delta = 0$ et $\chi_T$ a une racine réelle double[18] qui doit être $\pm 1$. Soit $u$ un vecteur propre de $T$ pour la valeur propre $\pm 1$. Nous avons

$$|u|(t + \pi) = |Tu(t)| = |\pm u(t)|, \tag{30.316}$$

ce qui prouve encore que $|u|$ est périodique et donc bornée.

Notons que nous n'avons pas d'informations sur le fait qu'une autre solution soit ou non bornée.

(3) Si $|\operatorname{Tr}(T)| > 2$, alors $\chi_T$ a deux racines réelles distinctes $r$ et $r'$ avec $rr' = 1$ (toujours les relations coefficients-racines). En raison de quoi $r' = r^{-1}$ et quitte à échanger $r$ et $r'$ nous supposons $|r| > 1$. L'opérateur est maintenant diagonalisable et nous considérons $\{u, v\}$ une base de vecteurs propres pour les valeurs propres $r$ et $r'$. Une solution non nulle de l'équation s'écrit donc sous la forme

$$y = \alpha u + \beta v \tag{30.317}$$

avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

17. La fonction $u$ elle-même n'est cependant pas garantie d'être périodique.

18. Ce qui n'implique pas le fait d'avoir deux vecteurs propres pour cette valeur propre, mais tout de même au moins un, voir l'exemple 9.127.

— Si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$ et nous choisissons une valeur $t$ telle que $v(t) \neq 0$. Dans ce cas,

$$y(t + n\pi) = \beta v(t + n\pi) = \beta(T^n v)(t) = \beta(r')^n v(t), \tag{30.318}$$

et en faisant $n \to -\infty$ nous obtenons $\pm\infty$ suivant le signe de $\beta$.

— Si $\alpha \neq 0$, alors nous fixons[19] $t$ tel que $u(t) \neq 0$. Alors

$$y(t + n\pi) = \alpha r^n u(t) + \beta(r')^n(t). \tag{30.319}$$

En faisant $n \to \infty$, nous avons $(r')^n \to 0$ tandis que le premier terme tend vers $\pm\infty$ suivant le signe de $\alpha$.

(4) D'abord le théorème de Cayley-Hamilton 9.130 nous indique que $\chi_T(T) = 0$, c'est à dire que

$$T^2 - \mathrm{Tr}(T)T + 1 = 0. \tag{30.320}$$

Nous avons déjà mentionné le fait que $T$ était inversible. Multiplions donc (30.320) par $T^{-1}$ :

$$T + T^{-1} = \mathrm{Tr}(T)\mathbb{1}_2. \tag{30.321}$$

Vu que $T^{-1}$ est l'endomorphisme $T^{-1}u(t) = u(t - \pi)$, sa matrice est donnée par

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix} \tag{30.322}$$

où nous avons utilisé le fait que $y_1$ était paire et $y_2$ impaire (lemme 30.38). Si nous notons $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $T^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ et

$$T + T^{-1} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}. \tag{30.323}$$

L'équation (30.321) donne alors, vu que $\mathrm{Tr}(T) = a + d$,

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix}, \tag{30.324}$$

ce qui donne immédiatement $a = d$. La matrice de $T$ a donc comme forme $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Tr}(T) = 2a$.

Donc $\mathrm{Tr}(T) = \pm 2$ si et seulement si $a = \pm 1$ et vu que $1 = \det(T) = a^2 - bc$, nous avons $a = \pm 1$ si et seulement si $bc = 0$, ce qui signifie exactement $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.

□

## 30.10 Différents types d'équations différentielles

### 30.10.1 Équation homogène

Une équation différentielle **homogène** est une équation de la forme

$$y' = f(t, y) \tag{30.325}$$

où $f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y)$ pour tout $\lambda \neq 0$.

Elle se présente sous la forme

$$y' = \frac{\text{degré } n \text{ en } t, y}{\text{degré } n \text{ en } t, y}, \tag{30.326}$$

avec pas de $y'$ à droite : juste du $y$ et du $t$.

19. Mais pas trop hein ; nous aurons encore besoin d'assigner à $t$ d'autres valeurs dans d'autres théorèmes.

**Lemme 30.40.**
*L'équation $y' = f(t, y)$ est homogène si et seulement si $f(t, y)$ est une fonction de $y/t$ seulement.*

Pour résoudre l'équation homogène, on pose

$$z(t) = \frac{y(t)}{t}, \tag{30.327}$$

donc $tz = y$, et

$$y'(t) = tv'(t) + v(t), \tag{30.328}$$

à remettre dans l'équation de départ.

### 30.10.2 Équation de Bernoulli

C'est une équation du type

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha \tag{30.329}$$

où $\alpha \neq 0$ ou 1. Pour la résoudre, on divise l'équation par $y^\alpha$, et on pose $u = y^{1-\alpha}$, et on tombe sur une équation linéaire

$$u' = (1 - \alpha)\big(a(t)u + b(t)\big). \tag{30.330}$$

### 30.10.3 Équation de Riccati

C'est une équation de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t). \tag{30.331}$$

En général, on ne peut pas la résoudre, mais si on en connaît *a priori* des solutions particulières, alors on peut s'en sortir.

(1) Si on sait que $y_1(t)$ est une solution, alors on pose

$$y(t) = y_1(t) + \frac{1}{u(t)}, \tag{30.332}$$

et on obtient une équation linéaire

$$u' = -\big(2y_1(t)a(t) + b(t)\big)u - a(t). \tag{30.333}$$

(2) Si $y_1$ et $y_2$ sont solutions, alors nous avons $y$ sous forme implicite

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ke^{\int a(t)\left(y_1(t) - y_2(t)\right)dt}. \tag{30.334}$$

Pour résoudre une équation de Ricatti, il faut donc d'abord deviner une ou deux solutions.

### 30.10.4 Équation différentielle exacte

#### 30.10.4.1 Résolution lorsque tout va bien

Avant de vous lancer dans les équations différentielles exacte, vous devez lire la section sur les formes différentielles 12.18. Une équation différentielle exacte est de la forme $P(t, y) + Q(t, y)y' = 0$ que nous allons écrire sous la forme

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0. \tag{30.335}$$

Nous savons que si $\partial_y P = \partial_t Q$, alors il existe une fonction $f(t, y)$ telle que $Pdt + Qdy = df$. Pour trouver une telle fonction, nous pouvons simplement intégrer la forme $Pdt + Qdy$. En effet, si $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ est un chemin tel que $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (t, y)$, alors en définissant

$$f(t, y) = \int_\gamma [Pdt + Qdt] = \int_0^1 \big[(P \circ \gamma)(u)dt + (Q \circ \gamma)(u)\big]\big(\gamma'(u)\big)du, \tag{30.336}$$

nous avons $df = Pdt + Qdy$. N'importe quel chemin fait l'affaire. Calculons avec $\gamma(u) = (tu, yu)$. La dérivée de ce chemin est donnée par

$$\gamma'(u) = t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{30.337}$$

Étant donné que $dt\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a$ et $dy\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = b$, nous avons

$$\begin{aligned} f(t,y) &= \int_0^1 [Pdt + Qdy]\big(\gamma(u)\big)\left(t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)du \\ &= \int_0^1 P\big(\gamma(t)\big)tdu + \int_0^1 Q\big(\gamma(t)\big)ydu \\ &= \int_0^1 \big[tP(tu,uy) + yQ(tu,yu)\big]du. \end{aligned} \tag{30.338}$$

Nous retrouvons exactement la formule (14.303). Si ça t'étonne, c'est que tu n'as pas compris ;) Dans le cas où nous avons la fonction $f$ qui vérifie $P = \partial_t f$ et $Q = \partial_y f$, l'équation (30.335) devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0, \tag{30.339}$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt}\Big[f\big(t, y(t)\big)\Big] = 0, \tag{30.340}$$

dont la solution

$$f\big(t, y(t)\big) = C \tag{30.341}$$

donne la solution $y(t)$ sous forme implicite.

#### 30.10.4.2 Facteur intégrant (quand tout ne va pas bien)

Si la forme $Pdt + Qdy$ n'est pas exacte, il n'existe pas de fonction $f$ qui résolve l'affaire. Nous pouvons toutefois essayer de trouver un **facteur intégrant**. Nous cherchons une fonction $M$ telle que

$$(MP)dt + (MQ)dy \tag{30.342}$$

soit exacte. Nous cherchons donc $M(t,y)$ telle que $\partial_y(MP) = \partial_t(MQ)$. En utilisant la règle de Leibnitz, nous trouvons l'équation suivante pour $M$ :

$$M(\partial_y P - \partial_t Q) = Q(\partial_t M) - P(\partial_y M). \tag{30.343}$$

Cette équation est en générale extrêmement difficile à résoudre, mais dans certains cas particuliers, il est possible d'en trouver une solution à tâtons.

## 30.11 Distributions pour les équations différentielles

Nous commençons par définir l'espace $C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$ en disant que $t \mapsto u_t$ est dans cet espace si

(1) pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons $u_t \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$,

(2) l'application $t \mapsto u_t$ est de classe $C^\infty$.

Pour définir ce que nous entendons par une fonction de classe $C^k$ à valeurs dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ nous nous souvenons de la proposition 28.28.

### 30.11.1 Équation de Schrödinger

**Théorème 30.41** (Équation de Schrödinger[2])**.**
*Soit $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et le problème*

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - i\Delta\tilde{u} = 0 & (30.344a) \\ u_0 = g & (30.344b) \end{cases}$$

*où $\tilde{u} \in C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)\big)$ est lié à $u$ par la remarque 28.50. Alors*

*(1) Il existe une unique solution dans $C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$.*

*(2) Cette solution $u$ vérifie de plus $\tilde{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.*

*Démonstration.* Nous allons donner explicitement une fonction $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$ et nous allons vérifier l'équation (30.344a) en testant sur une fonction $\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Cela prouvera le point (2) ainsi que la partie existence de (1). Dans ce qui suit toutes les transformées de Fourier seront par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^d$ ou par rapport à $\xi$. Jamais par rapport à $t \in \mathbb{R}$.

**Existence** Pour $t \in \mathbb{R}$ nous posons[20]

$$u_t = \mathcal{F}^{-1}(f_t \hat{g}) \tag{30.345}$$

où $f_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $f_t(x) = e^{-it\|x\|^2}$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons

$$u_t(\varphi) = (f\hat{g})\big(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\big) = \hat{g}\big(f\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\big) = g\Big(\mathcal{F}\big(f\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\big)\Big). \tag{30.346}$$

Le fait que $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ soit une fonction Schwartz fait partie de la proposition 27.12. Pour chaque $t$ nous avons bien $u_t \in \mathscr{S}'(\Omega)$.
De plus la fonction $h(t,x) = e^{-it\|x\|^2}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, et par conséquent l'application

$$t \mapsto \hat{g}\big(h(t,.)\big) \tag{30.347}$$

est également $C^\infty$ par la proposition 28.30. Ceci pour dire que $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$. Il faut encore vérifier que cette fonction est bien une solution de notre problème. Nous testons cette équation sur $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Pour alléger les notations nous posons $\psi_t \colon x \mapsto \psi(t,x)$ et par conséquent aussi $(\partial_t\psi_t)(x) = (\partial_t\psi)(t,x)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \heartsuit &= (\partial_t\tilde{u} - i\Delta\tilde{u})(\psi) & (30.348a) \\ &= -\tilde{u}(\partial_t\psi) - i\tilde{u}(\Delta\psi) & (30.348b) \\ &= -\int_{\mathbb{R}} u_t\big((\partial_t\psi_t) + i(\Delta\psi_t)\big)dt & (30.348c) \end{aligned}$$

Ici nous nous souvenons du lemme 27.23 qui nous dit que nous pouvons permuter $\mathcal{F}^{-1}$ et $\partial_t$. Et pour l'autre terme il faut utiliser le lemme 27.11 avec $|\alpha| = 2$ et une somme pour obtenir que

$$\widehat{\Delta\varphi}(x) = -\|x\|^2\hat{\varphi}(x), \tag{30.349}$$

qui dans notre cas s'écrit sous la forme

$$\mathcal{F}^{-1}\Big((\Delta\psi_t)\Big)(x) = -\|x\|^2\mathcal{F}^{-1}\psi(t,x). \tag{30.350}$$

En remettant bout à bout,

$$\begin{aligned} \heartsuit &= -\int_{\mathbb{R}} (f_t\hat{g})\Big((\partial_t - i\|.\|^2)\mathcal{F}^{-1}\psi_t\Big)dt & (30.351a) \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \hat{g}\Big(x \mapsto e^{-it\|x\|^2}(\partial_t - i\|x\|^2)(\mathcal{F}^{-1}\psi)(t,x)\Big)dt & (30.351b) \end{aligned}$$

20. En utilisant la définition (28.27) du produit d'une distribution par une fonction.

Pour alléger les notations nous notons $\check{\psi}_t(x) = (\mathcal{F}^{-1}\psi)(t,x)$. Nous avons

$$\partial_t\Big(e^{-it\|x\|^2}\check{\psi}_t(x)\Big) = -i\|x\|^2 e^{-it\|x\|^2}\check{\psi}_t(x) + e^{-it\|x\|^2}(\partial_t\check{\psi}_t),x) = e^{-it\|x\|^2}\big(\partial_t - i\|x\|^2\big)\check{\psi}_t(x); \tag{30.352}$$

cela nous permet d'un peu factoriser une dérivée dans $\heartsuit$ :

$$\begin{aligned}\heartsuit &= -\int_{\mathbb{R}} \hat{g}\Big(\partial_t\Big(e^{-it\|.\|^2}\check{\psi}_t(.)\Big)\Big)\,dt && (30.353a)\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_t\hat{g}\Big(e^{-it\|.\|^2}\check{\psi}_t(.)\Big)\,dt && (30.353b)\\ &= -\lim_{N\to\infty}\Big[\hat{g}\Big(e^{-i\|.\|^2}\check{\psi}_t(.)\Big)\Big]_{t=-N}^{t=N}. && (30.353c)\end{aligned}$$

Histoire de bien comprendre les notations, il ne s'agit pas de calculer $\hat{g}\big(e^{-it\|.\|^2}\check{\psi}_t\big)$ pour un $t$ général et de remplacer ensuite $t$ par $N$ et $-N$. En effet la valeur de $\hat{g}\big(e^{-it\|.\|^2}\check{\psi}_t\big)$ pour un $t$ donné est celle qu'on obtient en calculant $\hat{g}(\dots)$ après avoir remplacé $t$ par ce que l'on veut. Par conséquent, en posant $\varphi(t,\xi) = e^{-i\|\xi\|^2}\check{\psi}_t(\xi)$ nous avons :

$$\begin{aligned}\heartsuit &= \lim_{N\to\infty}\Big[g\Big(x\mapsto\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(t,\xi)d\xi\Big)\Big]_{t=-N}^{t=N} && (30.354a)\\ &= \lim_{N\to\infty} g\Big(x\mapsto\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(N,\xi)d\xi\Big) - \lim_{N\to\infty} g\Big(x\mapsto\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(-N,\xi)d\xi\Big) && (30.354b)\end{aligned}$$

La limite commute avec $g$ parce que cette dernière est une distribution (continue). De plus la limite commute avec l'intégrale parce que ce qui est dedans est Schwartz. La fonction $\varphi$ étant Schwartz, la limite est nulle. Donc

$$\heartsuit = 0 \tag{30.355}$$

et la fonction $u$ proposée est bien une solution de l'équation de Schrödinger dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$.

**Unicité** Nous considérons deux solutions $u_1,u_2\in C^\infty\big(\mathbb{R},\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$ et la fonction $u=u_1-u_2$ doit satisfaire au problème

$$\begin{cases}(\partial_t\tilde{u} - i\Delta\tilde{u})(\psi) = 0 & (30.356a)\\ u_0 = 0. & (30.356b)\end{cases}$$

Nous allons montrer que seule la fonction $u_t = 0$ peut satisfaire à cela pour tout $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$. Nous allons même montrer qu'en imposant ces équations seulement sur la partie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ qui est à support compact par rapport à $\mathbb{R}$, la seule solution est $u_t=0$. Soit donc $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ à support compact vis-à-vis de sa variable $t$. Alors

$$0 = -\tilde{u}(\partial_t\psi + i\Delta\psi) = -\int_{\mathbb{R}} u_t\Big((\partial_t\psi_t) + i(\Delta\psi_t)\Big)dt \tag{30.357}$$

où encore une fois $\partial_t\psi_t$ est la fonction $x\mapsto(\partial_t\psi)(t,x)$. Maintenant nous utilisons la proposition 28.53 pour dire que

$$\frac{d}{dt}\Big(u_t(\psi_t)\Big) = u_t^{(1)}(\psi_t) + u_t\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,.)\right) \tag{30.358}$$

pour écrire

$$0 = -\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dt}\big(u_t(\psi_t)\big) - u_t^{(1)}(\psi_t) + u_t\big(i(\Delta\psi)(t,.)\big)dt \tag{30.359}$$

Le premier terme est facile :

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dt}\Big(u_t(\psi_t)\Big)dt = \lim_{N\to\infty}\Big[u_t(\psi_t)\Big]_{t=-N}^{t=N} = 0 \tag{30.360}$$

parce que $\psi$ est à support compact par rapport à $t$. Nous restons donc avec

$$\int_{\mathbb{R}} u_t^{(1)}(\psi_t) - iu_t\big((\Delta\psi)(t,.)\big)dt = 0 \tag{30.361}$$

Nous traitons le terme en $u_t^{(1)}$ en utilisant le fait évident $T(\varphi) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$ et en remarquant le lemme 28.54 :

$$u_t^{(1)}(\psi_t) = (\mathcal{F}u_t^{(1)})(\mathcal{F}^{-1}\psi_t) = (\mathcal{F}u)_t^{(1)}(\mathcal{F}^{-1}\psi_t). \tag{30.362}$$

Pour l'autre terme on fait un peu la même chose en nous souvenant ce que fait la transformée de Fourier en traversant le laplacien :

$$u_t(\Delta\psi_t) = (\mathcal{F}u_t)(\mathcal{F}^{-1}\Delta\psi_t) = (\mathcal{F}u_t)\big(x \mapsto -\|x\|^2(\mathcal{F}^{-1}\psi_t)(x)\big). \tag{30.363}$$

En recollant encore :

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}u)_t^{(1)}(\mathcal{F}^{-1}\psi_t) + i(\mathcal{F}u_t)\big(\|.\|^2\mathcal{F}^{-1}\psi_t\big)dt = 0. \tag{30.364}$$

Cette équation est valable tant que $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ avec support compact en $t$. Nous allons nous en créer une super cool. D'abord nous choisissons $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et nous considérons [21]

$$\psi(t,x) = \mathcal{F}\Big(\xi \mapsto e^{it\|\xi\|^2}\varphi(\xi)\chi(t)\Big)(x). \tag{30.365}$$

Notons que la transformée de Fourier conserve le fait qu'une fonction soit Schwartz [22], mais pas le fait d'avoir support compact. Cependant nous ne prenons que la transformée de Fourier par rapport à $x$. Le résultat est donc une fonction $\psi$ qui est Schwartz par rapport à $x$ et support compact par rapport à $t$. Nous pouvons donc écrire (30.364) en utilisant la fonction (30.365) :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}u)_t^{(1)}\Big(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\chi(t)\Big) + i(\mathcal{F}u_t)\Big(x \mapsto \|x\|^2 e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\chi(t)\Big)dt. \tag{30.366}$$

Là dedans, $\chi(t)$ peut sortir à la fois de la transformée de Fourier et de l'application des distributions ; il doit seulement rester dans l'intégrale. Dans le second terme nous allons utiliser l'égalité (due entre autre à la proposition 28.53) :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(\hat{u}_t(e^{it\|.\|^2}\varphi)\big) &= \frac{d}{dt}\Big(u_t\big(\mathcal{F}e^{it\|.\|^2}\varphi\big)\Big) && \text{(30.367a)}\\
&= u_t^{(1)}\big(\mathcal{F}e^{it\|.\|^2}\varphi\big) + u_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}e^{it\|.\|^2}\varphi\right) && \text{(30.367b)}\\
&= (\mathcal{F}u_t^{(1)})\big(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) + (\mathcal{F}u_t)\big(x \mapsto i\|x\|^2 e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) && \text{(30.367c)}\\
&= (\mathcal{F}u)_t^{(1)}\big(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) + (\mathcal{F}u_t)\big(x \mapsto i\|x\|^2 e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big). && \text{(30.367d)}
\end{aligned}$$

Et là, magie c'est exactement ce qui est dans (30.366). Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\hat{u}_t\big(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big)\chi(t)dt = 0 \tag{30.368}$$

pour toute fonctions à support compact $\chi$. Donc la proposition 24.1 nous dit que

$$\partial_t\hat{u}_t\big(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) = 0. \tag{30.369}$$

C'est zéro partout et non seulement presque partout parce qu'en plus nous avons la continuité. Par conséquent pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\hat{u}_t\big(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) = \hat{u}_0\big(x \mapsto \varphi(x)\big) = 0. \tag{30.370}$$

21. Le candidat qui parvient à effectivement présenter ça comme développement, il est fort.
22. Proposition 27.12.

Et cela est vrai pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous considérons donc $t_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pour construire

$$\varphi(x) = e^{-it_0\|x\|^2}\theta(x). \tag{30.371}$$

Nous avons alors $\hat{u}_{t_0}\big(x \mapsto \theta(x)\big) = 0$, ce qui signifie que $\hat{u}_{t_0} = 0$. Du coup pour tout $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons $u_{t_0}(\mathcal{F}\theta) = 0$, mais comme la transformée de Fourier est une bijection de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 27.12) nous avons en fait $u_{t_0}(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire $u_{t_0} = 0$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et au final $u = 0$.

□

## 30.12 Équations différentielles du premier ordre

**Définition 30.42** (Équation différentielle du premier ordre)**.**
*Une* ***équation différentielle du premier ordre*** *est une équation qui, sur un intervalle donné, $I$, décrit la relation entre une variable réelle, notée $x$ ou $t$ dans $I$, une fonction $y : I \to \mathbb{R}$, et la dérivée première de $y$ qui on note $y'$.*

Souvent on écrit «$y'(x)$ = une formule contenante $x$ et $y(x)$», c'est à dire

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{pour } x \in I, \tag{30.372}$$

où $f$ est une fonction de deux variables réelles.

**Remarque 30.43.**
La théorie des fonctions de deux variables ne sera pas abordée dans ce cours, nous allons nous contenter de prendre $f$ dans (30.372) comme une simple notation.

On peut presque toujours omettre d'écrire la dépendance de $y$ en $x$ et écrire simplement (30.372) sous la forme $y' = f(x, y)$.

**Définition 30.44** (Solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre)**.**
*Une* ***solution particulière*** *de l'équation* (30.372) *sur l'intervalle $I$ est une fonction $z : I \to \mathbb{R}$ telle que :*

*(1) $z$ est dérivable sur $I$ ;*

*(2) $z'(x) = f(x, z(x))$, pour tout $x \in I$.*

**Définition 30.45** (Solution générale d'une équation différentielle du premier ordre)**.**
*Résoudre une équation différentielle veut dire trouver l'ensemble qui contient toutes ses solutions particulières. Cet ensemble s'appelle* ***solution générale*** *de l'équation.*

**Exemple 30.46**

(1) Résoudre une équation du type $y'(x) = f(x)<++>$ revient à trouver l'ensemble des primitives de la fonction $f$, qui est donc la solution générale de cette équation. Il y a donc une infinité de solutions particulières, déterminées par une constante additive.
Si $f(x) = \sin(x)$ alors la solution générale sera $\mathcal{Y} = \{-\cos(x) + C \,:\, C \in \mathbb{R}\}$.

(2) L'équation

$$y' = y, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{30.373}$$

a peut-être été abordée dans votre cours de terminale lors de la définition de la fonction exponentielle. Sa solution générale est $\mathcal{Y} = \{Ce^x \,:\, C \in \mathbb{R}\}$. Ici aussi il y a une infinité de solutions particulières.

△

**Remarque 30.47.**
La solution générale d'une équation différentielle du premier ordre est une famille à un paramètre de fonctions.

**Définition 30.48** (Équation differentielle du second ordre)**.**
*Une* ***équation différentielle du second ordre*** *est une équation qui, sur un intervalle donne, $I$, décrit la relation entre une variable réelle, notée $x$ ou $t$ dans $I$, une fonction $y : I \to \mathbb{R}$, et les dérivées première et seconde de $y$ qui on note $y'$ et $y''$ respectivement.*

*On utilise la forme générale*

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{pour } x \in I. \tag{30.374}$$

*où $f$ est une fonction de trois variables réelles.*

On peut définir de manière analogue les équations différentielles d'ordre supérieur. Les définitions de solution particulière et de solution générale se généralisent aux équations différentielles d'ordre supérieur à un.

**Définition 30.49** (Trajectoire)**.**
*La trajectoire tracée par une solution particulière $y$ de l'équation* (30.372) *est le graphe de $y$ en tant que fonction de $x$.*

**Exemple 30.50**
Nous allons regarder de plus près l'équation (30.373), $y' = y$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions distinctes de cette équation. S'il existe un point $\bar{x}$ tel que $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$ alors forcement $y_1(\bar{x})/y_2(\bar{x}) = 1$. Or, la solution générale de l'équation est $\mathcal{Y} = \{Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$, donc $y_i(x) = C_i e^x$, $i = 1, 2$, où les $C_i$ sont des constantes. Le rapport $y_1(\bar{x})/y_2(\bar{x})$ vaut $C_1/C_2$ et par conséquent $C_1 = C_2$. Ce résultat contredit l'hypothèse que les deux solutions soient distinctes. On a donc montré que *deux trajectoires distinctes de cette équations ne se croisent jamais.*

La figure 30.1 représente quelques trajectoires de l'équation. Si on les avait tracées toutes elles recouvriraient tout le plan $x$-$y$. Cela veut dire que *par tout point $(x, y)$ passe une et une seule trajectoire de l'équation* (30.373).

△

**Définition 30.51** (Condition initiale)**.**
*Une* ***condition initiale*** *pour l'équation* (30.372) *sur l'intervalle $I$ est un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times \mathbb{R}$.*

*On dit que la solution particulière $z$ de* (30.372) *satisfait la condition initiale $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times \mathbb{R}$ si $z(\bar{x}) = \bar{y}$.*

**Définition 30.52** (Problème de Cauchy)**.**
*L'association d'une équation différentielle et d'une condition initiale est appelée* ***problème de Cauchy***

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in I, \\ y(\bar{x}) = \bar{y}. \end{cases} \tag{30.375}$$

**Remarque 30.53.**
Sous des conditions assez générales qui serons toujours vérifiées dans ce cours, tout problème de Cauchy admet une et une seule solution.

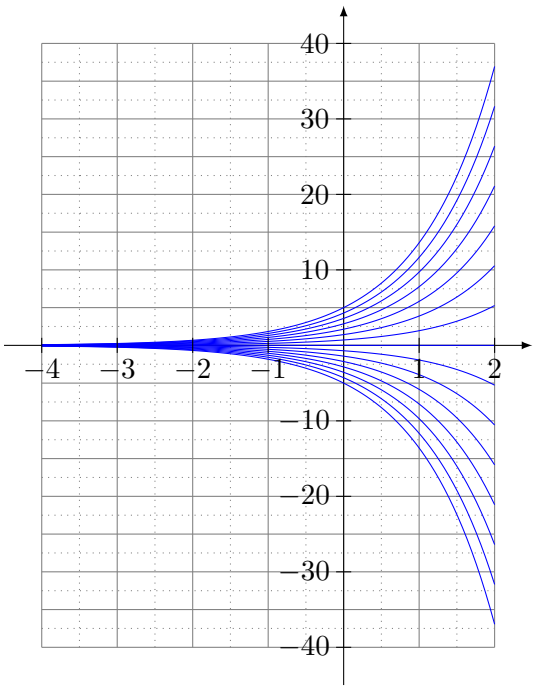



FIGURE 30.1 – Quelque trajectoires de l'équation $y' = y$.

Pour passer de la solution générale d'une équation différentielle de premier ordre à une solution particulière il faut choisir une valeur du paramètre. Comme il y a un seul paramètre une seule condition (la trajectoire de la solution doit passer par un point fixe du plan) peut suffire. Pour une équation différentielle de second ordre comme (30.374), nous aurons besoin de plus de conditions. Sans rentrer dans les détails, nous allons constater ce fait dans l'exemple suivant.

**Exemple 30.54**
La solution générale de l'équation

$$y'' = -y, \tag{30.376}$$

est $\mathcal{Y} = \{C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$. Remarquez que l'équation est du second ordre et que sa solution générale est une famille d'équations à deux paramètres réels. Ce sera toujours les cas pour les équations abordées dans la section 30.15. Pour déterminer une solution particulière de (30.376) il faut fixer les valeurs des deux paramètres et donc, en général, il sera nécessaire de donner deux conditions. △

**Remarque 30.55.**
Une condition comme $y(0) = 4$ nous dit que la constante $C_1 = 4$ mais elle ne nous permet pas de trouver $C_2$. Il y a donc une infinité de solutions de (30.376) qui satisfont à la condition $y(0) = 4$.

On peut fixer les deux condition de deux manières différentes.

(1) Problème de Cauchy : on fixe une terne de valeurs réels $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$ et on cherche la solution telle que $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y'(\bar{x}) = \bar{y}'$.

**Exemple 30.56**
Les conditions $y(0) = 4$, $y'(0) = 15$ permettent de trouver la solution $z(x) = 4\cos(x) + 15\sin(x)$. △

(2) Problème aux bords : on fixe deux point dans le plan $x$-$y$, $A = (\bar{x}, \bar{y})$ et $B = (\tilde{x}, \tilde{y})$, et on cherche la solution dont la trajectoire passe par $A$ et $B$, c'est à dire, on impose $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

**Exemple 30.57**

Les conditions $y(0) = 4$, $y(\pi/2) = 15$ permettent de trouver la solution $z(x) = 4\cos(x) + 15\sin(x)$. △

## 30.13 Équations différentielles du premier ordre à variables séparables

Pour certaines équations différentielles la recherche d'une solution particulière se réduit à une recherche de primitive moyennant un changement de variables.

**Définition 30.58** (Équation différentielle du premier ordre à variables separables)**.**
*Une* ***équation différentielle du premier ordre à variables séparables*** *est une équation qui, pour tout les $x$ dans un intervalle donné, $I$, peut se mettre sous la forme*

$$f(y)y' = g(x), \tag{30.377}$$

*où $f$ et $g$ sont deux fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Nous pouvons intégrer les deux cotes de l'égalité par rapport à $x$ et obtenir

$$\int f(y(x))y'(x)\,dx = G(x) + C,$$

où $G$ est une primitive de $g$ et $C$ une constante réelle. Il est facile à ce point d'effectuer une changement de variable dans le membre de gauche de l'équation en posant (sans surprise) $y = y(x)$ et donc $y'(x)\,dx = dy$.

$$\int f(y(x))y'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = F(y(x)) + C,$$

où $F$ est une primitive de $f$ et $C$ une constante réelle. En somme nous avons

$$F(y(x)) = G(x) + C,$$

et, si $F$ admet une fonction réciproque, alors

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C). \tag{30.378}$$

**Remarque 30.59.**
L'expression de $F^{-1}$ peut être difficile à calculer. Il sera alors préférable de garder $y$ dans la forme implicite.

**Exemple 30.60**
L'équation

$$3y^2y' = x, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{30.379}$$

est une équation à variables séparables. Pour reprendre les notations du début du chapitre, ici $f(y) = 3y^2$ et $g(x) = x$. En intégrant de deux cotes on trouve

$$y^3 = \frac{x^2}{2} + C.$$

La fonction $F(y) = y^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc nous pouvons écrire la solution générale de l'équation (30.379) dans la forme

$$\mathcal{Y} = \left\{ \left( \frac{x^2}{2} + C \right)^{1/3} \text{ tel que } C \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

**Exemple 30.61**
En intégrant de deux cotes l'équation à variables séparables

$$2yy' = x, \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{30.380}$$

on trouve

$$y^2 = \frac{x^2}{2} + C.$$

La fonction $F(y) = y^2$ est *n'est pas inversible* sur tout $\mathbb{R}$, et on sait que $\sqrt{y^2} = |y|$. Au moment de rendre $y$ explicite on doit choisir entre

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)^{1/2} \qquad \text{ou} \qquad y = -\left(\frac{x^2}{2} + C\right)^{1/2}.$$

Ce choix se fait suivant la condition initiale, si elle est donnée. S'il n'y a pas de condition initiale nous pouvons écrire que la solution générale est l'ensemble

$$\mathcal{Y} = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tels que } y^2 = \frac{x^2}{2} + C \text{ et } C \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

**Exemple 30.62**
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} e^y y' = \frac{1}{x+3}, \quad x \in ]-\infty, -3[, \\ y(-4) = 0. \end{cases} \tag{30.381}$$

En intégrant des deux cotes nous trouvons

$$e^y = \ln(|x+3|) + C.$$

Nous pouvons alors imposer la condition initiale et obtenir $e^0 = \ln(|-4+3|) + C$, c'est à dire $C = 1 - \ln(1) = 1$.

**Remarque 30.63.**
L'énoncé du problème de Cauchy dit que $x$ peut varier dans $]-\infty, -3[$, mais nous voyons maintenant que la solution n'est pas définie sur toute la demi-droite, parce que $e^y$ est toujours positif et $\ln(|x+3|) + 1$ est positif seulement pour $x < -(1/e + 3) \approx -3,3679$.

Donc la solution du problème de Cauchy est $y(x) = \ln(|x+3|)+1$ pour tout $x \in ]-\infty, -(1/e+3)[$.
△

**Exemple 30.64**
**Attention, cet exemple est le plus important de la section !**
On considère l'équation à variables séparables

$$y' = \sin(x)y, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{30.382}$$

Dans ce cas, pour pouvoir écrire l'équation dans la forme (30.377) il faut pouvoir multiplier les deux côtés par $1/y$. Il faut donc éliminer tout de suite le cas où $y = 0$.

Si $y = 0$ alors $y' = 0$ et on a une solution constante (on dit souvent : une solution stationnaire) de l'équation. Par ailleurs les trajectoires des solutions ne peuvent pas se croiser ; donc si $y_G$ est

une solution non nulle de l'équation (30.382) alors $y_G(x) \neq 0$ pour tout $x$ [23]. Il n'y a donc aucun danger à diviser par $y$ dans la recherche d'une solution non identiquement nulle.

Supposons maintenant que $y \neq 0$ et écrivons $y'/y = \sin(x)$. En intégrant des deux cotes on trouve

$$\ln(|y|) = -\cos(x) + C,$$

d'où

$$|y| = e^{-\cos(x)+C} = e^C e^{-\cos(x)}.$$

Si on avait impose une condition initiale alors on pourrait déterminer une solution particulière de l'équation en choisissant une valeur de la constante $C$. Nous pouvons observer cependant que la fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+,\star}$ et par conséquent il n'y a pas de perte de généralité en disant que la solution générale de l'équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{ y \,:\, |y| = Ke^{-\cos(x)}, \text{ pour } K \in \mathbb{R}^{+,\star} \right\} \cup \{y \equiv 0\}.$$

Il n'empêche qu'il serait plus élégant d'écrire la solution générale de l'équation sous une forme plus explicite, sans valeur absolue. Nous pouvons le faire en nous nous rappelant que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Il suffit alors d'autoriser $K$ dans $\mathbb{R}^\star$ pour éliminer la valeur absolue.

Pour écrire la solution générale de façon encore plus compacte nous observons que si $K = 0$ alors $y \equiv 0$, c'est à dire, on retrouve la solution constante nulle.

Finalement, la solution générale de cette équation sera toujours écrite sous la forme suivante

$$\mathcal{Y} = \left\{ y = Ke^{-\cos(x)}, \text{ pour } K \in \mathbb{R} \right\}. \tag{30.383}$$

△

## 30.14 Équations différentielles linéaires du premier ordre

**Définition 30.65** (Équation différentielle linéaire du premier ordre)**.**
*Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle .*

*Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** est une équation différentielle de la forme*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad \textit{pour } x \in I, \tag{30.384}$$

*où $a$, $b$, $c$ sont des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$ pour tout $x \in I$ .*

*On dit que $a$, $b$, $c$ sont les coefficients de l'équation* (30.384).

**Remarque 30.66.**
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *linéaire* si pour tout $x_1$, $x_2$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout couple de constantes $\lambda$ et $\mu$ on a

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2). \tag{30.385}$$

Ces équations différentielles sont dites linéaires parce que la partie de l'équation qui contient $y$ (le membre de gauche) satisfait la propriété (30.385) par rapport à $y$. En effet par les propriétés de la dérivée nous avons que

$$a(x)(\lambda y_1 + \mu y_2)' + b(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(a(x)y_1' + b(x)y_1) + \mu(a(x)y_2' + b(x)y_2).$$

23. Ça vaut la peine de prendre un peu de temps pour bien comprendre cela.

**Définition 30.67.**
*L'équation* (30.384) *est dite* ***homogène*** *quand $c$ est la fonction nulle. Si* (30.384) *n'est pas homogène on dit que l'équation*

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{30.386}$$

*est son* ***équation homogène associée.***

Toute équation linéaire du premier ordre homogène est une équation du premier ordre à variables séparables, comme on en a vu dans la section précédente et en particulier dans l'exemple 30.64. Nous n'allons pas répéter les détails du procédé pour trouver sa solution générale, qui aura la forme suivante

**À retenir 30.68**

$$\mathcal{Y}_h = \left\{ Ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \,:\, K \in \mathbb{R} \right\}. \tag{30.387}$$

**Proposition 30.69.** *(1) Soit $y_p$ une solution particulière de l'équation* (30.384) *et $y_h$ une solution particulière de l'équation homogène associé* (30.386)*. Alors la fonction somme $z = y_p + y_h$ est encore une solution particulière de l'équation* (30.384)*.*

*(2) Soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions particulières de* (30.384)*. Alors la fonction différence $w = y_1 - y_2$ est un solution particulière de* (30.386)*.*

*Démonstration.* (1)

$$a(x)\left(y_p + y_h\right)' + b(x)\left(y_p + y_h\right) - c(x) = \big(a(x)y_p' + b(x)y_p - c(x)\big) + \big(a(x)y_h' + b(x)y_h\big) = 0. \tag{30.388}$$

(2)

$$a(x)\left(y_1 - y_2\right)' + b(x)\left(y_1 - y_2\right) = \big(a(x)y_1' + b(x)y_1 - c(x)\big) - \big(a(x)y_2' + b(x)y_2 - c(x)\big) = 0. \tag{30.389}$$

□

Cette proposition permet de démontrer le théorème suivant, qui est le plus important de cette section.

**Théorème 30.70.**
*Soit $y_p$ une solution particulière de l'équation* (30.384) *et $\mathcal{Y}_h$ la solution générale de l'équation* (30.386)*, alors la solution générale de l'équation* (30.384) *est l'ensemble*

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_h + y_p = \{z = y_h + y_p \,:\, y = h \in \mathcal{Y}_h\}. \tag{30.390}$$

**À retenir 30.71**
La résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre comporte trois étapes :

(1) résolution de l'équation homogène associée ;
(2) recherche d'une solution particulière de l'équation non homogène ;
(3) somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière trouvée au point précédent.

La partie qui nous manque encore est de savoir comment trouver une solution particulière de l'équation non homogène (30.384). Si la fonction $c$ dans (30.384) est une constante ou un polynôme

simple, ou une exponentielle alors on peut essayer de deviner. Cette méthode cependant n'est pas la plus sûre pour des débutants.

**Exemple 30.72**
On considère l'équation

$$y' - 5y = 10, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{30.391}$$

Comme tous les coefficients de l'équation sont constants on peut essayer de trouver une solution constante.

Toutes les fonctions constantes on dérivée nulle, par conséquent, si une solution constante existe elle doit satisfaire $-5y = 10$, ce qui veut dire que la solution constante est $y(x) \equiv -2$. △

**Exemple 30.73**
On considère l'équation

$$xy' + y = x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}^{+,\star}. \tag{30.392}$$

Comme le membre de droite de l'équation est un polynôme de degré un on cherche une solution de la forme $y(x) = Ax + B$ avec $A$ et $B$ dans $\mathbb{R}$.

Par substitution on obtient $Ax + (Ax + B) = x + 1$, c'est à dire que une solution particulière de l'équation est $y(x) = x/2 + 1$. △

**Exemple 30.74**
L'équation

$$xy' - y = x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}^{+,\star}. \tag{30.393}$$

ressemble beaucoup à celle de l'exemple précédent, cependant il n'existe pas un polynôme de degré un qui en soit solution.

Dans un cas comme celui-ci, il faut rapidement abandonner la divination et replier sur la méthode, plus technique mais plus sûre, dite *variation de la constante* △

### 30.14.1 Méthode de variation de la constante

— Soit $\mathcal{Y}_h$ la solution générale de l'équation homogène associé à (30.384). Il s'agit d'une famille à un paramètre de fonctions. La première étape de cette méthode consiste à construire un candidat solution particulière $y_p$ en remplaçant le paramètre dans $\mathcal{Y}_h$ par une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à déterminer.

**Exemple 30.75**
L'équation homogène associée à $y' - y = \cos(x)$ est $y' - y = 0$, dont la solution générale est $\mathcal{Y}_h = \{Ce^x \ : \ C \in \mathbb{R}\}$. Le candidat solution sera alors $y_p = C(x)e^x$, avec $C$ fonction à déterminer. △

— La deuxième étape de cette méthode consiste à injecter $y_p$ dans l'équation. Cela permet de trouver une équation différentielle à variables séparables pour $C$, en principe plus facile à résoudre que l'équation de départ.

**Exemple 30.76**
On continue avec l'exemple précédent. On a $y_p' = C'(x)e^x + C(x)e^x$, d'où

$$(C'(x)e^x + C(x)e^x) - C(x)e^x = \cos(x),$$

c'est à dire

$$C'(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

△

— La troisième étape de la méthode consiste à trouver une solution particulière de l'équation différentielle pour $C$ et, par conséquent déterminer une $y_p$.

**Exemple 30.77**
La solution générale de

$$C'(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

est $\mathcal{C} = \left\{ e^{-1}\frac{(\sin(x)-\cos(x))}{2} + K \ : \ K \in \mathbb{R} \right\}$. Il nous suffit une solution particulière, nous pouvons donc choisir $K = 0$ et alors la solution particulière de (30.384) sera $y_p(x) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}$. △

**Remarque 30.78.**
Le plus souvent en intégrant l'équation pour $C$ on en trouvera la solution générale. Dans ce cas on peut remplacer $C$ par cette solution générale et obtenir d'un seul coup la solution générale de l'équation (30.384) , c'est à dire sans faire la somme entre la solution générale de l'homogène associée et la solution particulière.

**Exemple 30.79**
Dans l'exemple qu'on vient de voir la solution générale de (30.384) est

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_h + y_p = \left\{ Ce^x + \frac{(\sin(x) - \cos(x))}{2} \ : \ C \in \mathbb{R} \right\}. \tag{30.394}$$

On obtient le même résultat est écrivant $\mathcal{Y} = \left\{ e^{-x}\left( e^{-1}\frac{(\sin(x)-\cos(x))}{2} + K \right) \ : \ K \in \mathbb{R} \right\}$. Notez qu'on a changé le nom du paramètre de $C$ à $K$ seulement pour souligner qu'on obtient de même résultat par deux chemins différents, sinon les deux expression sont équivalentes ! △

## 30.15 Équations différentielles linéaires du second ordre

**Définition 30.80** (Équation différentielle linéaire du second ordre)**.**
*Une* ***équation différentielle linéaire du second ordre*** *est une équation différentielle de la forme*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x), \quad \textit{pour } x \in I, \tag{30.395}$$

*où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$ pour tout $x \in I$ .*
*On dit que $a$, $b$, $c$ et $d$ sont les coefficients de l'équation* (30.395)*.*

Dans ce cours nous allons étudier exclusivement le cas où $a$, $b$ et $c$ sont des fonctions constantes.

**Définition 30.81** (Équation différentielle linéaire du second ordre homogène)**.**
*Une* ***équation différentielle linéaire du second ordre homogène*** *est une équation différentielle de la forme* (30.395)*, telle que le coefficient $d$ est nul.*

À toute équation de la forme (30.395) on peut associer une équation homogène exactement comme on a fait dans la section précédente pour les équations linéaires du premier ordre.

### 30.15.1 Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants

**Remarque 30.82.**
L'application qui à la fonction $y$ fait correspondre $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$ est linéaire, au sens de la remarque 30.66.

Cela nous dit en particulier, que si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions de l'équation homogène alors toute leur combinaison de la forme $z = \lambda y_1 + \mu y_2$, avec $\lambda$ et $\mu$ dans $\mathbb{R}$, est encore une solution.

Jusqu'ici nous avons toujours travaillé avec des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans cette section nous nous autorisons à passer par des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais cela sera uniquement une étape dans nos calculs. Au final toutes les solutions que nous allons considérer sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La solution générale **à valeurs dans les complexes** d'une équation de ce type a la forme

$$\mathcal{Y}_h^{\mathbb{C}} = \{C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{C},\, x \in I\}\,, \tag{30.396}$$

où $r_1$ et $r_2$ sont aussi des nombres complexes. Remarquez que la solution générale est une famille à deux paramètres. Il faut aussi observer que en tout cas l'intervalle $I$ dans lequel varie $x$ est un intervalle dans $\mathbb{R}$, parce que $I$ est une des données du problème.

À partir de cette information nous pouvons, pour toute équation donnée, chercher la solution générale **complexe** par substitution. Il suffit de remplacer $y$ dans l'équation par $e^{rx}$ et chercher les valeurs de $r$ qui nous conviennent.

Si notre équation de départ est

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{pour } x \in I, \tag{30.397}$$

alors la substitution nous donne

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0.$$

Il est connu que la fonction exponentielle ne prend pas la valeur 0, par consequent ce qui s'annule est le polynôme de degré deux $ar^2 + br + c$. Il est donc très facile de trouver les valeurs de $r$ qu'on pourra utiliser comme $r_1$ et $r_2$ dans la solution générale **complexe**.

**Si** $b^2 - 4ac > 0$ **:** le polynôme admet deux solutions réelles et distinctes, $r_1$ et $r_2$ ;

**Si** $b^2 - 4ac < 0$ **:** le polynôme admet deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ ;

**Si** $b^2 - 4ac = 0$ **:** le polynôme admet une solution réelle double $r = r_1 = r_2$.

Il faut maintenant écrire la solution générale **réelle** de l'équation, qui est celle que nous intéresse vraiment. La façon de l'obtenir est différente dans les trois cas.

**Si** $b^2 - 4ac > 0$ **:** la solution générale réelle a la même forme que la solution complexe, (30.396), il suffit de prendre les paramètres $C_1$ et $C_2$ dans $\mathbb{R}$ plutôt que dans $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{Y}_h = \{C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in I\}\,, \tag{30.398}$$

**Si** $b^2 - 4ac < 0$ **:** le polynôme admet deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ ; Il faut alors utiliser les formules suivantes

$$\begin{aligned} e^{\alpha+i\beta} &= e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ e^{\alpha-i\beta} &= e^{\alpha}(\cos(\beta) - i\sin(\beta)). \end{aligned} \tag{30.399}$$

La somme $e^{r_1 x} + e^{r_2 x}$, où $x$ est dans $I \in \mathbb{R}$, vaut

$$e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) = 2e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

et la différence $e^{r_1 x} - e^{r_2 x}$ vaut

$$e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) - e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) = 2e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Par ces deux calculs élémentaires nous avons trouvé deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de zéros en commun. Elles sont les génératrices de la famille des solutions réelles de l'équation différentielle (la solution générale)

$$\mathcal{Y}_h = \{e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\right) \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in I\}\,, \tag{30.400}$$

**Si** $b^2 - 4ac = 0$ **:** le polynôme admet une solution réelle double $r = r_1 = r_2$. Dans ce cas la solution générale de l'équation est la famille

$$\mathcal{Y}_h = \{(C_1 + C_2 x)e^{rx} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in I\}\,. \tag{30.401}$$

Pour justifier cette formule nous observons d'abord que toute fonction $x \mapsto Ce^{rx}$, pour $C \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle (par construction). Ensuite nous utilisons la méthode de variation de la constante. On trouve rapidement que si une fonction de la forme $x \mapsto C(x)e^{rx}$ est une solution alors $C(x)$ est un polynôme de degré au plus 1, c'est à dire $C(x) = C_1 + C_2 x$ avec $C_1$ et $C_2$ dans $\mathbb{R}$.

### 30.15.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, non homogènes

Nous ne présentons pas une méthode générale pour la résolution de ces équations. Comme dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre non homogènes, la solution générale de (30.395) est donnée par la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée. La recherche d'une solution particulière est facilité par le fait que les coefficients de (30.395) sont supposés constants, c'est à dire que $a$, $b$ et $c$ sont des fonctions constantes. Il faut essayer de deviner la forme d'une solution particulière à partir de la forme du second membre de l'équation, la fonction $d$. Si $d$ est un polynôme il faut essayer avec un polynôme du même degré, si $d$ est une exponentielle, par exemple $d(x) = e^{5x}$, on pourra essayer avec un multiple de la même fonction exponentielle, dans l'exemple $f(x) = ke^{5x}$, avec $k$ à determiner. Si $d$ est une combinaison linéaire de sinus et cosinus, comme par exemple $12\cos(x) + 2\sin(x)$, on peut essayer avec $k_1\cos(x) + k_2\sin(x)$.

**Exemple 30.83**
On considère l'équation différentielle

$$y'' + 12y' + 36y = -192e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{30.402}$$

Son équation homogène associée est

$$y'' + 12y' + 36y = 0, \tag{30.403}$$

dont le polynôme caractéristique est $r^2 + 12r + 36$. Ce polynôme admet une racine double, qui est $-6$, par conséquent la solution générale de (30.403) est

$$\mathcal{Y}_h = \left\{(C_1 + C_2 x)e^{-6x} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le membre de droite de (30.402) est une fonction exponentielle, nous allons donc chercher une solution particulière de (30.402) de la forme $f(x) = ke^{2x}$. Par substitution nous trouvons

$$ke^{2x}(4 + 12 \times 2 + 36) = -192e^{2x},$$

ce qui veut dire que $k$ doit être $-3$.

La solution générale de l'équation (30.402) est donc

$$\mathcal{Y} = \left\{(C_1 + C_2 x)e^{-6x} - 3e^{2x} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

△

**Exemple 30.84**
Nous allons résoudre l'équation

$$y'' + 12y' + 36y = 12\cos(x) + 2\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{30.404}$$

Cette équation a comme homogène associée l'équation (30.403), comme dans l'exemple précédent. Il nous suffit donc de trouver une solution particulière de (30.402).

Nous pouvons essayer avec $f(x) = k_1\cos(x) + k_2\sin(x)$. Par substitution on trouve

$$\begin{aligned}-\left(k_1\cos(x) + k_2\sin(x)\right) + 12\left(-k_1\sin(x) + k_2\cos(x)\right) + 36\left(k_1\cos(x) + k_2\sin(x)\right)\\ = 12\cos(x) + 2\sin(x)\end{aligned}$$

Cette équation doit être satisfaite pour tout valeur de $x$, en particulier pour $x = 0$ et $x = \pi/2$. Cela revient à considère séparément les coefficients des fonctions sinus et cosinus. Il faut alors que $k_1$ et $k_2$ soient solutions du système

$$\begin{cases}-k_1 + 12k_2 + 36k_1 &= 12,\\ -k_2 - 12k_1 + 36k_2 &= 2.\end{cases}$$

On trouve $k_1 = 396/1369$ et $k_2 = 214/1369$, et la solution générale de notre équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{(C_1 + C_2x)e^{-6x} + \frac{396}{1369}\cos(x) + \frac{214}{1369}\sin(x) \ :\ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

△

**Exemple 30.85**
Nous allons résoudre l'équation

$$y'' + 12y' + 36y = 10x^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{30.405}$$

Cette équation a comme homogène associée l'équation (30.403), comme dans l'exemple précédent. Il nous suffit donc de trouver une solution particulière de (30.402).

Nous pouvons essayer avec $f(x) = k_1x^2 + k_2x + k_3$. Par substitution on trouve

$$(2k_1) + 12\left(2k_1x + k_2\right) + 36\left(k_1x^2 + k_2x + k_3\right) = 10x^2 + 3.$$

Pour trouver les bonnes valeurs des coefficients nous devons résoudre le système

$$\begin{cases}36k_1 &= 10,\\ 24k_1 + 36k_2 &= 0,\\ 2k_1 + 12k_2 + 36k_3 &= 3,\end{cases}$$

ce qui donne $k_1 = 5/18$, $k_2 = -5/27$ et $k_3 = 7/54$. La solution générale de notre équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{(C_1 + C_2x)e^{-6x} + \frac{5}{18}x^2 - \frac{5}{27}x + \frac{7}{54} \ :\ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

△

## 30.16 Fonction de Green

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y''(x) = g(x) & \text{(30.406a)}\\ y(0) = y(1) = 0 & \text{(30.406b)}\end{cases}$$

pour $x \in ]0,1[$ et où $g$ est continue sur $]0,1[$.

Nous définissons la fonction de Green

$$G(x,t) = \begin{cases}t(x-1) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1\\ x(t-1) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1,\end{cases} \tag{30.407}$$

et nous allons montrer que

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)g(t)dt \tag{30.408}$$

est l'unique solution.

**Unicité** Si $y_1$ et $y_2$ sont des solutions, alors $y_1'' = y_2''$ et donc $y_1(x) = y_2(x) + ax + b$. Les conditions aux bords donnent alors $0 = y_1(0) = y_2(0) + b = b$. D'où $b = 0$. En imposant $y_1(1) = 0$ nous trouvons alors immédiatement $a = 0$, ce qui donne $y_1 = y_2$.

**Existence** Il est vite vérifié qu'avec (30.408) nous avons $y(0) = y(1) = 0$ parce que $G(0,t) = G(1,t) = 0$ pour tout $t$. Nous fixons une valeur pour $x \in ]0,1[$ et nous découpons l'intégrale :

$$y(x) = \int_0^x G(x,t)g(t)dt + \int_x^1 G(x,t)g(t)dt. \tag{30.409}$$

Pour calculer $y'(x)$, il faut dériver à la fois à travers l'intégrale et dans la borne. Si vous connaissez une formule pour faire cela, c'est bien pour vois. Nous allons faire ça à la main et poser

$$I(x,y) = \int_0^y t(x-1)g(t)dt. \tag{30.410}$$

La dérivation de $I$ par rapport à $x$ se fait en utilisant le théorème 14.72 :

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x,y) = \int_0^y tg(t)dt. \tag{30.411}$$

Pour la dérivation par rapport à $y$, il s'agit du théorème fondamental de l'analyse, plus précisément le lien primitive et intégrale de la proposition 13.204 :

$$\frac{\partial I}{\partial y}(x,y) = y(x-1)g(y). \tag{30.412}$$

Maintenant nous considérons la fonction $\varphi_I(x) = I(x,x)$. Elle satisfait à

$$\varphi_I'(x) = \frac{\partial I}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial I}{\partial y}(x,x) = \int_0^x tg(t) + x(x-1)g(x). \tag{30.413}$$

Le même jeu avec $J(x,y) = \int_y^1 x(t-1)g(t)dt$ donne

$$\varphi_J'(x) = \int_0^x fg(t)dt + x(x-1)g(x). \tag{30.414}$$

En remettant les bouts ensemble,

$$y(x) = \int_0^x tg(t)dt + \int_1^x (1-t)g(t)dt. \tag{30.415}$$

Le calcul de la dérivée seconde donne alors

$$y''(x) = xg(x) + (1-x)g(x) = g(x). \tag{30.416}$$

Nous pouvons aussi, sur cette équation, estimer la variation de la solution en termes d'une variation de $g$. Soit donc une fonction continue $\delta_g$ sur $[0,1]$ et $\tilde{g} = g + \delta_g$. Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \tilde{y}''(x) = \tilde{g}(x) & \text{(30.417a)} \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = 0. & \text{(30.417b)} \end{cases}$$

Par ce que nous venons de faire, l'unique solution est

$$\tilde{y}(x) = \int_0^1 G(x,t)\tilde{g}(t)dt = \int_0^1 G(x,t)g(t)dt + \int_0^1 G(x,t)\delta_g(t)dt = y(x) + \delta_y(x) \tag{30.418}$$

où $\delta_y$ est une fonction continue ainsi définie :

$$\delta_y(x) = \int_0^1 G(x,t)\delta_g(t)dt. \tag{30.419}$$

Supposons que $\|\delta_g\|_\infty = \epsilon$. Alors des majorations donnent

$$|\delta_y(x)| \leqslant \epsilon \int_0^1 |G(x,t)|dt = \epsilon(1-x)\int_0^x tdt + \epsilon x \int_x^1 (1-t)dt = \frac{\epsilon}{2}x(1-x). \tag{30.420}$$

Mais la fonction $x \mapsto x(1-x)$ a son maximum en $x = \frac{1}{2}$, donc nous pouvons donner une majoration indépendante de $x$ :

$$\|\delta_y\|_\infty \leqslant \frac{1}{8}\|\delta_g\|_\infty. \tag{30.421}$$

Notons que la majoration (30.421) en norme uniforme a l'air plus impressionnante, mais la majoration (30.420) donnant une majoration séparée pour chaque $x$ est en réalité plus précise.

# Chapitre 31

# Équations aux dérivées partielles

## 31.1 Symbole principal, équation des caractéristiques

Soit l'équation différentielle semi-linéaire d'ordre $k$

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(\partial^\alpha u)(x) + F\Big(x, u(x), (Du)(x), \dots, (D^{k-1}u)(x)\Big) = 0 \tag{31.1}$$

pour la fonction $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

**Définition 31.1.**
*Le **symbole principal** de l'équation* (31.1) *est l'application*

$$\begin{aligned} \sigma\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R} \\ (x,\xi) &\mapsto \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha \end{aligned} \tag{31.2}$$

*où si* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ *et* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ *alors* $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d}$.

**Définition 31.2.**
*Les **caractéristiques** de l'équation* (31.1) *est une surface* $S$ *de* $\mathbb{R}^d$ *donné par une équation de la forme* $\phi(x) = 0$ *où* $\phi$ *satisfait à*

$$\sigma\big(x, \nabla\phi(x)\big) = 0 \tag{31.3}$$

*et* $\nabla\phi(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in S$.

## 31.2 Méthode des caractéristiques pour l'ordre 1

Nous[322, 323] voulons étudier l'équation d'ordre 1

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y) \tag{31.4}$$

Le champ de vecteurs associé à cette équation est

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{31.5}$$

et l'équation peut être écrite sous la forme

$$(v \cdot \nabla) + cu = f. \tag{31.6}$$

**Définition 31.3.**
*Le **flot** de ce champ de vecteurs sont les courbes paramétriques* $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ *vérifiant* $\gamma' t(t) = v\big(\gamma(t)\big)$.

Les équation du flot pour l'équation (31.4) sont

$$\begin{cases} x'(t) = a\big(x(y), y(t)\big) & (31.7a) \\ y'(t) = b\big(x(y), y(t)\big). & (31.7b) \end{cases}$$

Ce sont des équations différentielles ordinaires. Un système de deux équations couplées du premier ordre.

Quel est l'intérêt du flot ? Nous allons voir que sur la ligne $t \mapsto \gamma(t)$, la fonction $u$ est constante. Or des solutions $\gamma$ au système (31.7), il y en aura plusieurs : une pour chaque valeurs des constantes d'intégration. Pour peu que ces lignes recouvrent tout le plan, nous pourrons résoudre l'équation de départ ligne par ligne.

Nous posons

$$\tilde{u}(t) = u\big(x(t), y(t)\big) \quad (31.8a)$$
$$\tilde{c}(t) = c\big(x(t), y(t)\big) \quad (31.8b)$$
$$\tilde{f}(t) = f\big(x(t), y(t)\big). \quad (31.8c)$$

La fonction $\tilde{u}$ est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ normale qui se dérive normalement, en suivant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(t) &= \frac{\partial u}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t) && (31.9a) \\ &= a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} && (31.9b) \\ &= f\big(x(t), y(t)\big) - c\big(x(t), y(t)\big)u\big(x(t), y(t)\big) && (31.9c) \\ &= \tilde{f}(t) - \tilde{c}(t)\tilde{u}(t). && (31.9d) \end{aligned}$$

Nous avons pour $\tilde{u}$ l'équation différentielle ordinaire

$$\tilde{u}' + \tilde{c}\tilde{u} = \tilde{f} \quad (31.10)$$

qui est résolue par la proposition 30.10.

### 31.2.1 Un exemple complet un peu minimal

Nous considérons l'équation différentielle[322]

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - (x - y)u = 0. \quad (31.11)$$

Et nous allons la résoudre.

Les équations du flot, sont simples parce que les coefficient sont des constantes : $x'(t) = 1$, $y'(t) = -1$. Donc

$$x(t) = t + C_1 \quad (31.12a)$$
$$y(t) = -t + C_2. \quad (31.12b)$$

A priori nous avons une caractéristique pour chaque choix de $(C_1, C_2)$ et nous espérons que le tout recouvre le plan $\mathbb{R}^2$. En fait seule une des deux constantes doit être laissée libre, l'autre consiste seulement en décaler le paramètre $t$. Nous posons donc $C_1 = 0$ et nous considérons les courbes caractéristiques

$$\gamma_C(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t + C \end{pmatrix}. \quad (31.13)$$

Ces courbes recouvrent bien tout le plan. Pour savoir les valeurs de $u$ sur la courbe $\gamma_C$, nous devons résoudre l'équation différentielle ordinaire

$$\tilde{u}_C' + \tilde{c}\tilde{u}_C = \tilde{f}, \quad (31.14)$$

en sachant que $\tilde{c}(t) = c\big(x(t), y(t)\big) = -\big(x(t) - y(t)\big) = 2t - C$. Cela se fait en suivant la méthode décrite dans l'exemple 30.8 et résumée dans la proposition 30.10.

En termes de notations, $\tilde{u}_C(t) = u\big(\gamma_C(t)\big)$. Récrivons l'équation :

$$\tilde{u}'(t) - (2t - C)\tilde{u}(t) = 0. \tag{31.15}$$

La méthode pour la résoudre est de mettre les $\tilde{u}$ d'un côté et les $t$ de l'autre :

$$\frac{\tilde{u}'}{u} = 2t - C. \tag{31.16}$$

En intégrant par rapport à $t$ des deux côtés,

$$\ln(\tilde{u}) = t^2 - Ct + K_C, \tag{31.17}$$

c'est à dire (avec redéfinition de $K_C$)

$$\tilde{u}(t) = K_C e^{t^2 - Ct} \tag{31.18}$$

ou encore

$$u\big(\gamma_C(t)\big) = K_C e^{t^2 - Ct} \tag{31.19}$$

où $C$ est le paramètre que nous déterminons en sachant sur quelle caractéristique se trouve le point $(x, y)$ où nous voulons calculer $u(x, y)$ et $K$ est une constante (strictement positive parce que si vous avez suivi le mouvement, c'est une exponentielle) qui doit être déterminée par les conditions initiales. Dès que $K$ est fixé pour un des points de la courbe $\gamma_C$, alors il est fixé pour tous les points.

Ce que nous avons obtenu est qu'il existe un $K_C$ tel que pour tout $t$ nous avons

$$u\big(\gamma_C(t)\big) = K_C e^{t^2 - Ct}. \tag{31.20}$$

Soit donc un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nous devons d'abord déterminer où ce point se trouve par rapport aux caractéristiques, c'est à dire quelle est la valeur de $C$ pour laquelle $(x_0, y_0)$ est sur la courbe $\gamma_C$, et ensuite déterminer pour quelle valeur de $t$ nous aurons $\gamma_C(t) = (x_0, y_0)$. À résoudre :

$$\gamma_C(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ -t_0 + C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{31.21}$$

Donc $t_0 = x_0$ et $C = x_0 + y_0$. En reprenant (31.19) nous avons

$$u\big(\gamma_C(t_0)\big) = K e^{x_0^2 - (x_0 + y_0)x_0} = K e^{-x_0 y_0}. \tag{31.22}$$

Pour peu que des conditions soient donnée sur chaque caractéristique, nous pouvons déterminer $K$. Attention : ce $K$ est une constante d'intégration de l'équation différentielle ordinaire pour $\tilde{u}$. Donc elle n'est valable que sur chaque caractéristique séparément. Cela n'est donc pas du tout une constante sur $\mathbb{R}^2$.

Nous pouvons maintenant écrire la solution générale de l'équation de départ. L'équation cartésienne de la courbe $\gamma_C$ est

$$x + y = C. \tag{31.23}$$

Donc $K$ est une fonction de $x + y$, pas de $x$ et $y$ séparément. Cela est important à comprendre. A priori nous avons

$$u(x, y) = K(x, y)e^{-xy} \tag{31.24}$$

où $K(x, y)$ est constante sur la courbe $\gamma_C$ contenant $(x, y)$. Nous avons

— si $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$,
— alors il existe $C$ tel que $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ sont sur $\gamma_C$,
— alors $K(x_1, y_2) = K(x_2, y_2)$.

Donc il existe une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $K(x, y) = f(x + y)$.

Au final, la solution générale de l'équation est

$$u(x, y) = f(x + y)e^{-xy} \tag{31.25}$$

où $f$ est une fonction à déterminer par les conditions initiales qui peuvent être données. Typiquement nous espérons que les conditions imposent une et une seule valeur de $u$ sur chacune des courbes $\gamma_C$.

### 31.2.2 Un théorème d'existence et d'unicité

La méthode des caractéristiques donne essentiellement une preuve de l'unicité des solutions aux équations de transport, et une méthode pour construire cette solution. En effet, la procédure suivante permet de construire $u(x_0, y_0)$.

— Trouver la caractéristique passant par le point $(x_0, y_0)$
— Calculer en quel point elle passe par une condition initiale donnée.
— Attribuer à $u(x_0, y_0)$ la valeur trouvée sur la caractéristique là où elle passe par une condition initiale.

Rien ne permet a priori de savoir que cette procédure construit effectivement une solution. En particulier, comment calculer $\partial_x u$ ? Le quotient différentiel serait

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(x+\epsilon,y) - u(x,y)}{\epsilon}, \tag{31.26}$$

mais la caractéristique donnant la valeur de $u(x+\epsilon, y)$ est différente pour chaque $\epsilon$. Rien a priori ne permet d'affirmer que le calcul soit simple, ni qu'il arrive à une solution du problème donné.

D'où la nécessité d'avoir un résultat un peu rigoureux donnant des conditions sous lesquelles les choses vont bien.

**Proposition 31.4** (Équation de transport à coefficients variables[323, 314])**.**
*Soit une fonction $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ en ses deux variables et uniformément Lipschitziennes en sa première variable*[1] *et $g \in C^1(\mathbb{R})$. Alors l'équation aux dérivées partielles de premier ordre*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + c(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y) = 0 & \text{(31.27a)} \\ u(x,0) = h(y) & \text{(31.27b)} \end{cases}$$

*admet une unique solution de classe $C^1$.*

*Cette solution est construite de la façon suivante*[2]*. D'abord nous considérons la solution $X$ au problème*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial s}(s;x,t) = c\big(X(s;x,t),s\big) & \text{(31.28a)} \\ X(t;x,t) = x, & \text{(31.28b)} \end{cases}$$

*et ensuite le problème* (31.27) *a pour unique solution*

$$u(x,t) = h\big(X(0;x,t)\big). \tag{31.29}$$

*Démonstration.* Nous commençons par étudier l'existence et l'unicité de la fonction $X$ définie par le problème 31.28. La fonction $c$ ici est dans les hypothèses de la fonction $f$ du théorème de Cauchy-Lipschitz global 18.38. D'où l'existence et l'unicité de la fonction $s \mapsto X(s;x,t)$ sur $\mathbb{R}$ pour chaque $(x,y)$ donné[3].

Le lemme 30.32 nous dit que $X$ est de classe $C^2$ en $(s,x,t)$. Donc nous pourrons dériver et permuter les dérivées autant que nous voudrons (sans exagérer : ordre 2 au maximum).

**Unicité** Nous montrons que $u$ doit être constante sur le chemin

$$\gamma_{(x,t)}(s) = \begin{pmatrix} X(s;x,t) \\ s \end{pmatrix}. \tag{31.30}$$

En effet, en posant

$$\varphi(s) = u\big(\gamma(s)\big) = u\big(X(s;x,t),s\big), \tag{31.31}$$

1. Dans [314], on ne demande que continue puis uniformément Lipschitz. Moi je crois que ce n'est pas assez pour assurer la dérivabilité de $X$ par rapport à $x$, et encore moins pour permuter les dérivées dans $\partial^2_{tx}Y$.

2. Le fait que la construction ait un sens fait partie des choses à prouver

3. Avec l'énoncé tel que donné dans [323], il faut utiliser la technique de 30.20 pour l'existence globale, parce que la fonction $b$ là-dedans n'est pas dans les mêmes hypothèses.

et en dérivant nous obtenons

$$\varphi'(s) = \frac{\partial u}{\partial t}\big(X(s;x,t),s\big)\frac{\partial X}{\partial s}(s;x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}\big(X(s;x,t)\big) = 0. \tag{31.32}$$

Par conséquent la valeur commune de tous les $u\big(\gamma_{(x,t)}(s)\big)$ doit être celle en $\gamma_{(x,t)}(0) = h(X(0;x,t))$

Cela prouve l'unicité parce que la valeur de $u$ est fixée en tout point. Nous devons encore vérifier que la fonction $u$ ainsi construite est bien une solution du problème. C'est l'objet de la partie «existence» de la preuve.

**Existence** Même l'existence est divisée en plusieurs étapes.

**Mise en place** Nous prouvons que la fonction $u$ donné par (31.29) est une solution du problème. Nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = h'\big(X(0;x,t)\big)\frac{\partial X}{\partial t}(0;x,t) \tag{31.33}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = h'\big(X(0;x,t)\big)\frac{\partial X}{\partial x}(0;x,t), \tag{31.34}$$

de sorte qu'en posant

$$g(s;x,t) = \frac{\partial X}{\partial t}(s;x,t) + c(x,t)\frac{\partial X}{\partial x}(s;x,t) \tag{31.35}$$

nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = h'\big(X(0;x,t)\big)g(0;x,t). \tag{31.36}$$

**Une équation différentielle pour $g$** Nous allons prouver que

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s;x,t) = \alpha_{(x,t)}(s)g(s;x,t) \tag{31.37}$$

avec [4]

$$\alpha_{(x,t)}(s) = \frac{\partial c}{\partial x}\big(X(s;x,t),s\big). \tag{31.38}$$

D'abord nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s;x,t) = \frac{\partial^2 X}{\partial s\partial t}(s;x,t) + c(x,t)\frac{\partial^2 X}{\partial s\partial x}(s;x,t). \tag{31.39}$$

Nous permutons les dérivées et nous tenons compte de (31.28) :

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s;x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(c\big(X(s;x,t),s\big)\Big) + c(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Big(c\big(X(s;x,t),s\big)\Big). \tag{31.40}$$

Nous dérivons maintenant plus en profondeur. D'une part

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(c\big(X(s;x,t),s\big)\Big) = \frac{\partial c}{\partial x}\Big(X(s;x,t),s\Big)\frac{\partial X}{\partial t}(s;x,t) \tag{31.41}$$

et d'autre part,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(c\big(X(s;x,t),s\big)\Big) = \frac{\partial c}{\partial x}\Big(X(s;x,t),s\Big)\frac{\partial X}{\partial x}(s;x,t), \tag{31.42}$$

de telle sorte que

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s;x,t) = \frac{\partial c}{\partial x}\big(X(s;x,t),s\big)\Big[\frac{\partial X}{\partial t}(s;x,t) + c(x,t)\frac{\partial X}{\partial x}(s;x,t)\Big] \tag{31.43a}$$

$$= \alpha_{(x,t)}(s)g(s;x,t). \tag{31.43b}$$

4. La ligne suivante est une de celles qui me font penser qu'il manque des hypothèses dans [314]. Il faut bien pouvoir dériver $c$.

**Une condition initiale pour $g$** Nous montrons maintenant que $g(t;x,t)=0$. La condition initiale pour $X$ est $X(t;x,t)=x$ pour tout $t,x\in\mathbb{R}$. Nous dérivons cette dernière par rapport à $x$ et à $t$ :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(t;x,t)=1 \tag{31.44a}$$

$$\frac{\partial X}{\partial s}(t;x,t)+\frac{\partial X}{\partial t}(t;x,t)=0. \tag{31.44b}$$

Mais $\partial_s X(t;x,t)=c\big(X(t;x,t),t\big)$, donc la relation (31.44b) donne

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t;x,t)=-c\big(X(t;x,t),t\big)=-c(x,t) \tag{31.45}$$

où nous avons tenu compte du fait que $X(t;x,t)=x$.
Voyons à présent ce que (31.44a) et (31.45) donnent pour $g(t;x,t)$ :

$$g(t;x,t)=\frac{\partial X}{\partial t}(t;x,t)+c(x,t)\frac{\partial X}{\partial x}(t;x,t)=-c(x,t)+c(x,t)=0. \tag{31.46}$$

**Conclusion pour $g$** La fonction $g$ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial s}(s)=\alpha(s)g(s) & (31.47a)\\ g(t)=0. & (31.47b)\end{cases}$$

Bien entendu, $g(s)=0$ est une solution. Mais la solution à ce système est unique par Cauchy-Lipschitz 18.37. Ici nous utilisons le fait que

$$(s,y)\mapsto\alpha(s)y \tag{31.48}$$

est continue. C'est à dire entre autres que

$$s\mapsto\frac{\partial c}{\partial x}\big(X(s;x,t),s\big) \tag{31.49}$$

doit être continue. C'est le cas parce que $c$ est de classe $C^1$ en sa première variable.

□

Les hypothèses de la proposition 31.4 sont loin d'être optimales. Voici un exemple dans lequel $c$ n'est même pas dérivable par rapport à $t$ et qui se passe très bien quand même.

**Exemple 31.5**
Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)+|t-1|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0 & (31.50a)\\ u(x,0)=h(x) & (31.50b)\end{cases}$$

où $h$ est une fonction bien régulière ; mettons $C^p$. En suivant la méthode de la proposition nous devrions poser l'équation différentielle

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial s}(s;x,t)=|s-1| & (31.51a)\\ X(t;x,t)=x. & (31.51b)\end{cases}$$

Cela est la caractéristique passant par $(x,t)$. Cependant il sera plus simple de chercher les caractéristiques en demandant qu'elles passent par $(x_0,0)$. Nous allons donc plutôt résoudre pour $X_{x_0}$ l'équation différentielle

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial s}(s)=|s-1| & (31.52a)\\ X_{x_0}(0)=x_0 & (31.52b)\end{cases}$$

et les courbes caractéristiques seront les chemins

$$\gamma_{x_0}(s) = \begin{pmatrix} X_{x_0}(s) \\ s \end{pmatrix}. \tag{31.53}$$

La résolution donne d'abord

$$X_{x_0}(s) = \begin{cases} -\frac{s^2}{2} + s + K_1 & \text{si } s < 1 \\ \frac{s^2}{2} - s + K_2 & \text{si } s > 1. \end{cases} \tag{31.54}$$

Vu que la condition initiale est donnée pour $s = 0$, nous fixons $K_1$ pour la condition initiale et $K_2$ pour la continuité :

$$X_{x_0}(s) = \begin{cases} -\frac{s^2}{2} + s + x_1 & \text{si } s < 1 \\ \frac{1}{2} + x_0 & \text{si } s = 1 \\ \frac{s^2}{2} - s + 1 + x_0 & \text{si } s > 1. \end{cases} \tag{31.55}$$

Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Quelle caractéristique passe par là ? Nous allons déterminer la fonction $x_0(x, t)$ qui donne le $x_0$ tel que la caractéristique $\gamma_{x_0}$ passe par $(x, t)$. Nous devons résoudre

$$\begin{pmatrix} X_{x_0}(s) \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{31.56}$$

Directement : $s = t$. Et ensuite $X_{x_0}(t) = x$. Nous avons

$$x_0(x, t) = \begin{cases} x + \frac{t^2}{2} - t & \text{si } t < 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } t = 1 \\ x - \frac{t^2}{2} + t - 1 & \text{si } t > 1. \end{cases} \tag{31.57}$$

Le truc presque étonnant est que $x_0$ est de classe $C^1$. En effet le calcul de

$$\frac{\partial x_0}{\partial t}(1) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x_0(x, 1 + \epsilon) - x_0(x, 1)}{\epsilon} \tag{31.58}$$

se fait en séparant les limites $\epsilon \to 0^+$ et $\epsilon \to 0^-$. Le résultat est que $\partial_t x_0(1) = 0$. Nous avons donc

$$\frac{\partial x_0}{\partial t}(t) = \begin{cases} t - 1 & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t = 1 \\ -t + 1 & \text{si } t > 1. \end{cases} \tag{31.59}$$

Cela étant continu, la fonction $x_0$ est de classe $C^1$ en $t$, et la dérivée en $x$ étant toujours 1, elle est de classe $C^1$.

En ce qui concerne la solution de l'équation de départ,

$$u(x, t) = h\big(X_{x_0(x,t)}(0)\big) = h\big(x_0(x, t)\big). \tag{31.60}$$

Pourvu que $h$ soit assez régulière, la fonction $u$ est facilement de classe $C^1$. △

## 31.3 Méthode des caractéristique pour l'ordre 2

### 31.3.1 Principe général

Soit l'opérateur différentiel agissant sur $C^2(\mathbb{R}^2)$ :

$$D = a(x, y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x, y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{31.61}$$

Nous voulons résoudre des équations du type $Du = 0$ pour $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Pour commencer[322], et c'est le point crucial, nous voyons $D$ comme un polynôme en $\partial_x$ et $\partial_y$ et nous le factorisons : si

$$aX^2 + bXY + cY = (\alpha X + \beta Y)(\gamma X + \delta Y) \tag{31.62}$$

alors nous avons

$$D = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x} + \delta\frac{\partial y}{\partial}\right) + \text{ termes d'ordre inférieurs.} \tag{31.63}$$

Les «termes d'ordre inférieurs» sont ceux de la forme $\alpha(x,y)\frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$.

L'astuce est de poser

$$v = (\gamma\partial_x + \delta\partial_y)u, \tag{31.64}$$

et de résoudre le système

$$\begin{cases} (\alpha\partial_x + \beta\partial_y)v = 0 & \text{(31.65a)} \\ (\gamma\partial_x + \delta\partial_y)u = v. & \text{(31.65b)} \end{cases}$$

Cela sont deux équations différentielles du premier ordre pour lesquelles nous avons déjà des techniques décrites en la section 31.2.

Afin que les fonctions $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ soient réelles, il faut que $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Sachant que $a = \alpha\gamma$, $b = \alpha\delta + \beta\gamma$ et $c = \beta\delta$ cette condition sur $a$, $b$ et $c$ donne

$$(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - 4\alpha\gamma\beta\delta \geqslant 0. \tag{31.66}$$

Cela revient à

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \geqslant 0. \tag{31.67}$$

Nous supposons à présent que l'inégalité soit stricte (cas hyperbolique). Nous avons en particulier que

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{31.68}$$

Cette condition implique que les équations

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x,y) \quad \frac{dy}{dt} = \beta(x,y) \tag{31.69}$$

sont indépendantes des équations

$$\frac{dx}{dt} = \gamma(x,y) \quad \frac{dy}{dt} = \delta(x,y) \tag{31.70}$$

Ce sont les équations caractéristiques des équations (31.65).

### 31.3.2 Exemple : l'équation d'onde

Nous considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{31.71}$$

où $c$ est une constante réelle. Nous en cherchons des solutions de classe $C^2$.

L'opérateur différentiel est donné par le polynôme $P(T,X) = T^2 - c^2X^2$ qui se factorise en

$$P = (T + cX)(T - cX), \tag{31.72}$$

c'est à dire que nous pouvons récrire l'équation des ondes sous la forme

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u = 0. \tag{31.73}$$

Nous posons donc $v = (\partial_t - c\partial_x)u$ et nous avons le système[313]

$$\begin{cases} (\partial_t + c\partial_x)v = 0 & (31.74a) \\ (\partial_t - c\partial_x)u = v. & (31.74b) \end{cases}$$

La méthode des caractéristique est efficace pour résoudre la première, et pour trouver la solution générale de l'homogène associée à la seconde.

Nous nous lançons dans la résolution de (31.74a). Le flot est $v = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$, et nous cherchons ses courbes intégrales sous la forme $\varphi(t) = \big(t, x(t)\big)$. Immédiatement, $x'(t) = c$, ce qui donne

$$\gamma_C(t) = \begin{pmatrix} t \\ ct + C \end{pmatrix}. \tag{31.75}$$

Cela donne une caractéristique pour chaque valeur de $C$. En posant $\tilde{v}_C(t) = v(t, ct + C)$ nous avons

$$\tilde{v}'_C(t) = \frac{\partial v}{\partial t}\big(\gamma_C(t)\big) + c\frac{\partial v}{\partial t}\big(\gamma_C(t)\big) = 0. \tag{31.76}$$

Donc $\tilde{v}_C$ est une fonction constante. Donc $u$ est constant sur la courbe $\gamma_C$ dont l'équation cartésienne est $x - ct = C$. Cela implique que

$$v(t, x) = f(x - ct) \tag{31.77}$$

où $f$ est une fonction de classe $C^1$. En effet si $(t_1, x_1)$ et $(t_2, x_2)$ vérifient $x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$ alors $v(t_1, x_2) = v(t_2, x_2)$. Le fait que $f$ soit $C^1$ est une demande que $u$ soit au final dans $C^2$.

Nous devons maintenant résoudre l'équation (31.74b)

$$(\partial_t - c\partial_x)u = v. \tag{31.78}$$

Nous allons agir conformément à la stratégie expliquée par le lemme 30.6. Nous devons résoudre $Du = v$ avec

$$\begin{aligned} D\colon C^2(\mathbb{R}) &\to D(C^2(\mathbb{R})) \\ u &\mapsto (\partial_t - c\partial_x)u. \end{aligned} \tag{31.79}$$

Par la même méthode des caractéristiques que celle déjà menée plus haut nous trouvons $\ker(D)$ comme solution générale de $(\partial_t - c\partial_x)u_G = 0$. C'est à dire

$$u_G = g(x + ct) \tag{31.80}$$

où $g$ est une fonction quelconque de classe $C^2$.

Il nous faut maintenant une solution particulière de

$$(\partial_t - c\partial_x)u_P(t, x) = f(x - ct). \tag{31.81}$$

Si $F$ est une primitive de $f$ alors

$$u_P(t, x) = -\frac{1}{2c}F(x - ct) \tag{31.82}$$

fonctionne. Vu que $f$ est quelconque dans $C^1(\mathbb{R})$, la fonction $F$ est un élément quelconque de $C^2(\mathbb{R})$. Au final, la solution générale de l'équation des ondes est

$$u(t, x) = g_1(x + ct) + g_2(x - ct) \tag{31.83}$$

où $g_1$ et $g_2$ sont des éléments de $C^2(\mathbb{R})$.

## 31.4 Classification des équations du second ordre

Soit une équation générale d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+\beta u=f. \tag{31.84}$$

En ce qui concerne son symbole principal nous avons

$$\sigma(x,y,\xi_1,\xi_2)=a(x,y)\xi_1^2+b(x,y)\xi_1\xi_2+c(x,y)\xi_2^2, \tag{31.85}$$

ce qui donne l'équation des caractéristiques

$$a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2=0. \tag{31.86}$$

Si nous nous posons sur un point $(x_0,y_0)$ tel que $\nabla\phi(x_0,y_0)=0$ et $\partial_x\phi(x_0,y_0)\neq 0$ alors, via le théorème de la fonction implicite [5], la condition $\phi(x,y)=0$ définit une fonction $y\mapsto x(y)$ vérifiant

$$\phi\big(x(y),y\big)=0 \tag{31.87}$$

pour tout $y$ dans un voisinage de $y_0$.

Nous pouvons obtenir une équation différentielle ordinaire pour $x$ de la façon suivante. D'abord nous posons $\varphi(y)=\phi\big(x(y),y\big)$ et ensuite nous calculons la dérivée de $\varphi$ (qui est nulle par construction) :

$$0=\varphi'(y)=\frac{\partial\phi}{\partial x}x'+\frac{\partial\phi}{\partial y}. \tag{31.88}$$

Nous pouvons donc remplacer $\partial_y\phi$ par $x'\partial_x\phi$ dans l'équation des caractéristiques (31.86) :

$$a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+bx'\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+c\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2(x')^2=0. \tag{31.89}$$

Vu que nous avons supposé $(\partial_x\phi)\neq 0$ sur un voisinage de $(x_0,y_0)$ nous pouvons simplifier par $(\partial_x\phi)^2$ et avoir l'équation différentielle ordinaire

$$a\big(x(y),y\big)+b\big(x(y),y\big)x'(y)+c\big(x(y),y\big)x'(y)^2=0. \tag{31.90}$$

Notons que, conformément à ce que raconte le théorème des fonctions implicites, nous avons pris un voisinage de $y_0$ suffisamment petit pour que $x(y)$ reste dans un voisinage de $x_0$. Ce voisinage étant, nous pouvons le restreindre pour nous assurer du signe de $a$, $b$ et $c$. Cela est évidemment très théorique parce que le théorème de la fonction implicite parle de l'existence de voisinages, mais pas de façon de les construire.

Nous donnons la classification suivante.

**Définition 31.6.**
*Si $b^2-4ac<0$ alors l'équation est **elliptique**.*
*Si $b^2-4ac>0$ alors l'équation est **hyperbolique**.*
*Si $b^2-4ac=0$ alors l'équation est **parabolique**.*

**Exemple 31.7**
Un exemple d'équation parabolique est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{31.91}$$

où $\alpha>0$ est une constante. Cette équation est avec $a=c=0$, donc elle est parabolique. △

5. Théorème 18.48.

Une équation aux dérivées partielles peut changer de nature selon le point.

**Exemple 31.8**
Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x^2 - y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{31.92}$$

Son $b^2 - 4ac$ vaut $4(x^2 - y^2)$. Elle peut donc être hyperbolique, parabolique ou elliptique selon le point où l'on se trouve. △

### 31.4.1 Problème au limite

Dans les définitions qui suivent nous considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ assez régulier et possédant en particulier un vecteur normal extérieur $n(x)$ pour tout point $x \in \partial\Omega$.

**Définition 31.9.**
*Un problème aux limite* ***de Dirichlet*** *est d'imposer la condition*

$$u(x) = g(x) \tag{31.93}$$

*pour tout $x \in \Gamma \subset \partial\Omega$. C'est à dire imposer la valeur de $u$ sur une partie du bord du domaine.*

**Définition 31.10.**
*Un problème aux limites de* ***Von Neumann*** *est d'imposer*

$$\frac{\partial u}{\partial n} \cdot x = g(x) \tag{31.94}$$

*pour tout $x \in \Gamma \subset \partial\Omega$. C'est à dire imposer les valeurs de la dérivée normale de $u$ sur une partie du bord.*

**Exemple 31.11**
Lorsqu'on veut imposer un flux de chaleur aux bords d'un domaine pour l'équation de la chaleur, il s'agit de poser des condition de type Von Neumann. △

**Définition 31.12.**
*Soit un domaine $\Omega$ de $\mathbb{R}^d$ et un opérateur différentiel $L$ sur une partie de* $\mathrm{Fun}(\Omega)$*. Soit une fonction $g$ sur $\partial\Omega$. Un problème* ***aux limites stationnaires*** *est un problème du type : trouver $u$ définie sur $\Omega$ telle que*

$$\begin{cases} L(u) = f & \text{(31.95a)} \\ u|_{\partial\Omega} = g. & \text{(31.95b)} \end{cases}$$

**Définition 31.13.**
*Un problème* ***aux limites d'évolution*** *est du type : trouver $u \in \mathrm{Fun}\left(]0,\infty[ \times \Omega\right)$ tel que*

$$\begin{cases} \frac{\partial^m u}{\partial t^m} + L(u) = f & \text{sur } ]0,\infty[ \times \Omega \\ u(t,.) = g(t,.) & \text{sur } ]0,\infty[ \times \partial\Omega \\ u(0,.) = u_0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{31.96}$$

*où $u_0$ est une fonction sur $\Omega$.*

*L'opérateur $L$ ne doit pas opérer sur la partie «t» de $u$.*

**Définition 31.14.**
*Un problème aux limites est* ***bien posé au sens de Hadamard*** *si*

*(1) Il admet une unique solution.*

*(2) La solution dépend de façon continue en les données du problèmes.*

*La continuité est au sens des normes sur les fonction sur $\partial\Omega$ et sur $\Omega$ en ce qui concerne les fonctions «données» du problème et des normes pour les fonctions sur $\Omega$ ou $\bar{\Omega}$ en ce qui concerne la solution.*

**Exemple 31.15**(Un problème de Dirichlet bien posé)
Trouver la fonction $u$ définie sur $\Omega = [0,1]^2$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{31.97}$$

△ <++>

## 31.5 Principe du maximum

**Lemme 31.16** ([221])**.**
*Soit un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit une matrice symétrique strictement définie positive $A$ telle que $A_{ij} \in C^O(\bar{\Omega})$ pour laquelle il existe $\lambda > 0$ minorant toutes les valeurs propres de toutes les matrices $A(x)$ pour $x \in \Omega$* [6]*.*

*Nous posons $L' = -\sum_{ij} A_{ij}\partial_{ij}$. Si $u \in C^2(\Omega)$ atteint un minimum local en $x_0 \in \Omega$, alors*

$$(L'u)(x_0) \leqslant 0. \tag{31.98}$$

*Démonstration.* Nous allons bien entendu diagonaliser $A$. Si $T$ est une matrice nous avons, en posant $u(x) = v(Tx)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_k \frac{\partial v}{\partial x_k}(Tx)T_{ki} \tag{31.99}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \sum_{kl} T_{ki}T_{lj}\frac{\partial^2 v}{\partial x_l \partial x_k}(Tx). \tag{31.100}$$

Si $T$ est en particulier une matrice orthogonale diagonalisant $A$ (théorème 9.165) nous avons $T^{-1} = T^t$ et

$$\sum_{ij} T_{ki}A_{ij}T_{jl}^{-1} = D_{kl} = \lambda_k\delta_{kl} \tag{31.101}$$

où les $\lambda_k$ sont les valeurs propres de $A$. Notons que partout ici, tout est fonction de $x$ sur $\Omega$ : tant $A$ que $T$ que les $\lambda_k$. Avec tous ces résultats nous calculons vite que

$$(Lu)(x_0) = -\sum_k \lambda_k(\partial_k^2 v)(Tx_0). \tag{31.102}$$

Si $x_0 \in \Omega$ est un minimum local de $u$, alors l'application $v$ a un minimum local en $T^{-1}x_0$. Et donc

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}(Tx_0) \geqslant 0. \tag{31.103}$$

Du coup,

$$(Lu)(x_0) \leqslant 0. \tag{31.104}$$

□

6. Cela est plus que dire que toutes les $A(x)$ son symétriques strictement définie positive.

**Lemme 31.17** ([221]).
*Soit un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit une matrice symétrique strictement définie positive $A$ telle que $A_{ij} \in C^O(\bar{\Omega})$ pour laquelle il existe $\lambda > 0$ minorant toutes les valeurs propres de toutes les matrices $A(x)$ pour $x \in \Omega$.*

*Nous posons*

$$L = -\sum_{ij} A_{ij}\partial^2_{ij} + \sum_i b_i\partial_i + c \tag{31.105}$$

*où $b_i, c \in C^0(\bar{\Omega})$.*

*Soit $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que $Lu \geqslant 0$ sur $\Omega$. Alors*

*(1) Si $c = 0$ alors*

$$\min_{\bar{\Omega}}(u) = \min_{\partial\Omega}(u). \tag{31.106}$$

*(2) Si $c \geqslant 0$ alors*

$$\min_{\bar{\Omega}}(u) \geqslant \min_{\partial\Omega}(-u_-) \tag{31.107}$$

*où $u_-$ est défini par*

$$u_-(x) = \begin{cases} 0 & si\ u(x) \geqslant 0 \\ -u(x) & si\ u(x) \leqslant 0. \end{cases} \tag{31.108}$$

*Démonstration.* D'abord, vu que $\Omega$ est borné, la fermeture $\bar{\Omega}$ est compacte et $u$ y atteint son minimum. De plus $\partial\Omega$ est également compact (borné et le complémentaire est ouvert parce que $\Omega$ est ouvert). Donc $u$ y atteint également son minimum. Cela pour dire que les minima écrits dans (31.106) et (31.107) ont un sens.

Pour (1).

$\underline{Lu \geqslant \eta > 0}$ Nous supposons qu'il existe $\eta > 0$ tel que $(Lu)(x) \geqslant \eta$ pour tout $x \in \Omega$. Soit $x_0$ le point minimum sur $\bar{\Omega}$. Si $x_0 \in \Omega$ alors il est intérieur et $\partial_i u(x_0) = 0$ par la proposition 18.67. Dans ce cas nous avons

$$(Lu)(x_0) = (L'u)(x_0) > 0, \tag{31.109}$$

ce qui contredit le lemme 31.16. Nous en déduisons que le minimum de $u$ sur $\bar{\Omega}$ n'est pas atteint dans $\Omega$, mais sur $\partial\Omega$. Pour la définition de la frontière, voir 6.173. Ici nous avons $\bar{\Omega}\backslash\Omega = \partial\Omega$.

Cela prouve (31.106) dans ce cas.

$\underline{Lu \geqslant 0\ \textbf{sur}\ \Omega}$ Nous prenons maintenant le cas général. Nous posons

$$u_{\gamma,\epsilon}(x) = u(x) - \epsilon e^{\gamma x_1}. \tag{31.110}$$

Nous avons [7]

$$L(e^{\gamma x_1}) = e^{\gamma x_1}\big(-A_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma\big). \tag{31.111}$$

Soit $\gamma$ suffisamment grand pour que

$$\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma > 0. \tag{31.112}$$

Ici $\lambda$ minore toutes les valeurs propres des $A(x)$ et nous notons que $\gamma$ ne dépend pas de $\epsilon$. En utilisant l'inégalité du lemme 9.1709.170, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\sum_{ij} A_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \tag{31.113}$$

ce qui donne avec $\xi = e_1$ : $A_{11} \geqslant \lambda$, et même pour être plus précis : $A_{11}(x) \geqslant \lambda$ pour tout $x$. Ces inégalités donnent

$$-A_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma \leqslant -\lambda\gamma^2 + \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma < 0. \tag{31.114}$$

7. Nous abusons un peu de l'écriture parce que ce que nous calculons vraiment est $L\big(x \mapsto e^{\gamma x_1}\big)$.

Nous avons donc

$$L(e^{\gamma x_1}) = e^{\gamma x_1}\big( - A_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma\big) \leqslant -\lambda\gamma^2 + \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma < 0. \tag{31.115}$$

Nous posons

$$\eta = \epsilon\big(\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma\big) \min_{\bar{\Omega}}(e^{\gamma x_1}), \tag{31.116}$$

où le minimum a un sens parce que $\Omega$ est borné. Nous avons $\eta > 0$.

C'est le moment de calculer ce que $u_\epsilon$ peut pour nous :

$$\begin{aligned}
L(u_\epsilon) &= Lu - \epsilon L(e^{\gamma x_1}) && \text{(31.117a)}\\
&\geqslant -\epsilon L(e^{\gamma x_1}) && \text{(31.117b)}\\
&= -\epsilon e^{\gamma x_1}\big( - A_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma\big) && \text{(31.117c)}\\
&\geqslant -\epsilon e^{\gamma x_1}\big(\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma\big) && \text{(31.117d)}\\
&\geqslant \eta > 0. && \text{(31.117e)}
\end{aligned}$$

Justification :

— (31.117b) parce que $Lu \geqslant 0$.

— (31.117d) par (31.115).

La fonction $u_\epsilon$ est donc dans le cas précédent et nous avons

$$\min_{x\in\bar{\Omega}}\big(u(x) - \epsilon e^{\gamma x_1}\big) = \min_{x\in\partial\Omega}\big(u(x) - \epsilon e^{\gamma x_1}\big). \tag{31.118}$$

Mentionnons le fait que le choix fait de $\gamma$ ne dépend pas de $\epsilon$. Nous pouvons donc encore faire varier $\epsilon$ sans toucher à $\gamma$ et en maintenant toutes les inégalités prouvées jusqu'ici.

Vu que l'expression $e^{\gamma x_1}$ est majorable sur $\bar{\Omega}$ nous avons convergence uniforme

$$u_\epsilon \xrightarrow{\|.\|_{\bar{\Omega}}} u \tag{31.119}$$

pour $\epsilon \to 0$.

Supposons qu'aucun point de $\partial\Omega$ ne réalise le minimum de $u$. Alors il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) > u(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Mais comme $\partial\Omega$ est compact, il existe $\eta > 0$ tel que

$$u(x_0) < u(x) + \eta. \tag{31.120}$$

Soit $\epsilon$ tel que $\|u - u_\epsilon\|_{\bar{\Omega}} < \eta/2$. Nous avons

$$u(x_0) < u(x) - \eta \tag{31.121}$$

et donc aussi

$$u_\epsilon(x_0) < u(x_0) + \frac{\eta}{2} < u(x) - \frac{\eta}{2} < u_\epsilon(x), \tag{31.122}$$

ce qui signifierait que $u_\epsilon$ prend son minimum dans $\Omega$. Or nous savons que ce n'est pas le cas.

Donc il existe un point de $\partial\Omega$ qui réalise le minimum de $u$.

Pour (2).

Supposons pour commencer que $u \geqslant 0$ sur $\Omega$. Alors par continuité $u \geqslant 0$ sur $\bar{\Omega}$. Alors $u_- = 0$ et

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geqslant 0, \tag{31.123}$$

ce qui fait que l'inégalité (31.107) est évidente.

Nous supposons donc que l'ensemble

$$\Omega_- = \{x \in \Omega \text{ tel que } u(x) < 0\} \tag{31.124}$$

est non vide. Notons que c'est également un ouvert.

Soit $\bar{L}u = Lu - cu$. Vu que $c \geqslant 0$ et que $Lu \geqslant 0$ nous avons $\bar{L}u \geqslant 0$ sur $\Omega_-$. Par le point (1) nous avons

$$\min_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x). \tag{31.125}$$

Mais le minimum de $u$ est certainement atteint dans $\Omega_-$, donc

$$\min_{x\in\bar{\Omega}_-} u(x) = \min_{x\in\bar{\Omega}} u(x). \tag{31.126}$$

Cela nous donne une première bonne égalité :

$$\min_{x\in\partial\Omega_-} u(x) = \min_{x\in\bar{\Omega}} u(x). \tag{31.127}$$

Nous pouvons la prolonger :

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\bar{\Omega}} u(x) &= \min_{x\in\partial\Omega_-} u(x) && (31.128a)\\
&= \min_{x\in\partial\Omega_-} \big(-u_-(x)\big) && (31.128b)\\
&= \min_{x\in\partial\Omega_-\cap\partial\Omega} \big(-u_-(x)\big) && (31.128c)\\
&= \min_{x\in\partial\Omega} \big(-u_-(x)\big) && (31.128d)
\end{aligned}$$

Justifications :

— Pour (31.128c) nous avons la décomposition

$$\partial\Omega_- = \big(\partial\Omega_-\cap\Omega\big)\cup\big(\partial\Omega_-\cap\partial\Omega\big). \tag{31.129}$$

Or sur $\partial\Omega_-\cap\Omega$ nous avons $u(x) = 0$ et donc pas le minimum.

— Pour (31.128d). Sur $\partial\Omega$, le minimum est atteint dans la partie $\partial\Omega_-$ parce que le reste ne contient que des valeurs positives de $u$.

Cela prouve ce que nous voulions. □

**Théorème 31.18.**
*(Principe du maximum fort) Soit un ouvert borné $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Soit une matrice $A$ dont*

— *$A_{ij}$ est dans $C^0(\bar{\Omega})$*

— *$A(x)$ est symétrique strictement définie positive pour tout $x$.*

— *Il existe $\lambda > 0$ minimisant toutes les valeurs propres des toutes les matrices $A(x)$ sur $\bar{\Omega}$.*

*Soit $b_i, c \in C^0(\bar{\Omega})$ avec $c(x) \geqslant 0$ sur $\bar{\Omega}$.*

*Soit $u \in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} -\sum_{ij} A_{ij}\partial_{ij}u(x) + \sum_i b_i\partial_i u(x) \geqslant 0 & (31.130a)\\ u(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \partial\Omega. & (31.130b)\end{cases}$$

*Alors $u \geqslant 0$ sur $\bar{\Omega}$.*

*Démonstration.* Nous appliquons le lemme 31.17(2) :

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geqslant \min_{\partial\Omega}(-u_-). \tag{31.131}$$

Vu que $u(x) \geqslant 0$ sur $\partial\Omega$, nous avons $u_- = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc $\min_{\bar{\Omega}} u \geqslant 0$. □

## 31.6 Quelque exemples

### 31.6.1 Un changement de variables

Soit l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{31.132}$$

sur $\Omega = ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$. Nous imposons la condition aux bords

$$u(0,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{31.133}$$

Nous cherchons les solutions sous la forme

$$u(t,x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{31.134}$$

Nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} x t^{-3/2} f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)) \tag{31.135}$$

ainsi que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{31.136}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{t} f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{31.137}$$

En remettant le tout dans l'équation de départ et en simplifiant par $1/t$ (qui est permis parce que $t > 0$) :

$$-\frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\frac{x}{\sqrt{t}} - f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 0. \tag{31.138}$$

Nous résolvons l'équation différentielle

$$\frac{z}{2} g'(z) + g''(z) \tag{31.139}$$

pour la fonction $g$ de la variable réelle $z$. Cela fait, la réponse sera $f = g \circ z$ où $z$ serait la fonction

$$z(x,t) = x/\sqrt{t}, \tag{31.140}$$

Pour résoudre (31.139) nous commençons par résoudre pour la dérivée $h = g'$, c'est à dire l'équation différentielle

$$\frac{z}{2} h(z) + h'(z) = 0 \tag{31.141}$$

qui donne

$$\frac{g'(z)}{g'z} = -z/2. \tag{31.142}$$

Une intégration fournit $\ln\big(h(z)\big) = -z^2/4 + K$ et donc

$$h(z) = Ke^{-z^2/4} \tag{31.143}$$

et

$$g(z) = C + K\int_0^z e^{-s^2/4} ds. \tag{31.144}$$

Nous ne pouvons pas aller plus loin parce que nous ne sommes pas capables de calculer la primitive demandée. Nous laissons donc $g$ sous cette forme et nous posons

$$u(x,t) = g(x/\sqrt{t}), \tag{31.145}$$

en pleine confiance du fait que cela soit une solution de l'équation aux dérivées partielles (31.132).

Nous devons fixer $K$ et $C$ de telle façon à respecter les conditions aux bords (31.133). D'abord écrivons aussi explicitement que possible la fonction $u$ :

$$u(t,x) = K + C\int_0^{x\sqrt{t}} e^{-s^2/4}ds. \tag{31.146}$$

Il faut calculer $u(0,x)$ en termes de $C$ et $K$. Pour cela nous calculons, pour un $x$ fixé :

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = K + C\lim_{t\to 0^+}\int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-s^2/4}ds. \tag{31.147}$$

En utilisant un petit changement de variables sur l'intégrale gaussienne de l'exemple 13.233, et en remarquant que la fonction est symétrique,

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = \begin{cases} K + C\sqrt{\pi} & \text{si } x > 0 \\ K - C\sqrt{\pi} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{31.148}$$

À résoudre :

$$\begin{cases} K + C\sqrt{\pi} = 1 & \text{(31.149a)} \\ K - C\sqrt{\pi} = 0. & \text{(31.149b)} \end{cases}$$

Solution : $C = 1/2\sqrt{\pi}$ et $K = 1/2$. Au final,

$$u(t,x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-s^2/4}. \tag{31.150}$$

Notons que cela donne une valeur pour $u(t,0)$ :

$$u(t,0) = \frac{1}{2}. \tag{31.151}$$

# Chapitre 32

# Numérique

D'autres lectures agréables dans [324]

## 32.1 Introduction

À quels types de problèmes peut-on s'attendre lorsqu'on se lance dans du calcul numérique et en particulier dans la résolution numérique d'équations (algébrique, différentielles ou aux dérivées partielles) ?

Quelque réflexions en vrac sur ce sujet.

(1) Les erreurs de représentation de nombres : troncature et drift,

(2) Erreur de cancellation

(3) Conditionnement, stabilité : les réponses peuvent fortement dépendre des paramètres.

(4) Si on utilise une méthode itérative, comment savoir à quel moment on s'arrête ? Calculer la différence $|x_k - x_{k-1}|$ a-t-elle une erreur de cancellation ?

(5) Lors d'une implémentation, les matrices des systèmes à résoudre sont souvent très grandes et très creuses. Cela pose la question de la manière de les enregistrer.

(6) Pour la parallélisation, il faut faire attention au fait que parfois créer un nouveau processus demande plus de ressources que le mini-calcul qu'on voulait faire. Donc il ne faut pas toujours paralléliser tout ce qui est théoriquement parallélisable.

(7) Le fait que certaines méthodes son non-déterministes (Monté-Carlo) mène à des problèmes pour les tests unitaires des implémentations.

## 32.2 Représentations numériques

Dans cette section les séquences de chiffres écrites entre crochet sont à comprendre comme des séquences de chiffres qui représentent une quantité suivant un codage donné.

### 32.2.1 Entier relatif en complément à deux (binaire)

Si nous avons $m$ bits pour coder un entier relatif, une idée serait de prendre le premier bit pour le signe (0 pour positif et 1 pour négatif) et les autres pour la valeur absolue. Deux inconvénients :

(1) Il y a deux codages pour le zéro, donc gaspillage.

(2) L'algorithme pour faire la somme passe mal. Par exemple pour faire $1 + (-1)$, le 1 est codé comme [001] et le $-1$ par [101] et la somme se ferait naïvement comme

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Donc le résultat est [110] qui s'interprète comme $-2$. Complètement faux.

Une solution est d'utiliser le **complément à deux**, qui est la façon usuelle de représenter des entiers signés.

**Les entiers positifs** se codent normalement, en laissant à zéro le premier bit (donc si nous disposons de $m$ bits, nous codons sur $m-1$ bits).

**Les entiers négatifs** se codent en trois étapes.
- coder la valeur absolue
- inverser tous les bits (d'où le nom de «complément à deux» )
- soustraire 1.

**Exemple 32.1**
Pour coder $-1$ nous faisons
- Nous codons 1 : [001]
- Nous inversons tous les bits : [110]
- Nous faisons $-1$ : [101].

△

Avec ce système, la somme passe bien : calculer $1+(-1)$ donne

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$$

La réponse est donc [110] qu'il faut interpréter via le complément à deux.

$$110 \xrightarrow{+1} 111 \xrightarrow{\text{complément}} 000. \tag{32.1}$$

Et ce dernier [000] s'interprète comme zéro.

**Définition 32.2** (Entier signé en complément à deux[325])**.**
*La suite de bits* $[a_{m-1}\dots a_0]$ *s'interprète via la formule*

$$-a_{m-1}2^{m-1}+\sum_{i=0}^{m-2}a_i2^i. \tag{32.2}$$

Le premier bit donne effectivement le signe du nombre, mais l'interprétation d'un nombre n'est pas aussi simple que ce que l'on pourrait croire de prime abord.

**Exemple 32.3**(Entier signé en 8 bits)
Que pouvons nous faire avec 8 bits ? Le plus grand nombre est codé par [01111111] qui vaut $\sum_{k=0}^{6}2^k=2^7-1=127$. (avez-vous utilisé la somme (10.128) ?)

Le plus petit nombre codable en 8 bits n'est pas [11111111] mais bien [10000000] (cela est plus clair en regardant la formule (32.2) qu'en tentant de suivre la construction du complément à deux) qui signifie $-2^7=-128$.

Nous pouvons donc coder tous les nombres de $-128$ à 127. △

Plus généralement un système qui codes des entiers signés en $N$ bits utilisant le complément à deux peut coder de $-(2^{N-1})$ à $2^{N-1}-1$.

**32.4** (Le dépassement)**.**
Que se passe-t-il lorsque nous commettons un dépassement ? Calculons sur 3 bits la somme [011] + [001] qui revient à ajouter 1 au nombre le plus grand :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}$$

qui signifie $-2^2 = -4$. Lors d'un dépassement, nous retombons automatiquement sur le plus petit.

Ce phénomène est bien connu des personnes qui programment sans faire attention dans certains languages de programmation qui ne font pas attention à votre place.

**Définition 32.5** (Représentation en virgule fixe)**.**
*Soit $x$ un réel. On définit sa* ***représentation en virgule fixe*** *par*

$$x = \{[x_n x_{n-1} ... x_0, x_{-1} ... x_{-m}], b, s\} \tag{32.3}$$

*avec $b \in \mathbb{N}, b \geqslant 2$, $s \in \{0, 1\}$ et $x_j \in \mathbb{N}, x_j < b$ suivant la formule*

$$x = (-1)^s \sum_{j=-m}^{n} x_j . b^j. \tag{32.4}$$

### 32.2.2 Représentation en virgule flottante

**Définition 32.6** (Représentation en virgule flottante)**.**
*La* ***représentation en virgule flottante normalisée*** *en base $b$ d'un nombre est la donnée de*

*(1) Un bit $s$ pour le signe*

*(2) Un entier* non signé *$q$ de $e$ chiffres pour l'exposant*

*(3) Une suite de chiffres $[a_1 \dots a_m]$ pour la mantisse.*

*Ces données s'interprètent via la formule*

$$\mathrm{fl}(s, q, [a_1, \dots, a_m]) = (-1)^s \sum_{j=1}^{m} b^j a_j \times b^{q-d} \tag{32.5}$$

*où $d = b^{e-1}$ est le* ***décalage****.*

Une idée à retenir est que l'exposant est un entier non signé parce qu'il est plus simple d'introduire un décalage dans la formule (32.5) que de compliquer l'écriture de l'exposant.

### 32.2.3 Simple précision, IEEE-754

En écriture binaire, la représentation en virgule flottante est un peu différente parce qu'il y a une idée supplémentaire ; la simple précision que nous allons voir maintenant n'est donc pas un cas particulier de 32.6 avec $b = 2$.

Nous commençons par une description informelle de la précision simple avant de donner la définition. La représentation en **précision simple** d'un nombre se fait sur 32 bits répartis comme suit :

(1) 1 bit pour le signe,

(2) 8 bits pour l'exposant interprété comme nombre entier non signé

(3) 23 bits pour la mantisse

Soit le triple

$$\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) \tag{32.6}$$

Dans le cas générique, l'idée est de donner 24 bits pour la mantisse, mais en gardant en tête le fait que de toutes façons, le premier bit doit être 1, sinon il suffirait de décaler, c'est à dire changer l'exposant. Par conséquent la mantisse ne reçoit que 23 bits ; il y a un «1» sous-entendu en première position. Donc la mantisse $[a_1, \dots, a_{23}]$ est à lire comme le nombre

$$1, a_1 \dots a_{23} = 1 + \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}. \tag{32.7}$$

**Exemple 32.7**

La mantisse $[011100\dots0]$ signifie $1,0111 = 1 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$. △ Cela pour justifier la formule

$$\mathrm{sp}\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) = (-1)^s\big(1 + \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}\big)2^{q-127}. \tag{32.8}$$

Notons :

(1) Le «1+» dans la parenthèse correspond au 1 implicite en première position de la mantisse.

(2) Il y a un décalage de 127 dans l'exposant, parce que $q$ est un entier non signé.

Notons que cette règle du 1 implicite dans la mantisse empêche d'écrire le nombre 0, et ne permet pas d'écrire des nombres franchement petits parce que le 1 implicite est en *première* position dans la mantisse.

D'où l'idée de donner une règle particulière lorsque l'exposant vaut 0. Lorsque l'exposant est $q = 0$, alors nous ne considérons pas de 1 implicite dans la mantisse, et le décalage de l'exposant est $-126$ au lieu de $-127$. D'où la formule

$$\mathrm{sp}(s, q = 0, [a_1 \dots a_{23}]) = (-1)^s 2^{-216} \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}. \tag{32.9}$$

En particulier, si $q = 0$ et $a = [0\dots0]$, nous avons le nombre zéro exact (il y a deux possibilités pour le code).

Enfin, nous avons des cas particuliers lorsque l'exposant est maximum, c'est à dire $q = [1111\,1111] = 2^8 - 1 = 255$. Dans ce cas, le nombre codé est soit $+\infty$ soit NaN. Nous posons $\mathrm{sp}(s, q = 255, a = 0) = +\infty$ et $\mathrm{sp}(s, q = 255, a \neq 0) = NaN$. Il y a en réalité plusieurs valeurs différentes de NaN, mais nous n'entrons pas dans ces détails[326].

**Définition 32.8** (Représentation en simple précision (binaire))**.**
*La représentation en* ***précision simple*** *d'un nombre se fait sur* 32 *bits répartis comme suit :*

*(1)* 1 *bit pour le signe,*

*(2)* 8 *bits pour l'exposant interprété comme nombre entier non signé*

*(3)* 23 *bits pour la mantisse*

*Un nombre est représenté par un triple*

$$\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) \tag{32.10}$$

*Selon que l'exposant $q - d$ soit égal à 0, $2^8 - 1 = 255$ ou autre chose, les règles d'interprétation sont différentes. Il y a donc trois cas.*

**Exposant $q$ générique[327]** *Si $q \neq 0$ et $q \neq 255$ alors le nombre est* ***normalisée****. La règle de lecture est alors*

$$\mathrm{sp}\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) = (-1)^s\big(1 + \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}\big)2^{q-127}. \tag{32.11}$$

**Exposant $q$ égal à 0** *Le nombre est dit* ***dénormalisé*** *et la règle de lecture est*

$$\mathrm{sp}\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) = (-1)^s 2^{-126} \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}. \tag{32.12}$$

**Exposant $q$ égal à 255** *La règle de lecture est alors au cas pas cas ou à peu près.*

*(1)* $\mathrm{sp}(s, q = 255, a = 0) = +\infty$.

*(2)* $\mathrm{sp}(s, q = 255, a \neq 0) = \mathrm{NaN}$.

Vous pouvez jouer avec la simple précision dans [328].

**Exemple 32.9**(Plus petit normalisé)
Pour faire un nombre normalisé, il faut au minimum $q = 1$. En prenant $a_j = 0$ nous obtenons le plus petit nombre normalisé possible en simple précision. La formule (32.11) donne

$$\text{sp}(1, q = 1, a = 0) = 2^{1-127} = 2^{-126} \simeq 1.17549435082229 \times 10^{-38}. \tag{32.13}$$

△

**Exemple 32.10**(Plus grand normalisé)
L'exposant $q$ ne peut pas être maximum, sous peine de tomber dans les règles spéciales de $+\infty$ ou NaN. Donc $q = [1111\,1110] = 2^8 - 2 = 254$. En ce qui concerne la mantisse, il faut la prendre maximale, c'est à dire $a_j = 1$ pour tout $j$. Nous avons alors le nombre

$$\text{sp}(1, q = 254, a = [1 \dots 1]) = \big(1 + \sum_{j=1}^{23} 2^{-j}\big)2^{254-127} = (1 - \frac{1}{2^{24}})2^{128} \tag{32.14a}$$

$$= 3.40282346638528859811704183484516925440 \times 10^{38} \tag{32.14b}$$

où nous avons utilisé la somme (10.128) (et Sage pour le dernier calcul). △

Notons ceci avec Sage :

```
1
2  SageMath Version 7.0, Release Date: 2016-01-19
3  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
4  Type "help()" for help.
5
6 sage: A=(1- (1/2**24)  )*2**(128)
7 sage: type(A)
8 <type 'sage.rings.rational.Rational'>
```

tex/sage/sageSnip003.sage

La précisions du nombre donné en (32.14b) aurait été embarrassante si le type avait été un nombre en simple précision. Précision technique : en Python, le type `int` n'a pas de limite supérieure à part la mémoire.

**Exemple 32.11**(Plus petit non nul dénormalisé)
Pour être dénormalisé il faut $q = 0$ (ce qui est toutefois assez logique si nous voulons un petit nombre), et pour ne pas être nul, il faut une mantisse non nulle. Donc $a = [0 \dots 01]$. La formule (32.12) donne alors

$$\text{sp}(s = 0, q = 0, a = [0 \dots 01]) = 2^{-126}2^{-23} = 2^{-149} \simeq 1.40129846432482 \times 10^{-45}. \tag{32.15}$$

△

**Exemple 32.12**(Plus grand dénormalisé)
Pour être dénormalisé il faut toujours $q = 0$, mais cette fois nous prenons la plus grande mantisse possible :

$$\text{sp}(s = 0, q = 0, a = [1 \dots 1]) = 2^{-126} \sum_{j=1}^{23} 2^{-j} = 2^{-216}(1 - 2^{-23}) = 1.17549421069244 \times 10^{-38} \tag{32.16}$$

△

Notons ceci avec Sage :

```
sage: B=2**(-126)*(1-2**(-23))
sage: A=2**(-126)
sage: n(A-B)
1.40129846432482e-45
```

tex/sage/sageSnip004.sage

Vu que $2^{-23} \simeq 1.2 \times 10^{-7}$, approximer la parenthèse par 1 donne une faute sur la septième décimale, ce qui est visible en simple précision.

## 32.3 Problèmes pour écrire des nombres

**Définition 32.13.**
*L'**erreur relative** commise en remplaçant un nombre réel $x$ par une valeur approchée $\hat{x}$ est définie par*

$$\epsilon_x := \left| \frac{x - \hat{x}}{x} \right|. \tag{32.17}$$

L'erreur relative n'est pas influencée par l'ordre de grandeur de $x$. En effet, l'ordre de grandeur de $\hat{x}$ est certainement la même que celle de $x$, dans la majorité des cas sans problèmes. Du coup si $x' = 200x$ alors $\hat{x'} \simeq 200\hat{x}$ et le 200 se simplifie.

Le nombre de chiffres significatifs correct dans l'approximation est donné par $-\log_{10}(\epsilon_x)$. La partie entière de ce nombre est le nombre de chiffres tout à fait exacts et la partie décimale donne une idée sur le fait que le chiffre suivant est plus ou moins bien.

**Remarque 32.14.**
Si nous voulons donner $x \in \mathbb{R}$ à un ordinateur, nous sommes soumis à deux erreurs :

(1) D'abord, vu que nous ne pouvons pas taper sur le clavier toutes les décimales de $x$, nous faisons une **erreur de troncature**.

(2) L'ordinateur devant convertir cela en base deux, il commet une seconde erreur, dite **erreur d'assignation**.

### 32.3.1 Troncature : la base

Supposons que nous voulions écrire le nombre (écrit ici en base 10)

$$0.4567894251 \tag{32.18}$$

de façon plus facile à lire, on peut demander de ne laisser que $t$ chiffres significatifs. Disons $t = 3$.

**Technique de troncature** On garde 3 chiffres significatifs : 0.456. Facile.

**Technique d'arrondi** Vu que le premier qu'on supprime est un 7, le dernier qu'on garde est majoré de 1 : on écrit 0.457.

Que faire si le premier chiffre rejeté est un 5 ? En première approximation, nous pouvons prendre la règle suivante : si le premier chiffre rejeté est un 5, il faut augmenter de 1 de dernier chiffre gardé parce qu'il y a presque certainement encore un chiffre non nul derrière.

**Remarque 32.15.**
Les ordinateurs travaillent tous en mode d'arrondi.

**Exemple 32.16**
Si on doit entrer le nombre 0.38358546 dans un ordinateur qui ne garde que 3 chiffres significatifs, il faut taper 0.384 au clavier (erreur classique dans les exercices). △

### 32.3.2 Troncature : le drift

Soit une machine ne pouvant retenir que 3 chiffres significatifs et effectuant les arrondis vers le haut lorsque le chiffre à éliminer est un 5. Nous notons $\oplus$ et $\ominus$ les opérations d'addition et soustraction avec arrondis[329]. Les égalités comprenant plus de trois chiffres significatifs sont des égalités au sens de la machine. Nous écrirons donc sans états d'âme :

$$1 \oplus 0.555 = 1.555 = 1.56. \tag{32.19}$$

Considérons la suite numérique

$$\begin{cases} x_0 = 1.00 & \text{(32.20a)} \\ x_n = (x_{n-1} \ominus y) \oplus y & \text{(32.20b)} \end{cases}$$

avec $y = -0.555$.

Nous avons

$$x_1 = (1 \oplus 0.555) \ominus 0.555 = 1.56 \ominus 0.555 = 1.005 = 1.01 \tag{32.21}$$

et ensuite

$$x_2 = (1.01 \oplus 0.555) \ominus 0.555 = 1.565 \ominus 0.555 = 1.57 \ominus 0.555 = 1.015 = 1.02. \tag{32.22}$$

Et ainsi de suite. La suite est donc croissante alors que la définition nous donnerait envie d'avoir $x_n = x_0$ pour tout $n$.

**Remarque 32.17.**
En réalité, cette suite se stabilise à $x_n = 10$ pour tout $n$ à partir de $n = 845$. En effet,

$$(10 \oplus 0.555) \ominus 0.555 = 10.555 \ominus 0.555 = 10.6 \ominus 0.555 = 10.045 = 10. \tag{32.23}$$

Le fait est qu'à ce moment, l'erreur de troncature est assez loin dans les décimales pour que le premier chiffre négligé soit un "0" au lieu d'un "5".

Notons toutefois que cette stabilité n'est pas là pour nous rassurer parce qu'elle n'en est pas moins complètement fausse.

La règle de troncature adoptée dans Sage est d'arrondir au nombre pair le plus proche lorsque le premier nombre à négliger est un 5. Donc 12.5 s'arrondit à 12 plutôt que 13.

**Exemple 32.18**
Soient les expressions (algébriquement égales) :

(1) $A = x(x + 1)$

(2) $B = x^2 + x$

Nous savons que

$$x = \text{fl}(x) = 10^{-30} \tag{32.24}$$

et

$$1 = \text{fl}(1) \tag{32.25}$$

parce que pour 1 et $10^{-30}$, il n'y a pas d'erreurs d'assignation.

En précision simple, $10^{-30} + 1 = 1$ parce qu'en précision simple, il n'y a que 7 ou 8 chiffres significatifs [1].

Nous avons $A = 10^{-30}$, mais $x^2$ donne un `underflow` parce que $10^{-60}$ ne peut pas être représenté en précision simple. En pratique, beaucoup de logiciels en font 0. Dans ce cas, en réalité $B$ donne effectivement $10^{-30}$ après avoir fait $x^2 + x = 0 + x = 10^{-30}$. △

1. Erreur de « relation normale».

### 32.3.3 Quelque bonnes règles

(1) Si on a plusieurs nombres à additionner ou soustraire, il vaut mieux commencer par sommer ou soustraire ceux dont on sait qu'ils ont le même ordre de grandeur. Il n'y a donc pas tout à fait «associativité» des erreurs.

(2) Les opérations délicates sont l'addition et la soustraction. La multiplication et la division sont sans dangers, à part l'erreur de dépassement du maximum. Dans une multiplication, on perd au pire quelque chiffres significatifs, mais certainement les derniers, pas les premiers.

### 32.3.4 Erreur de "cancellation"

Lorsque deux nombres sont de même ordre de grandeur, avec plusieurs nombres significatifs identiques. La cancellation est le fait que, suite à la soustraction, tous les chiffres significatifs ou presque se sont simplifiés et qu'il ne reste plus que des chiffres non significatifs.

**Exemple 32.19**([330])
Sur une machine ne gardant que 4 chiffres significatifs, faire

$$0.5678 \times 10^6 - 0.5677 \times 10^6 = 0.0001 \times 10^6 = 0.1000 \times 10^3. \tag{32.26}$$

Le fait est que les trois derniers zéros ne sont pas significatifs, mais maintenant la machine nous fait croire qu'ils le sont.

Une autre façon de voir ce problème est d'imaginer qu'il faille faire la différence entre $0.5678\,289798 \times 10^6$ et $0.5677\,3136907$ sur cette machine. Certes la machine nous autorise à avoir 4 chiffres significatifs, donc au moment d'entrer les nombres nous perdons un beau paquet de chiffres. Mais au moment de faire la différence, nous perdons (presque) tout le reste. Donc là où nous pouvions espérer avoir 4 chiffres significatifs de la différence, nous n'en avons que 1. Les trois derniers zéros de la réponse ($0.1000 \times 10^3$) sont faux. △

**Remarque 32.20.**
L'erreur de cancellation provoque des chiffres significatifs faux, mais ne provoque pas de faute dans l'*ordre de grandeur* des réponses [2] . Donc si nous voulons nous assurer que $a$ et $b$ sont égaux «à erreur numérique près», le test

$$|a - b| < \epsilon \tag{32.27}$$

est valide, malgré l'erreur de cancellation qui ne manquera pas d'arriver dans le calcul de la différence.

**Exemple 32.21**
Soit à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \neq 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. Solution :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{32.28}$$

Supposons que $|4ac| \ll b^2$ avec tout de même pas tellement petit qu'on se perd dans la précision. Bref, on suppose que seules quelque dernières décimales de $b^2 - 4ac$ sont différentes de zéro.

On a :

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\tilde{b}} = |\tilde{b}| \tag{32.29a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{32.29b}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{32.29c}$$

2. Est-ce bien vrai, cela ?

Si $b > 0$, nous avons une erreur de cancellation dans $x_2$ parce qu'on fait la différence entre deux nombres presque égaux. Donc $x_2$ mal calculé. Par contre $x_1$ est bien calculé.

Si par contre $b < 0$, c'est le contraire.

Avec $a = 10^{-3}$, $b = 0.8$, $c = -1.2 \times 10^{-5}$. À la main nous obtenons : $x_1 = -800$, $x_2 = 1.5 \times 10^{-5}$, et un ordinateur se tromperait ...

```
1
2  SageMath Version 7.0, Release Date: 2016-01-19
3  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
4  Type "help()" for help.
5
6 sage: f(x)=10**(-3)*x**2+0.8*x-1.2*10**(-5)
7 sage: solve(f(x)==0,x)
8 [x == -1/50*sqrt(400000030) - 400, x == 1/50*sqrt(400000030) - ↩
     400]
9 sage: numerical_approx(-1/50*sqrt(400000030))
10 -400.000015000000
11 sage: numerical_approx( 1/50*sqrt(400000030) - 400  )
12 0.0000149999996779115
```

tex/sage/sageSnip001.sage

Donc Sage ne tombe pas dans le piège. △

Comment résoudre ce problème ? Ou, autre façon de poser la question : comment Sage a fait pour résoudre le problème ?

Utilisons les relations coefficients-racines :

$$x_1 + x_2 = -b/a \tag{32.30a}$$
$$x_1 x_2 = c/a \tag{32.30b}$$

La première lie les deux racines par des opérations de addition et soustractions, et donc n'est pas intéressantes. La seconde est bien. Si nous connaissons $x_1$, nous calculons

$$x_2 = \frac{c}{ax_1}. \tag{32.31}$$

Quitte à redéfinir $x_1$ et $x_2$, la solution bien calculée est :

$$x_1 = \frac{-b - \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{32.32}$$

**Exemple 32.22**
Nous considérons :

$$f(x) = cos(x + \delta) - \cos(x). \tag{32.33}$$

Cela a une erreur de cancellation lorsque $|\delta| \ll |x|$. On élimine l'erreur de cancellation par

$$f(x) = -2\sin(\delta/2)\sin\left(x + \frac{\delta}{2}\right). \tag{32.34}$$

**Problèmes et choses à faire**

Pourquoi la condition pour avoir l'erreur est $\delta \ll x$ et non simplement $\delta \ll 1$ ?

△

**Exemple 32.23**
Pour

$$f(x) = \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}. \tag{32.35}$$

On fait la coup du binôme conjugué :

$$f(x) = \frac{\delta}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}}. \tag{32.36}$$

Plus d'erreur de cancellation, vu qu'au dénominateur nous avons une somme de deux positifs. △

Les erreurs de cancellation ne se résolvent pas en augmentant la précision des nombres donnés.

**Exemple 32.24**(Dans la vie réelle)
La préparation de l'exemple 18.42 nous a porté à calculer la différence entre $\exp(x)$ et $f_{30}(x)$ où $f_{30}$ est censée être une bonne approximation de l'exponentielle. Des erreurs de cancellation sont donc à craindre.

Et en effet, le code suivant produit un résultat non déterministe :

```
f=1/15244417230585693025075200000*x^28 + ↩
   1/10888869450418352160768000000*x^27 + ↩
   1/155112100433309859840000000*x^25 + ↩
   1/3102242008666197196800000*x^24 + 1/2585201673888497664000000*x↩
   ^23 + 1/510909421717094400000*x^21 + 1/1216451004088320000*x^20↩
    + 1/121645100408832000*x^19 + 1/3556874280960000*x^17 + ↩
   1/104613949440000*x^16 + 1/13076743680000*x^15 + 1/622702080000*x↩
   ^13 + 1/23950080000*x^12 + 1/3991680000*x^11 + 1/362880000*x^9 + ↩
   1/20160000*x^8 + 1/5040000*x^7 + 1/120000*x^5 + 1/12000*x^4 + 1/6000*x^3 + x ↩
   - cos(x) + 2 -exp(x)
a=numerical_approx(10)
print(f(a))
```

tex/sage/sageSnip016.sage

Voir la question ici :
https://ask.sagemath.org/question/37946/undeterministic-numerical-approximation/

△

### 32.3.5 Calcul d'une dérivée

Pour calculer la dérivée de $f$ en $a$, il est loisible d'utiliser la formule

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{32.37}$$

Le numérateur est alors sujet à une erreur d'absorption dans le calcul de $a+h$ et ensuite une erreur de cancellation dans le calcul de la différence.

En utilisant la formule

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \tag{32.38}$$

nous pouvons espérer avoir une erreur de cancellation plus petite.

### 32.3.6 Erreur d'absorption

L'addition d'un nombre avec un nombre très différent peut faire perdre de l'information sur le plus petit. Par exemple avec 4 chiffres significatifs,

$$0.5678 \oplus 0.0001237 = 0.5679 \tag{32.39}$$

où nous avons perdu presque toute l'information du petit nombre.

Une situation particulièrement ennuyeuse est celle où justement c'est le petit nombre qui nous intéresse parce que le grand est censé se simplifier :

$$(0.0001327 \oplus 0.5678) \ominus 0.5678 = 0.5679 \ominus 0.5678 = 0.0001 \tag{32.40}$$

qui ne possède qu'un seul chiffre significatif correct alors que voyant le calcul, la réponse aurait pu être trouvée.

Moralité : si certains manipulations algébrique peuvent faire apparaître des simplifications avant de passer le calcul à la machine, il est bon de les effectuer.

## 32.4 Conditionnement et stabilité

**Définition 32.25.**
*Soit $F$ une fonction à valeurs réelles définie sur $X \times D$ où $X$ et $D$ sont des espaces vectoriels réels normés. Le problème de la recherche des solutions de*

$$F(x, d) = 0 \tag{32.41}$$

*est dit **stable** autour de $d_0 \in D$ si*

*(1) la solution $x = x(d)$ existe et est unique pour tout $d$ ;*

*(2) Pour tout $\eta > 0$, et pour tout $d_0$, il existe un nombre $K > 0$ tel que $\|d - d_0\| < \eta$ entraine $\|x(d) - x(d_0)\| \leqslant K \|d - d_0\|$.*

*La seconde condition est le fait que $x$ soit Lipschitz[3] sur un voisinage de $d_0$.*

**Exemple 32.26**(Stabilité de la différence)
Prenons le problème qui consiste à calculer la différence entre deux nombres : $x = a - b$. Cela se traduit par

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - a + b. \end{aligned} \tag{32.42}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \big|x(a,b) - x(a',b')\big| &= |a - b - a' + b'| && \text{(32.43a)} \\ &\leqslant |a - a'| + |b - b'| && \text{(32.43b)} \\ &= \|(a,b) - (a',b')\|_1 && \text{(32.43c)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la norme $\|.\|_1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par la proposition 10.2 sur les équivalences de normes, le nombre $K = \sqrt{2}$ fonctionne pour toute valeurs de $\eta$.

La problème de la différence est donc un problème stable. △

**Exemple 32.27**(Stabilité de la multiplication)
Si $a$ est fixé, le problème de calculer $ab$ ($b$ est la donnée) est stable. En effet ce problème est donné par la fonction $F(x, b) = x - ab$, dont la solution est $x(b) = ab$. Nous avons donc

$$\big|x(b) - x(b')\big| = |ab - ab'| = |a||b - b'|. \tag{32.44}$$

La constante de Lipschitz de ce problème est donc $|a|$. △

3. Définition 12.243.

**Définition 32.28.**
*Le nombre*

$$K_{abs}(d_0,\eta) := \sup_{d \text{ tel que } |d_0-d|<\eta} \frac{\|x(d)-x(d_0)\|_X}{\|d-d_0\|_D} \tag{32.45}$$

*est appelé le* ***conditionnement absolu*** *du problème autour de $d_0$.*

*Soit $F(x,d)=0$ un problème stable de conditionnement absolu $K_{abs}(d,\eta)$. Le conditionnement relatif est défini par*

$$K_{rel}(d,\eta) := K_{abs}(d,\eta)\frac{\|d\|_D}{\|x(d)\|_X}. \tag{32.46}$$

*Le problème est dit* ***bien conditionné*** *près de $d$ si $K_{rel}(d,\eta)$ est petit.*

**Exemple 32.29**(Mauvais conditionnement de la différence)
Reprenons le problème de la différence, mais en fixant $a$. Nous avons donc $x(b)=a-b$ et le conditionnement absolu est

$$\sup \frac{|x(b)-x(b_0)|}{|b-b_0|} = 1 \tag{32.47}$$

Le conditionnement relatif est :

$$K_{rel}(b_0,\eta) = \frac{|b|}{|a-b|}. \tag{32.48}$$

Et donc le problème est mal conditionné autour de $a$.

Autrement dit, si $a'$ est un nombre proche de $a$, calculer la différence $a-a'$ est un problème mal conditionné. △

**Exemple 32.30**(Bon conditionnement de la multiplication)
Pour le problème $F(x,b)=x-ab$ nous avons

$$K_{abs} = \sup_{b'} \frac{|ab-ab'|}{|b-b'|} = |a|. \tag{32.49}$$

Et aussi

$$K_{rel} = a\frac{|b|}{|ab|} = 1. \tag{32.50}$$

Le conditionnement relatif du problème de la multiplication est donc toujours 1. Il est donc un toujours un problème bien conditionné. △

Ne pas confondre :

**Le conditionnement** provient du problème lui-même.

**La stabilité** provient de l'algorithme de résolution.

**Exemple 32.31**(Un problème mal conditionné)
Le système

$$\begin{cases} 2.1x+3.5y=8 & \text{(32.51a)} \\ 4.19x+7.0y=15 & \text{(32.51b)} \end{cases}$$

Solution : $x=100$, $y=-57.714285\ldots$ (périodique)

Perturbons : nous remplaçons 4.19 par 4.192. L'erreur relative est : $4.77\times10^{-4}$.

Solution : $\bar{x}=125$, $\bar{y}=-72.714285\ldots$, avec donc erreur relative de 0.26. Autrement dit : l'erreur relative sur la solution est grande même avec une petite erreur relative sur la donnée.

C'est un problème mal conditionné.

Le fait est que c'est une intersection de deux droites presque parallèles. Donc effectivement une petite perturbation d'une des deux droites donne une grande perturbation du point d'intersection.

Le fait est qu'un ordinateur effectue *toujours* une perturbation, au moins de l'ordre $10^{-16}$ pour ne fut-ce que représenter les nombres. C'est à dire une perturbation sur les six nombres définissant le système. Il n'y a donc pas d'espoir d'obtenir un algorithme donnant une bonne réponse. △

Un résultat pratique pour étudier le conditionnement d'un problème est le suivant.

**Corollaire 32.32.**
*Soit $x = x(d)$ un problème stable. Supposons $\mathbb{D}$ de dimension finie, supposons que $U$ est ouvert dans $\mathbb{D}$. Supposons encore $x\colon U \to \mathbb{R}$ différentiable en $d_0$. Alors quand $\eta$ est petit, on a*

$$K_{abs}^{\eta}(d_0) \sim \|\nabla x(d_0)\|. \tag{32.52}$$

**Lemme 32.33.**
*Tout problème de la forme $x = x(d)$ avec $d \in \mathbb{R}$ et $x \in C^1(\mathbb{R})$ est stable.*

*Démonstration.* Il faut démontrer qu'une fonction $C^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifie automatiquement la condition (2) de la définition de la stabilité. Pour cela, remarquons qu'une fonction $C^1$ possède une dérivée continue, et donc bornée sur tout compact [4]

Prenons $\eta > 0$ et $d_0 \in \mathbb{R}$ et puis un $d$ tel que $|d - d_0| < \eta$. Par le théorème des bornes atteintes, la fonction $x'$ est bornée sur l'intervalle $[d_0 - \eta, d_0 + \eta]$. Appelons $K$ un majorant de $x'$ sur cet intervalle. La fonction

$$f(d) = x(d_0) + K|d - d_0| \tag{32.53}$$

majore $x(d)$, et donc on a

$$\big|x(d) - x(d_0)\big| \leqslant K|d - d_0|. \tag{32.54}$$

Attention : vérifier si ce raisonnement est correct avec $d_0 > d$, et adapter au besoin. □

**Exemple 32.34**
Un exemple de problème stable de la forme $x = x(d)$ avec $d \in \mathbb{R}$ et $x \in C^0(\mathbb{R})\backslash C^1(\mathbb{R})$.

La fonction

$$x(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{32.55}$$

est continue, mais pas $C^1$ (non dérivable en $x = 0$). La dérivée est partout bornée par 1, et donc le problème est stable.

Un autre exemple très classique serait de prendre $x(d) = |d|$. Dans ce cas, on peut prendre n'importe que $\eta$ et $K = 1$. Le calcul est que

$$|x(d) - x(d_0)| < K|d - d_0| \tag{32.56a}$$
$$\big||d| - |d_0|\big| < |d - d_0|. \tag{32.56b}$$

Cette dernière inéquation est correcte, comme on peut le voir en mettant au carré les deux membres.

△

**Exemple 32.35**
Un exemple de problème instable de la forme $x = x(d)$ avec $d \in \mathbb{R}$ et $x \in C^0(\mathbb{R})$.

Un exemple assez classique de fonction dont la dérivée n'est pas bornée sans pour autant que la fonction aie un comportement immoral [5] est $x \mapsto \sqrt{x}$. Afin d'avoir une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, nous regardons la fonction

$$x(d) = \sqrt{|d|}. \tag{32.57}$$

4. Un compact est un ensemble fermé et borné, typiquement un intervalle du type $[a, b]$.
5. Penser à $x \mapsto x \sin(1/x)$.

Si nous considérons maintenant $d_0 = 0$ et n'importe quel $\eta$, nous avons

$$\frac{|x(d) - x(d_0)|}{|d - d_0|} = \frac{\sqrt{d}}{d} = \frac{1}{\sqrt{d}}. \tag{32.58}$$

Il n'est pas possible de trouver un $K$ qui majore ce rapport. Le problème est donc mal conditionné.

Attention : dans ce calcul nous avons supposé $d > 0$. Pensez à adapter au cas $d < 0$. △

**Exemple 32.36**(Problème bien conditionné avec algorithme instable)
Soit à calculer

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx \tag{32.59}$$

avec $n \geqslant 0$. Par partie, nous obtenons :

$$I_n = 1 - nI_{n-1}. \tag{32.60}$$

D'autre part, $I_0 = \frac{e-1}{e}$, $I_1 = \frac{1}{e}$. Puis par récurrence, c'est tout en main.

Du côté de l'ordinateur, nous lui donnons forcément une approximation de $I_1$, parce que nous lui donnons une approximation de $e$. Soit l'erreur $\epsilon_1$ sur $I_1$.

Sans démonstration :

**Lemme 32.37.**
*Nous avons* $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Mais numériquement, il n'est pas possible de rester longtemps sous $\epsilon_1$ parce que nous n'espérons pas avoir une erreur plus petite que ça. Donc à partir du moment où $I_n < \epsilon_1$, les valeurs sont toutes complètement fausses. Cela est le mieux que l'on puisse espérer. Mais la réalité est pire.

En réalité, en lançant le calcul sur un ordinateur, les valeurs sont même croissantes avec $n$ à partir d'un certain moment.

On peut étudier l'erreur et montrer que l'erreur est donnée par :

$$\epsilon_n = (-1)^{n-1} n! \epsilon_1. \tag{32.61}$$

Mais comme la factorielle est tellement forte que c'est sans espoir d'aller loin en essayant très fort de donner une petite erreur sur $\epsilon_1$.

△

Il existe heureusement un algorithme stable pour cette intégrale. La formule est :

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n). \tag{32.62}$$

Si nous savons un $I_N$ avec $N$ grand, cette formule donne les $I_i$ avec $i = N, N-1, \ldots, 2$. Posons donc $I_N = a \in \mathbb{R}$ n'importe comment. Donc $\epsilon_N$ est grand. Mais il se trouve que l'erreur sur $\epsilon_1$ est donnée par

$$\epsilon_1 = \frac{(-1)^{N-1}}{N!}\epsilon_N. \tag{32.63}$$

Donc même en prenant vraiment n'importe quoi pour $I_N$, nous obtenons de bonnes approximations pour $I_i$ avec les petits $i$. Même avec $I_{20} = 1000$ (qui est complètement faux), nous trouvons énormément de chiffres significatifs corrects pour $I_1$.

### 32.4.1 Comment choisir et penser le $K$ ?

La formule (32.45) contient une formule qui ressemble étrangement à la dérivée. La stabilité d'un problème est très liée à la dérivée de $F$. La stabilité et la dérivée ne sont pas les mêmes choses,

mais il n'est pas mauvais de penser au $K$ de la stabilité comme la dérivée. Ou plus précisément : le supremum de la dérivée.

Un fil conducteur du lemme 32.33 et des exemples 32.34, 32.35 est que l'on a un $K$ qui fonctionne lorsque la dérivée est bornée sur l'intervalle $]d_0 - \eta, d_0 + \eta[$. Dans le cas où ce supremum existe, le prendre en guise de $K$ fonctionne souvent.

Il faut cependant parfois faire acte d'imagination. La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Il n'empêche que $K = 1$ fait fonctionner la définition de la stabilité. Remarquez que $K = 1$ est le supremum de la dérivée là où elle existe.

À partir du moment où c'est clair que le $K$ est le supremum de la dérivée, on comprend pourquoi c'est le gradient qui arrive dans le corollaire 32.32. En effet, le gradient indique la direction de plus grande pente. C'est donc bien dans cette direction qu'il faut chercher la «plus grande dérivée».

**Proposition 32.38.**
*Pour le problème stable $x = x(d)$ avec $x \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a*

$$K_{abs}(d) \sim \|dx_d\| \tag{32.64}$$

*où $dx_d$ désigne la différentielle de $x$ en $d$ et la norme est la norme opérateur.*

## 32.5 Un peu de points fixes

### 32.5.1 Choix de la fonction à point fixe

Pour l'équation $f(x) = 0$, il existe une infinité de fonctions $g$ pour lesquelles l'équation est équivalente à $x = g(x)$.

Exemple : $f(x) = x^2 - 2 - \ln(x)$, nous pouvons faire

(1) $x = x^2 - 2 - \ln(x) + x$

(2) Poser $x^2 = 2 + \ln(x)$ et donc

$$x = -\sqrt{2 + \ln(x)} \tag{32.65a}$$
$$x = \sqrt{2 + \ln(x)}. \tag{32.65b}$$

(3) Ou encore

$$x = \frac{2 + \ln(x)}{x} \tag{32.66}$$

où nous savons déjà que $x \neq 0$ parce que $x = 0$ n'est pas dans le domaine de $f$.

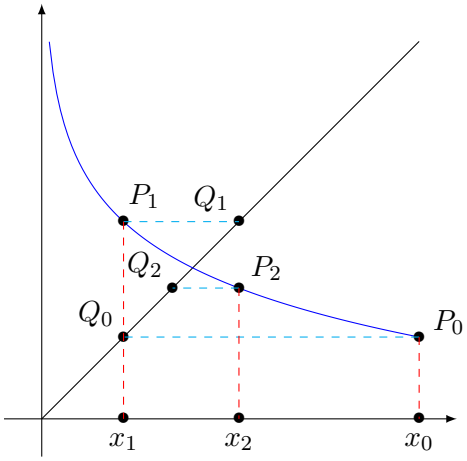
(4) Ou par l'exponentielle :

$$x = e^{x^2 - 2}. \tag{32.67}$$

Dans tous ces cas nous pouvons construire une suite $(x_n)$ en posant un nombre arbitraire pour $x_0$ et ensuite la récurrence

$$x_{n+1} = g(x_n). \tag{32.68}$$

Graphiquement, la solution de l'équation est l'intersection entre les courbes $y = x$ et $y = g(x)$. Un petit dessin pour montrer la convergence :




Attention : cette méthode ne converge pas toujours. Parfois elle converge de façon monotone, et parfois pas. Le choix de la fonction $g$ qui fait $x = g(x)$ peut énormément changer la vitesse de convergence.

**Théorème 32.39** (Condition suffisante pour existence d'un point fixe)**.**
*Une fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ admet au moins un point fixe dans $[a, b]$.*

**Théorème 32.40** (Condition suffisante pour l'unicité)**.**
*Soit $f$ continue sur $[a, b]$ avec $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$. Supposons qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ nous ayons $|g'(x)| \leqslant k$ alors*

*(1) La fonction $g$ possède un unique point fixe dans $[a, b]$.*

*(2) Pour tout $x_0 \in [a, b]$, tous les termes de la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ sont dans $[a, b]$.*

*(3) Ladite suite $(x_n)$ converge vers le point fixe.*

**Théorème 32.41.**
*Soit $f$ continue sur $[a, b]$ avec $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$. Supposons*

*(1) qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ nous ayons $|g'(x)| \leqslant k$ et*

*(2) $g$ est $p$ fois dérivable sur $[a, b]$.*

*(3) $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(p-1)}(\alpha)$ et $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ où $\alpha$ est l'unique point fixe.*

*Alors la suite $(x_n)$ converge avec un ordre $p$.*

**Exemple 32.42**
Nous reprenons

$$f(x) = x^2 - 2 - \ln(x). \tag{32.69}$$

Et nous voulons résoudre $f(x) = 0$. Graphiquement c'est l'intersection entre $y = x^2-2$ et $y = \ln(x)$. Il est vite tracé de savoir qu'il y a deux solutions : $\alpha_1 \in [0, 1]$ et $\alpha_2 \in [\sqrt{2}, 2]$.

Déjà un petit problème : l'intervalle $[0, 1]$ ne va pas parce que $f$ n'y est pas continue. Un petit raffinement d'analyse nous fournit $\alpha_1 \in [e^{-2}, 1]$.

Nous avons au moins les fonctions de points fixes suivantes :

$$g_1(x) = \sqrt{2 + \ln(x)} \tag{32.70a}$$

$$g_2(x) = e^{x^2-2}. \tag{32.70b}$$

Pour la première, il y avait un $\pm$ qui a été négligé parce que nous savons que les deux solutions cherchées sont positives. Travaillons avec la première. D'abord

$$g_1'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}}. \tag{32.71}$$

Nous avons $\lim_{x\to e^{-2}} g_2'(x) = +\infty$. Il ne sera donc pas possible de trouver $0 < k < 1$ tel que $|g'(x)| \leqslant k$. Tentons quand même la méthode :

$$x_0 = 0.5 \tag{32.72}$$

Il se fait que cela est plus proche de $\alpha_1$ que de $\alpha_2$. Mais en réalité la suite converge vers $\alpha_2$.

Passons à la seconde méthode.

$$g_2'(x) = 2xe^{x^2-2}. \tag{32.73}$$

Sur l'intervalle $[e^{-2}, 1]$, $g_2'$ est croissante et prend toutes ses valeurs dans $[e^{-2}, 1]$. Nous pouvons prouver que

$$|g_2'(x)| \leqslant 2e^{-1} < 1. \tag{32.74}$$

Donc poser $k = 2e^{-1}$ fait fonctionner la proposition. Donc quel que soit le $x_0$ pris dans cet intervalle, nous aurons une suite convergente vers un point fixe à l'intérieur de l'intervalle. C'est à dire convergente vers $\alpha_1$.

Cela est un exemple de problème pour lequel changer de fonction $g$ change réellement la vie.
△

### 32.5.2 Convergence quadratique

**Définition 32.43.**
*Une suite $(x_n)$ a une convergence **quadratique** vers $\alpha$ si elle converge vers $\alpha$ et s'il existe un $C$ tel que pour tout $n$ nous ayons*

$$\|x_{n+1} - \alpha\| \leqslant C\|x_n - \alpha\|^2. \tag{32.75}$$

Il est bien entendu possible de parler de convergence quadratique si la relation (32.75) a lieu seulement à partir d'un certain indice.

Le lemme suivant donne l'importance du choix de point de départ lorsqu'on utilise une méthode itérative dont la convergence est quadratique.

**Lemme 32.44.**
*Soit une suite $x_n \to \alpha$ de convergence quadratique. Si $\|x_0 - \alpha\| \leqslant r$ alors*

$$\|x_n - \alpha\| \leqslant \frac{1}{C}(Cr)^{2^n} \tag{32.76}$$

*Démonstration.* Nous pourrions directement prouver la formule (32.76) par récurrence, mais nous allons la reconstruire un peu. Nous cherchons

$$\|x_n - \alpha\| \leqslant C^{k(n)}r^{2^n}. \tag{32.77}$$

Nous avons les inégalités

$$\|x_{n+1} - \alpha\| \leqslant C\|x_n - \alpha\|^2 \tag{32.78a}$$
$$\leqslant CC^{2k(n)}r^{2^{n+1}} \tag{32.78b}$$
$$= C^{2k(n)+1}r^{2^{n+1}} \tag{32.78c}$$

d'où nous voyons que la fonction $k$ doit vérifier

$$\begin{cases} k(0) = 0 & \text{(32.79a)} \\ k(n+1) = 2k(n) + 1 & \text{(32.79b)} \end{cases}$$

La première équation est l'hypothèse $\|x_0 - \alpha\| \leqslant r$ comparée à la formule (32.77). Il est vite vérifié que $k(n) = 2^n - 1$. D'où le résultat. □

Si le point de départ est choisit de façon à avoir $Cr < 1$ alors nous avons là un très bon majorant parce qu'il s'agit d'un majorant convergeant très rapidement vers zéro. Si au contraire $Cr > 1$ alors ce majorant ne sert à rien.

**32.45.**
Le fait d'avoir une convergence quadratique signifie que le nombre décimales correctes double (environ) à chaque itérations, dans n'importe quelle base. En effet supposons que $x_n$ ait $k$ décimales correctes ; cela signifie que $|x_n - \alpha| \sim 10^{-k}$. Donc

$$|x_{n+1} - \alpha| \lessapprox M10^{-2k}. \tag{32.80}$$

Cela est le double de décimales correctes de $|x_n - \alpha|$, moins l'ordre de grandeur de $M$.

Pour la méthode de bisection, le nombre de décimales augmente de 1 à chaque itération, mais seulement en base 2. En base 10, de façon générique[6] il faut entre 3 et 4 itérations pour avoir une décimale de plus.

**32.46** (Condition d'arrêt[331])**.**
D'autre part, lorsqu'une méthode a une convergence quadratique, nous avons un test d'arrêt. Pour ce voir, nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{C|x_n - \alpha|^2}{|x_n - \alpha|} = 0. \tag{32.81}$$

Cette limite est alors également valable sans les valeurs absolues et si nous soustrayons $x_n - \alpha$ au numérateur, la limite devient $-1$ :

$$-1 = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - \alpha}. \tag{32.82}$$

Ou encore

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - \alpha} = 1. \tag{32.83}$$

Cela a pour conséquence que si $n$ est grand,

(1) $x_{n+1}$ a le même ordre de grandeur que $x_n - \alpha$.
(2) $x_n - x_{n+1}$ et $x_n - \alpha$ ont le même signe.

Donc si nous voulons une approximation de $\alpha$ avec une erreur $\epsilon$, il suffit d'arrêter le calcul lorsque $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \epsilon$. Et ce faisant nous savons de plus si l'approximation est par excès ou par défaut.

### 32.5.3 Convergence

**Proposition 32.47** (Convergence d'une méthode de point fixe[331])**.**
*Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ et $\alpha$ un point fixe attractif*[7] *de $g$. Soit $k$ tel que $|g'(\alpha)| < k < 1$ et $\delta$ tel que $\|g'\|_{B(\alpha,\delta)} < k$.*

*Alors*

*(1) La fonction $g$ est $k$-contractante*[8] *sur $B(\alpha, \delta)$.*
*(2) Nous avons $g\big(B(\alpha, \delta)\big) \subset B(\alpha, \delta)$.*
*(3) Pour tout $x_0 \in B(\alpha, \delta)$ la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $\alpha$ et*

$$|x_n - \alpha| \leqslant |x_0 - \alpha|k^n. \tag{32.84}$$

*Si de plus $g'(\alpha) = 0$ et $g$ est de classe $C^2$ alors nous avons convergence quadratique (définition 32.43).*

*Démonstration.* Vu que $\alpha$ est un point fixe attractif de $g$ nous pouvons considérer un $k$ tel que $|g'(\alpha)| < k < 1$. Et comme $g$ est de classe $C^1$, la fonction $g'$ est continue et donc bornée sur toute boule du type $\overline{B(\alpha, \delta)}$. Soit $\delta$ le plus grand nombre tel que $\|g'\|_{\overline{B(\alpha,\delta)}} \leqslant k$. Nous notons $I = \overline{B(\alpha, \delta)}$ pour cette valeur de $\delta$.

6. C'est à dire sauf coup de malchance ou coup de chance.
7. Définition 18.19.
8. Définition 18.22

Pour tout $x \in I$ nous avons, en utilisant le théorème des accroissements finis 12.129(2) :

$$\begin{aligned} |g(x) - \alpha| &= |g(x) - g(\alpha)| && (32.85a)\\ &\leqslant \sup_{t\in I} |g'(t)||x - \alpha| && (32.85b)\\ &\leqslant k|x - \alpha| && (32.85c)\\ &< \delta && (32.85d) \end{aligned}$$

parce que $k < 1$ et $|x - \alpha| \leqslant \delta$. Par conséquent $g(x) \in B(\alpha, \delta)$. Cela prouve le point (2). Pour le point (1), soient $x, y \in B(\alpha, \delta)$ et

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \sup_{a\in I} |g'(a)||x - y| \leqslant k|x - y|. \tag{32.86}$$

Pout le point (3) nous avons $|g(x_n) - \alpha| \leqslant k|x_n - \alpha|$, c'est à dire

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant k|x_n - \alpha|. \tag{32.87}$$

Le résultat annoncé s'obtient par récurrence sur $n$.

En ce qui concerne la convergence quadratique, c'est du Taylor. Développons $g(x_n)$ autour de $g(\alpha)$ :

$$g(x_n) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2}(x_n - \alpha)^2\epsilon(x_n - \alpha) \tag{32.88}$$

avec $\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$. En posant $C = \frac{1}{2}\sup_{t<\delta} |\epsilon(t)|$ nous avons $|g(x_n) - g(\alpha)| \leqslant C|x_n - \alpha|^2$, c'est à dire

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2. \tag{32.89}$$

□

Ce corollaire est une paraphrase de la proposition 32.47. Il en retient seulement les points intéressants en pratique.

**Corollaire 32.48.**
*Soit $\alpha$ une solution de l'équation $x = g(x)$, avec $g$ continue sur un voisinage de $\alpha$ et dérivable dans l'intérieur. Nous supposons que*

$$|g'(\alpha)| < 1. \tag{32.90}$$

*Alors il existe un rayon $\delta$ tel que si $x_0 \in B(\alpha, \delta)$, la suite $(x_n)$ converge vers $\alpha$.*

Certes cette proposition demande moins d'hypothèses, mais en réalité, il ne donne pas de vrais moyens de choisir un point de départ $x_0$. Avec les deux théorèmes précédents, nous pouvions prendre $x_0$ n'importe où dans $[a, b]$. Le fait est que pour choisir $x_0$ nous pouvons tracer et donner à la main un $x_0$ proche de ce qui semble être $\alpha$. Si ça ne converge pas, il faut donner un $x_0$ plus proche. La proposition nous assure que si nous jouons bien à choisir $x_0$ très proche, la suite finira par converger.

Notons que le corollaire 32.48 a encore l'inconvénient de demander de calculer $g'(\alpha)$ alors que $\alpha$ est inconnu. La résolution de l'inéquation $|g'(x)| < 1$ nous donne un certain nombre d'intervalles dans $\mathbb{R}$.

Soient $I_n$ les intervalles solutions de l'inéquation. Si $\alpha \in I_n$ alors la méthode converge. Sinon, c'est pas garantit. En tout cas nous ne devons pas savoir réellement $\alpha$ pour appliquer le théorème. Il suffit de savoir que $\alpha$ est dans un des $I_n$.

## 32.6 Méthode de Newton

L'objectif de la méthode de Newton est d'évaluer une racine $\alpha$ de l'équation $f(x) = 0$ lorsque nous avons déjà une approximation $x_0$ de la racine $\alpha$.

**Définition 32.49.**
*Le nombre $\alpha$ est une* ***racine simple*** *de l'équation $f(x) = 0$ si $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. Le nombre $\alpha$ est une* ***racine multiple*** *d'ordre $r$ de $f(x) = 0$ si*

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)(\alpha)} = 0 \tag{32.91}$$

*et $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$.*

**Exemple 32.50**
La fonction $x \mapsto x^3$ en $x = 0$ est un racine d'ordre 3. △

### 32.6.1 «Justification» par la formule par Taylor

Soit une fonction $f$ continue et dérivable sur $[a, b]$. Soit $\alpha$ une racine de $f$ et $x_n$ une de ses approximation. Nous notons l'erreur $\theta$ et nous avons $\alpha = x_n + \theta$. Du coup nous avons $f(x_n + \theta) = f(\alpha) = 0$.

Écrivons la série de Taylor du théorème 12.263 autour de $x_n$ : il existe une fonction $\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$ telle que

$$f(\alpha) = f(x_n + \theta) = f(x_n) + \theta f'(x_n) + \frac{\theta^2}{2}\epsilon(\theta). \tag{32.92}$$

Nous isolons le $\theta$ du terme d'ordre 1 en nous souvenant que le membre de gauche est nul :

$$\theta = -\frac{f(x_n) - \theta^2\epsilon(\theta)}{f'(x_n)} \tag{32.93}$$

Vu que $\alpha = x_n + \theta$, nous pouvons écrire

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n) + \theta^2\epsilon(\theta)}{f'(x_n)}. \tag{32.94}$$

Il est donc raisonnable de poser

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{32.95}$$

en espérant que cela soit une meilleur approximation de $\alpha$ que $x_n$.

En tout cas l'erreur sur $x_{n+1}$ est

$$\alpha - x_{n+1} = x_n + \theta - x_n + \frac{f(x_n) + \theta^2\epsilon(\theta)}{f'(x_n)} = \theta + \frac{f(x_n) + \theta^2\epsilon(\theta)}{f'(n_n)}, \tag{32.96}$$

qui ne doit pas être fondamentalement plus grand que $\theta$ dès que $\theta$ est petit, surtout que si $x_n$ est une approximation de $\alpha$, nous pouvons espérer que $f(x_n)$ soit également petit. Là où les choses peuvent déraper en grand, c'est si $f'(x_n)$ est petit.

Cette méthode de Newton ne converge pas toujours. Le pire est lorsque par malheur il y a une bosse pas loin de la racine. Alors il y a un risque de tomber sur $f'(x_{n+1}) = 0$ ou en tout cas très proche de zéro. Dans ce cas le point $x_{n+2}$ est envoyé très loin.

### 32.6.2 «Justification» par points fixes

Nous savons que pour résoudre $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe, il y a de nombreux choix possibles de fonctions $g$ telles que $g(x) = x$ donne la même solution que $f(x) = 0$. Soit $\alpha$ une solution de $f(x) = 0$ et cherchons une fonction $g$ de la forme

$$g(x) = x - kf(x). \tag{32.97}$$

Nous savons par la proposition 32.47 que la fonction $g$ donne une convergence quadratique lorsque $g'(\alpha)=0$. Pour la forme (32.97) nous avons $g'(\alpha)=1-kf'(\alpha)$, ce qui nous donne l'idée de poser $k=\frac{1}{f'(\alpha)}$.

Le fait est que $f'(\alpha)$ n'est pas connu, mais nous pouvons l'approximer par $f'(x)$ lorsque $x$ est proche de $\alpha$. D'où l'idée de considérer la fonction

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{32.98}$$

et donc la suite $x_{n+1}=g(x_n)$ c'est à dire

$$x_{n+1}=x-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{32.99}$$

Dès que $x_n$ est proche de $\alpha$, sous l'hypothèse (raisonnable par continuité) que $f'(x_n)$ soit proche de $f'(\alpha)$, la méthode devrait donner une convergence quadratique.

**Remarque 32.51.**
Cette justification par points fixes n'est pas vraiment différente de celle par Taylor parce que Taylor est utilisé dans la preuve de la proposition 32.47.

**Définition 32.52** (Méthode de Newton)**.**
*La **méthode de Newton** pour la fonction $f$ est la suite définie par récurrence*

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{32.100}$$

*Cette définition ne précise pas la valeur de $x_0$, ni de condition d'arrêt.*

### 32.6.3 Convergence de la méthode de Newton

**Théorème 32.53** (Convergence quadratique de la méthode de Newton[331])**.**
*Soit $f$ une fonction continue vérifiant $f(\alpha)=0$ et $f'(\alpha)\neq 0$. Nous considérons la fonction*

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{g'(x)} \tag{32.101}$$

*que nous supposons être de classe $C^2$.*

*Si $C$ est une majoration de $\|g''\|$ sur un intervalle contenant $\alpha$, alors en posant $\delta=1/C$ nous avons*

1. *La boule $B(\alpha,\delta)$ est préservée par $g$ : $g\big(B(\alpha,\delta)\big)\subset B(\alpha,\delta)$.*
2. *Pour tout $x_0\in B(\alpha,\delta)$ nous avons convergence quadratique vers $\alpha$ de la suite définie par $x_{n+1}=g(x_n)$.*
3. *Nous avons l'estimation*
$$|x_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{C}\big(C|x_0-\alpha|\big)^{2^n} \tag{32.102}$$
*où $C$ est la constante de la définition de convergence quadratique.*

*Démonstration.* Nous commençons par calculer la dérivée de $g$ :

$$g'(x)=-\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}, \tag{32.103}$$

d'où nous déduisons que $g'(\alpha)=0$. Ensuite nous utilisons abondamment la formule des accroissements finis (théorème 12.241) en commençant par

$$|g(t)-g(\alpha)|\leqslant\|g'\|_{[t,\alpha]}|t-\alpha| \tag{32.104}$$

où par $\|f\|_A$ nous entendons la norme uniforme de $f$ sur $A$, c'est à dire $\|f\|_A = \sup_{x\in A}\|f(x)\|$. Note : nous écrivons $[t,\alpha]$, mais ça pourrait être $[\alpha,t]$.

Si $x \in [t,\alpha]$ alors

$$\begin{aligned} |g'(x)| &= |g'(x) - g'(\alpha)| && (32.105a)\\ &\leqslant \|g''\|_{[x,\alpha]}|x-\alpha| && (32.105b)\\ &\leqslant \|g''\|_{[x,\alpha]}|t-\alpha| && (32.105c)\\ &\leqslant \|g''\|_{[t,\alpha]}|t-\alpha|. && (32.105d) \end{aligned}$$

En particulier, $\|g'\|_{[t,\alpha]} \leqslant \|g''\|_{[t,\alpha]}|t-\alpha|$, et nous pouvons continuer les majorations (32.104) :

$$|g(t) - g(\alpha)| \leqslant \|g''\|_{[t,\alpha]}|t-\alpha|^2. \tag{32.106}$$

La fonction $g$ étant de classe $C^2$, la dérivée seconde $g''$ est bornée (nous supposons déjà travailler sur un compact contenant $\alpha$). Soit $C$ une borne. Nous sommes en mesure de prouver le point (1) avec $\delta = 1/C$. En effet si $t \in B(\alpha, 1/C)$ alors

$$|g(t) - \alpha| = |g(t) - g(\alpha)| \leqslant C|t-\alpha|^2 \leqslant C\frac{1}{C^2} = \frac{1}{C}, \tag{32.107}$$

ce qui prouve que $g(t) \in B(\alpha, 1/C)$.

Le point (2) se prouve de la même manière : si $x_n \in B(\alpha, 1/C)$ alors

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leqslant C|x_n - \alpha|^2, \tag{32.108}$$

ce qui est bien la convergence quadratique.

La majoration du point (3) s'obtient par récurrence sur $n$. Pour $n = 0$, la relation (32.102) devient $|x_0 - \alpha| \leqslant |x_0 - \alpha|$ qui est vraie. Ensuite par la convergence quadratique et la récurrence,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2 \leqslant C\big[\frac{1}{C}(C|x_0 - \alpha|)^{2^n}\big]^2 = \frac{1}{C}\big[M|x_0 - \alpha|\big]^{2^{n+1}}. \tag{32.109}$$

□

**32.54.**
Dans le cas pratiques, nous commençons souvent par résoudre l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie. Au moment où nous sommes assez proche de la solution nous commençons Newton.

La raison est que la dichotomie fonctionne toujours : nous allons toujours nous approcher de la solution. Si par contre le point de départ est mal choisit, la méthode de Newton peut envoyer n'importe où, y compris très loin de la solution.

La proposition suivante nous indique que dans le cas d'une fonction convexe, le choix de point de départ de la méthode de Newton n'est pas tellement crucial parce que il sont tous bons. De plus la convergence se faisant de façon décroissante (si on part de la droite), nous savons que le résultat sera une approximation par excès de $\alpha$.

**Proposition 32.55** (Newton dans le cas convexe)**.**
*Soit $f$ de classe $C^2$ et une racine $\alpha$ telle que $f'(\alpha) > 0$. Soit $b > \alpha$ tel que $f$ soit convexe sur $[\alpha, b]$.*

*Alors pour tout $x_0 \in [\alpha, b]$ la suite de la méthode de Newton est*

*(1) décroissante*

*(2) reste dans $[\alpha, b]$*

*(3) converge vers $\alpha$.*

*Démonstration.* Nous savons par la proposition 18.79(2) que la fonction $f'$ est croissante, et par hypothèse $f'(\alpha) > 0$, donc sur $[\alpha, b]$ nous avons $f' > 0$. Par conséquent, nous avons aussi $f > 0$ sur $[\alpha, b]$.

Le graphe de $f$ est au dessus de la tangente de $f$ en $x = x_n$ (proposition 18.84). Si nous nommons $t_x$ la fonction qui donne la tangente en $x$ nous avons $t_{x_n}(\alpha) < 0$ parce que $f(\alpha) = 0$. Par conséquent

$$t_{x_n}(x) = 0 \tag{32.110}$$

pour $\alpha < x < x_n$. Cela prouve que $x_{n+1} \in [\alpha, b]$, et que $(x_n)$ est une suite décroissante

Étant donné que $(x_n)$ est une suite décroissante dans le compact $[\alpha, b]$, elle est convergente. Notons $\beta$ sa limite. Nous avons la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{32.111}$$

En passant à la limite $n \to \infty$ nous avons l'équation

$$\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}. \tag{32.112}$$

Vu que $f(x) > 0$ sur $]\alpha, b]$ nous avons automatiquement $\beta = \alpha$. □

### 32.6.4 Formalisation de l'algorithme

La méthode de Newton consiste a exprimer la solution $x$ de $f(x) = 0$ avec $f \in C^1(\mathbb{R})$ comme limite d'une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{32.113}$$

où $x_0$ est arbitraire.

Si on veut exprimer cela en terme d'algorithme, nous disons que l'algorithme de Newton est donné par la suite de problèmes

$$F_n(x_{n+1}, x_n, f) = x_{n+1} - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{32.114}$$

La donnée du problème est la fonction $f$, et rien que elle.

Plus précisément, une fois que la fonction $f$ est donnée, il existe une infinité de problèmes : pour chaque $a \in \mathbb{R}$ nous avons le problème

$$G_a(x_n, f) = x - a + \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{32.115}$$

La méthode de Newton consiste à sélectionner une partie de ces problèmes de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_0 = G_{x_0} & \text{(32.116a)} \\ F_n = G_{x_n}. & \text{(32.116b)} \end{cases}$$

Le problème $F_0$ fournit un nombre $x_1$ qui nous permet de sélectionner le problème $G_{x_1}$ qui va fournir le nombre $x_2$, etc.

Au moment de calculer le conditionnement de $F_n$, nous ne devons pas voir $x_{n-1}$ comme fonction de $x_0$ et de la donnée $f$. Il ne faut donc pas dériver à travers les $x_n$.

**Proposition 32.56.**
*Si une racine est multiple, alors l'ordre de convergence de la méthode de Newton est* 1.

Voici un algorithme possible :

```
1 def Newton(f,x0,toll,maxit):
2     fp=f.derivative()
3     n=0
```

```
    x=x0
    diff=toll+1
    while abs(diff)>toll and n<maxit:
        n=n+1
        diff=-f(x)/fp(x)
        x=x+diff
    return x,n
```

tex/frido/codeSnip_2.py

Commentaires :

(1) Notons que dans un langage vraiment numérique comme Matlab, il faut passer $f'$ en argument.

(2) Dans le `while` il faudrait mettre $x_{n+1} - x_n$ (en valeur absolue), mais cette différence est aussi utilisée pour calculer $x_{n+1}$ donc on la calcule une seule fois.

(3) Il faudrait faire une vérification sur $f(x_n) \neq 0$. Il n'y a pas tellement de choix que de changer le point initial.

### 32.6.5 Caractéristiques

L'algorithme de Newton a les caractéristiques suivantes :

(1) Pour résoudre le problème numéro $n$, il faut avoir résolu le problème numéro $n-1$.

(2) Aucune des solutions $x_n$ aux problèmes intermédiaires n'est une solution au problème de départ (à moins d'un coup de chance).

(3) Étant donné que la donnée du problème $F_n$ est la fonction $f$ de départ, nous avons $d_m = d_n = d$ pour tout $m$ et $n$.

**Théorème 32.57.**
*Soit $f$ continue sur un voisinage de $\alpha$, racine simple. Alors il existe un voisinage de $\alpha$ de rayon $\sigma$ tel que pour tout $x_0$ dans ce voisinage, la méthode converge vers $\alpha$ avec ordre de convergence $p = 2$.*

Donc dès qu'on a continuité autour de la solution recherchée, il suffit de prendre $x_0$ assez proche pour que tout se passe bien. Cela se fait par localisation des racines, par exemples en traçant la fonction avec un bon niveau de zoom. Le fait est qu'on cherche disons 3 décimales à la main (travail sur ordinateur et graphique) et Newton donne les 20 décimales suivantes à la vitesse de la lumière.

### 32.6.6 Exemple de la racine carré

Nous allons nous lancer dans un exemple : le cas de la racine carré. Soit à calculer une approximation numérique de $\sqrt{2}$. Il s'agit d'une racine de la fonction $f(x) = x^2 + 2$. La fonction de la méthode de Newton associée est :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2 - 2}{2x}. \tag{32.117}$$

Cherchons un intervalle autour de $\sqrt{2}$ sur lequel nous avons convergence de la méthode de Newton. Cela s'obtient grace à la proposition 32.47 qui nous informe qu'il suffit de trouver un intervalle autour de $\sqrt{2}$ sur lequel $|g'(x)| \leqslant 1$.

Nous avons

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}, \tag{32.118}$$

et nous cherchons à résoudre $|g'(x)| \leqslant 1$. D'abord $g'(x) = 1$ n'a aucune solutions alors que $g'(\sqrt{2}) = 0$. Donc nous avons $g'(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Par contre l'équation $g'(x) = -1$ a des solutions : $x = \pm\sqrt{2/3}$.

Nous avons donc convergence de la méthode de Newton pour $x_0$ dans un intervalle de la forme

$$[\sqrt{2/3}, \sqrt{2} + \ldots] \tag{32.119}$$

où les les trois points représentent l'expression qu'il faut pour que ce soit symétrique autour de $\sqrt{2}$. La valeur précise n'a pas tellement d'importance parce, vu que nous sommes en train de chercher $\sqrt{2}$, il est peu probable que nous ayons déjà en main une bonne approximation de nombres du type $\sqrt{2/3}$.

**Proposition 32.58.**
*La méthode de Newton pour la fonction $f(x) = x^2 - 2$ converge vers $\sqrt{2}$ pour toute valeur de départ dans $]0, +\infty[$.*

*Démonstration.* La fonction $f(x) = x^2 - 2$ est convexe et $f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} > 0$. Donc la méthode converge vers $\sqrt{2}$ pour tout $x_0 \geqslant \sqrt{2}$ par la proposition 32.55.

Si par contre $x_0 \in ]0, \sqrt{2}[$ nous avons

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0}. \tag{32.120}$$

En posant $h(x) = (x^2 + 2)/2x$ et en résolvant $h'(x) = 0$ nous trouvons $x = \sqrt{2}$. Et là, $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Donc $h(x)$ est toujours plus grand que $\sqrt{2}$ pour tout $x \in ]0, \sqrt{2}[$.

En d'autres termes, si $x_0 \in ]0, \sqrt{2}[$ alors $x_1 \geqslant \sqrt{2}$ et nous retombons dans le premier cas. □

### 32.6.7 Si multiplicité

Supposons que $\alpha$ soit de multiplicité $r$ (définition 32.49).

Cela se remarque en voyant que la méthode de Newton demande plutôt 20 itérations que 5. Le problème que cela pose est que chaque itération, les évaluations provoquent des erreurs. Donc moins d'itérations, c'est mieux.

Nous pouvons modifier la formule avec

$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{32.121}$$

Il est possible de prouver que cette suite est à nouveau à convergence quadratique.

Ou alors on pose $F(x) = f^{(r-1)}(x)$ et $\alpha$ est une racine simple pour $F$. Donc faire Newton pour $F$ est à nouveau quadratique, tout en donnant la même solution parce que $F(\alpha) = 0$ et $F'(\alpha) \neq 0$.

La seconde façon est bien parce que le théorème de localisation fonctionne 32.57

Et si $r$ n'est pas connu ?

Il est toujours possible de faire $r = 2$ puis $r = 3$ et caetera jusqu'au moment où l'on remarque que le nombre d'itérations baisse un grand coup.

Mais ça demande beaucoup de calculs. Le mieux est de changer de méthode.

### 32.6.8 Et la dérivée ?

Un des problèmes de la méthode de Newton est que l'on doit pouvoir calculer la dérivée. Typiquement, il faut savoir $f$ de façon analytique. Si cela n'est pas possible, nous pouvons changer de méthode et utiliser la méthode des sécantes décrite en 32.9.

### 32.6.9 Méthode de Newton : le cas général

**Lemme 32.59.**
*Soient $A$ et $B$ deux matrices inversibles telles que la matrice $(A + \epsilon B)$ soit inversible pour tout $\epsilon$ assez petit. Alors il existe une matrice $X(\epsilon)$ telle que*

$$(A + \epsilon B)^{-1} = (A^{-1} + \epsilon X) \tag{32.122}$$

*et telle que $\lim_{\epsilon \to 0} X(\epsilon) = -A^{-1}BA^{-1}$.*

*Démonstration.* Le candidat matrice $X$ est relativement simple à trouver en écrivant

$$(A+\epsilon B)(A^{-1}+\epsilon X)=\mathbb{1}+\epsilon AX+\epsilon BA^{-1}+\epsilon^2 BX. \tag{32.123}$$

En imposant que cela soit $\mathbb{1}$, nous trouvons

$$X(\epsilon)=-(A+\epsilon B)^{-1}BA^{-1}. \tag{32.124}$$

La matrice $X(\epsilon)$ étant un inverse à droite de $(A+\epsilon B)$, son déterminant est non nul et $X$ est inversible. Par conséquent elle est également inversible au sens usuel. Le calcul de la limite est direct :

$$\lim_{\epsilon\to 0}-(A+\epsilon B)^{-1}BA^{-1}=A^{-1}BA^{-1} \tag{32.125}$$

parce que l'inverse est une fonction continue sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. □

**Remarque 32.60.**
Un calcul naïf nous permet de trouver le même résultat de façon plus heuristique. En effet un développement usuel (dans $\mathbb{R}$) est

$$\frac{1}{a+\epsilon b}=\frac{1}{a}-\frac{\epsilon b}{a^2}+\dots \tag{32.126}$$

Si nous récrivons cela avec des matrices, nous écrivons (attention : passage heuristique !) :

$$(A+\epsilon B)^{-1}=A^{-1}-\epsilon A^{-1}BA^{-1}+\dots \tag{32.127}$$

Notons le choix de généraliser $b/a^2$ par $a^{-1}ba^{-1}$. Dans les réels les deux écritures sont équivalentes, mais pas dans les matrices.

Étudions si $A^{-1}-\epsilon A^{-1}BA^{-1}$ est bien un inverse à $\epsilon^2$ près de $(A+\epsilon B)$ :

$$(A+\epsilon B)(A^{-1}+\epsilon A^{-1}BA^{-1})=1-\epsilon BA^{-1}+\epsilon BA^{-1}-\epsilon^2 BA^{-1}BA^{-1}=1-\epsilon^2 BA^{-1}BA^{-1}. \tag{32.128}$$

Par conséquent, à des termes en $\epsilon^2$ près la matrice $A^{-1}-\epsilon A^{-1}BA^{-1}$ est bien un inverse de $A+\epsilon B$.

**Théorème 32.61** (Méthode de Newton[332])**.**
*Soit $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une application de classe $C^2$ et un point $a\in\mathbb{R}^n$ tel que $f(a)=0$. Nous supposons que $df_a$ est inversible.*

*Alors il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que pour tout $x_0\in V$ la suite définie par récurrence*

$$x_{n+1}=x_n-(df_a)^{-1}\big(f(x_n)\big) \tag{32.129}$$

*converge vers $a$. De plus la vitesse est quadratique au sens où il existe $C>1$ tel que*

$$\|x_n-a\|\leqslant C^{-1-2^n}. \tag{32.130}$$

*Démonstration.* Étant donné que $df_a$ est inversible et que $df$ est continue, l'application $df_x$ est continue[9] pour tout $x$ dans un voisinage de $a$. Nous prenons $r>0$ tel que $df_x$ est inversible pour tout $x\in B(a,r)$.

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}F\colon B(a,r)&\to\mathbb{R}^n\\ x&\mapsto x-(df_x)^{-1}\big(f(x)\big).\end{aligned} \tag{32.131}$$

Cela est une application $C^1$. La clef est de montrer que l'application de $F$ à un point $a+h$ rapproche de $a$ pourvu que $h$ soit assez petit. Nous avons la formule suivante :

$$F(a+h)-F(a)=h-\big(df_{a+h}\big)^{-1}\big(f(a+h)\big). \tag{32.132}$$

9. Nous pouvons voir $df$ comme l'application qui à $x$ fait correspondre la matrice $df_x\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Cette application étant continue et la non inversibilité d'une matrice étant donnée par l'annulation du déterminant, les matrices inversibles forment un ouvert dans l'ensemble des matrices.

Nous allons maintenant utiliser un développement de Taylor par rapport à $h$ en suivant la formule (12.701). Nous avons

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|^2\xi(h) \tag{32.133}$$

où $\xi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction qui tend vers une constante lorsque $h \to 0$. Nous avons aussi

$$df_{a+h} = df_a + \|h\|\tau(h) \tag{32.134}$$

où $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est une application qui tend vers une constante lorsque $h \to 0$. En ce qui concerne l'inverse nous utilisons le lemme[10] 32.59 :

$$\big(df_a + \|h\|\tau(h)\big)^{-1} = (df_a)^{-1} + \|h\|A(h) \tag{32.135}$$

où $A$ est une autre matrice fonction de $h$ qui tend vers une constante lorsque $h$ tend vers zéro. En substituant le tout dans (32.132) nous trouvons

$$F(a+h) - F(a) = \|h\|^2(df_a)^{-1}\xi(h) + \|h\|\big(A(h)\circ df_a\big)(h) + \|h\|^3A(h)\xi(h). \tag{32.136}$$

En ce qui concerne la norme nous utilisons le fait que si $T$ est un opérateur, $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$. Nous trouvons

$$\|F(a+h) - F(a)\| \leqslant \|h\|^2\|(df_a)^{-1}\|\|\xi(h)\| + \|h\|^2\|A(h)\circ df_a\| + \|h\|^3\|A(h)\|\|\xi(h)\| \tag{32.137a}$$
$$= \|h\|^2\alpha(h) \tag{32.137b}$$

pour une certaine fonction $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui tend vers une constante lorsque $h \to 0$.

En posant $C = \lim_{h\to 0}\alpha(h)$ nous avons la majoration

$$\|F(x) - a\| \leqslant C\|x-a\|^2. \tag{32.138}$$

Nous pouvons également supposer que $C > 1$. Afin de prouver la vitesse de convergence (32.130), nous allons encore redéfinir $r$ en demandant $r < 1/C^2$. De cette manière nous avons

$$\|x_0 - a\| \leqslant \frac{1}{C^2} \tag{32.139}$$

et la récurrence sur $n$ est :

$$\|x_{n+1} - a\| = \|F(x_n) - a\| \leqslant C\|x_n - a\|^2 \leqslant C\big(C^{-1-2^n}\big)^2 = C^{-1-2^{n+1}}. \tag{32.140}$$

Note : ce dernier calcul est le lemme 32.44 appliqué à $r = (1/C^2)$. □

**Remarque 32.62.**
La valeur de la constante $C$ a été fixée par l'équation (32.138). Certes nous pouvons toujours choisir $C$ plus grand affin d'augmenter la vitesse de convergence, mais le point de départ $x_0$ devant être dans une boule de taille $1/C^2$ autour de $a$, demander $C$ plus grand revient à demander un point de départ plus précis.

## 32.7 Estimation de l'ordre de convergence

**Définition 32.63** ([333])**.**
*Nous disons que la suite $(x_n)$ de limite $x$ est* ***convergente d'ordre*** *$q$ pour $q > 1$ s'il existe $\mu > 0$ tel que*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^q} = \mu. \tag{32.141}$$

*En particulier :*

10. Pour l'inversibilité de $\|h\|\tau(h)$, notons que $df_a$ est inversible et que par hypothèse la somme $df_a + \|h\|\tau(h)$ est inversible.

— *la convergence d'ordre 2 est dite quadratique,*
— *la convergence d'ordre 3 est dite cubique,*
— *la convergence d'ordre 4 est dite quartique.*

Comment estimer numériquement l'ordre $p$ de convergence de la méthode ? Soit une suite $(x_n)$ convergente vers $\alpha$. Considérons les 4 termes $x_{n-3}$, $x_{n-2}$, $x_{n-1}$, $x_n$. Alors nous pouvons écrire l'approximation

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \simeq \left(\frac{|x_{n-1} - x_{n-2}|}{|x_{n-1} - x_{n-3}|}\right)^p. \tag{32.142}$$

Cette approximation ne serait pas trop mauvaise tant que $n$ est assez grand pour que la convergence soit bien engagée. Passons au logarithme :

$$\ln \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \simeq p \ln \left(\frac{|x_{n-1} - x_{n-2}|}{|x_{n-1} - x_{n-3}|}\right). \tag{32.143}$$

et donc

$$p \simeq \frac{\ln\left(\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|}\right)}{\ln\left(\frac{|x_{n-1} - x_{n-2}|}{|x_{n-1} - x_{n-3}|}\right)}. \tag{32.144}$$

Avec cette approximation, en réalité nous calculons une suite $(p_i)$ qui sont les approximation de $p$ à partir des termes $i$ à $i+3$ de la suite $(x_n)$. Il s'agit d'une suite d'estimations de $p$.

(1) Dans le cas de la bisection, nous obtenons toujours $p_i = 1$.

(2) Dans le cas de la méthode de Newton (32.6) nous avons $p = 2$. Mais les premières valeurs de $p_i$ peuvent être aussi bien 0 que 7. Après quelque itérations pourtant les $p_i$ se regroupent autour de 2.

En tout cas, le plus important est de savoir si $p > 1$ ou non. Rappel : nous voulons la superlinéarité parce que nous voulons utiliser le test d'arrêt de la différence entre deux termes, voir 32.46.

## 32.8 Autres méthodes

### 32.8.1 Méthode de Schröder

La formule est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \tag{32.145}$$

Cette méthode est d'ordre 2 pour toute racine et toute valeur de multiplicité. Le problème de cette méthode est qu'elle demande 3 évaluations de $f$. Son efficacité :

$$E = \sqrt[3]{2} \simeq 1.25 \tag{32.146}$$

Cela est donc moins efficace que Newton.

### 32.8.2 Halley

Il a $p = 3$ lorsque $\alpha$ est racine simple. Mais encore $p = 1$ pour les racines multiples. Plus efficace que Newton pour les racines simples, mais même problème pour les racines multiples.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \tag{32.147}$$

## 32.9 Méthode des sécantes variables

Supposons de ne pas avoir $f$ analytique, mais seulement la possibilité de calculer $f(x)$ pour tout $x$. Newton ne fonctionne pas, mais la bisection fonctionne.

Nous pouvons approximer

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \tag{32.148}$$

En substituant dans la formule de Newton, nous obtenons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{32.149}$$

Il s'agit de prendre la droite qui passe par $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et par $(x_n, f(x_n))$ et de prendre l'intersection de cette droite avec l'axe $y = 0$. Cela donne le $x_{n+1}$.

Pour cette méthode, il ne faut pas seulement $x_0$ mais également $x_1$.

L'ordre de convergence est le nombre d'or

$$p = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618. \tag{32.150}$$

Cela est donc superlinéaire.

La nombre d'évaluations est $s = 1$ (il y a deux apparitions de $f$ dans la formule, mais l'une des deux est récupérée dans l'itération suivante). Donc l'efficacité est

$$E = p. \tag{32.151}$$

Donc bien efficace.

**Proposition 32.64.**
*Si $\alpha$ est racine simple, il existe un voisinage de $\alpha$ tel que pour tout choix de $x_0$, $x_1$ dans ce voisinage, la méthode converge.*

Psychologiquement, on est tenté de prendre $x_0$ et $x_1$ de part et d'autre de $\alpha$ (pensant à la bisection), mais en réalité ce n'est pas obligatoire du tout et n'a aucune influence. Il faut seulement les prendre très proches de $\alpha$.

**Remarque 32.65.**
La méthode de la sécante est souvent écrite sous la forme

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{32.152}$$

C'est évidemment algébriquement équivalent.

Les formules (32.150) et (32.152) ont toutes deux des erreurs de cancellation. Laquelle est la plus grave ?

Dans la première, si la fraction est mal calculée, elle ne fait que modifier $x_n$. C'est à dire qu'on peut espérer qu'à la prochaine itération, ça aille mieux. En tout cas, dans ce cas si la fraction est mal calculée, ça ne détruit pas tout.

Dans la seconde, c'est la valeur elle-même qui risque d'être mal calculée. Et si la fraction est mal calculée, alors on casse complètement l'éventuel bonne approximation que nous avions déjà.

### 32.9.1 Aitken

La méthode du $\Delta^2$ de Aitken est une méthode d'accélération de la convergence.

Soit $(x_n)$ une suite qui converge. Nous voudrions une nouvelle suite $(y_n)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - \alpha}{x_n - \alpha} \tag{32.153}$$

C'est la définition d'une convergence accélérée.

La façon de faire est :

$$y_n = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+2} - 2x_{x+1} + x_n}. \tag{32.154}$$

La première expressions a deux cancellations (la seconde une seule) et de plus la première est $y_n$ elle-même alors que la seconde est une correction.

Donc la seconde expression est numériquement meilleure.

L'opérateur $\Delta$ appliqué à une suite est :

$$(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n \tag{32.155}$$

Donc

$$(\Delta^2 x)_n = (\Delta x)_{n+1} - (\Delta x)_n = x_{n+2} - x_{n+1} - x_{n+1} + x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \tag{32.156}$$

L'accélération a alors la formule

$$y_n = \frac{(\Delta x)_n^2}{(\Delta^2 x)_n}. \tag{32.157}$$

Le problème est que ça accélère tellement que l'on arrive vite à des erreurs de cancellations, et donc à une précision en pics oscillants.

## 32.10 Équations algébrique

C'est une équation du type $P(x) = 0$ où $P$ est un polynôme. Soit un polynôme de degré $n$. Nous en savons des choses.

(1) L'équation a exactement $n$ solutions dans $\mathbb{C}$ en comptant les multiplicités.

(2) Les racines complexes arrivent par paire complexes conjuguée. Elles sont donc toujours en nombre pair.

Si donc nous avons $n = 3$, nous ne pouvons pas avoir 2 racine réelles. Il y en a donc 1 ou 3 réelles. Pas zéro ni deux.

Quelque méthodes : Müller, matrice compagnon, Laguerre.

### 32.10.1 Résoudre un système linéaire

Pour résoudre un système linéaire d'équations, nous échelonnons la matrice du système. Soit à résoudre le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{32.158}$$

En termes de problèmes, on écrit $F\big(x, (A, b)\big) = Ax - b$. La donnée de ce problème est le couple $(A, b)$.

En ce qui concerne l'algorithme, on pose comme premier problème

$$F_1\big(x_1, (A_1, b_1)\big) = A_1 x_1 - b_1 = 0 \tag{32.159}$$

avec $A_1 = A$ et $b_1 = b$.

Ensuite, on commence à échelonner et le second problème est

$$F_2\big(x_2, (A_2, b_2)\big) = A_2 x_2 - b_2 = 0 \tag{32.160}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}. \tag{32.161}$$

Le troisième problème sera

$$F_3\big(x_3, (A_3, b_3)\big) = A_3 x_3 - b_3 = 0 \tag{32.162}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{32.163}$$

Ce problème est facile à résoudre «à la main». Nous nous arrêtons donc ici avec l'algorithme, et nous trouvons le $x_3$ qui résous le problème $F_3$.

### 32.10.2 Caractéristiques

L'algorithme de résolution de systèmes linéaires d'équations a les propriétés suivantes, à mettre en contraste avec celles de Newton :

(1) Pour résoudre le problème numéro $n$, il n'a pas fallu résoudre le problème numéro $n-1$.

(2) Toutes les solutions $x_n$ des problèmes intermédiaires sont solutions du problème de départ. Nous avons $F_n(x, d_n) = 0$ pour tout $n$ (ici, $d_n = (A_n, b_n)$).

(3) D'un problème à l'autre, les données changent énormément : la matrice échelonnée peut être très différente de la matrice de départ.

### 32.10.3 Définitions

Nous allons maintenant formaliser en donnant quelques définitions pour nommer les propriétés que nous avons vues. D'abord, un algorithme est une suite de problèmes. Un **algorithme** pour résoudre un problème $F(x, d) = 0$ est une suite de problèmes $\{F_n(x_n, d_n) = 0\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Définition 32.66.**
*Un tel algorithme est dit **fortement consistant** si pour toutes données admissibles $d_n$, on a*

$$F_n(x, d_n) = 0 \quad \forall\, n, \tag{32.164}$$

*où $x$ est la solution de $F(x, d) = 0$.*

L'algorithme des matrices est fortement consistant, mais pas l'algorithme de Newton.

**Définition 32.67.**
*Un algorithme est **consistant** si $\lim_{n\to\infty} F_n(x, d_n) = 0$.*

Dans le cas de l'algorithme de Newton, c'est plutôt une telle consistance qu'on attend.

L'algorithme est dit **stable** si pour tout $n$ le problème correspondant est stable. Dans ce cas, on note $K^{\text{num}}$ le **conditionnement relatif asymptotique** défini par

$$K^{\text{num}} = \limsup_n K_n \tag{32.165}$$

où $K_n$ est le conditionnement relatif du problème $F_n(x_n, d_n) = 0$.

**Définition 32.68.**
*Un algorithme est dit **convergeant** (en $d$) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N = N(\epsilon)$ et $\delta = \delta(N, \epsilon)$ tels que pour $n \geqslant 0$ et $|d - d_n| < \delta$, on ait $|x(d) - x_n(d_n)| < \epsilon$.*

**Remarque 32.69.**
Dans le cas de l'algorithme de Newton, nous avons vu que la donnée $d_n$ du problème $F_n$ était en fait la même que la donnée initiale $d$, donc nous avons $d_n = d$, et par conséquent nous avons toujours $|d - d_n| < \delta$. Dans ce cas, la définition de la convergence revient à demander que la suite numérique des $x_n$ converge vers la solution $x$.

**Remarque 32.70.**
Dans le cas des matrices par contre, les données sont très différentes les unes des autres, nous avons donc en général que $|d - d_n| > \delta$. Mais en revanche nous savons que tous les problèmes intermédiaires $F_n$ acceptent une solution unique [11] $x_n(d_n) = x(d)$. Par conséquent, $|x_n(d_n) - x(d)|$ est toujours plus petit que $\epsilon$. L'algorithme des matrice est donc toujours un algorithme convergeant.

## 32.11 Équations non linéaire

Certains équations non linéaires sont résoluble explicitement, par exemples les polynômes de degré jusqu'à 4 ou des choses comme

$$\sin^2(x) + 3\sin(x) + 5 = 0. \tag{32.166}$$

Mais ces exemples sont très rares.

Nous allons étudier des équations du type $f(x) = 0$, dans $\mathbb{R}$.

(1) Un problème écrit sous la forme $x = g(x)$ peut utiliser des théorèmes de points fixes.
(2) Un problème sous la forme $f(x) = 0$ peut utiliser des méthodes de bisection, Newton ou autres.

Il y a évidemment beaucoup de façons de transformer un problème pour passer d'une forme à l'autre.

**Exemple 32.71**
Soit $f(x) = x^2 - a = 0$ avec $a > 0$. Nous pouvons l'écrire

$$x^2 + x - a = x \tag{32.167}$$

qui donne une forme $g(x) = x$ pour $g(x) = x^2 + x - a$.

Ou encore $x = \frac{a}{x}$ et donc $g(x) = a/x$ (si par ailleurs on sait que $x \neq 0$). Notons que $x \neq 0$ n'est pas une hypothèse très forte parce qu'on la vérifie directement sur $a$. △

**Exemple 32.72**
Soit l'équation à résoudre

$$f(x) = x^2 - 2 - \ln(x) = 0 \tag{32.168}$$

Les solutions de cette équations peuvent être vues comme les intersections avec l'axe $X$ du graphe $y = x^2 - 2 - \ln(x)$. Tracer peut donc aider. Par ailleurs, il faut noter que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty, \tag{32.169}$$

donc les solutions sont certainement contenues dans un compact de $\mathbb{R}$.

À part tracer nous pouvons écrire

$$x^2 - 2 = \ln(x). \tag{32.170}$$

Et là, ce sont deux fonctions dont nous pouvons tracer le graphe pour trouver graphiquement les points d'intersection. Une étude de fonction montre vite qu'il y a exactement deux solutions, qu'elles sont strictement positives. Pour trouver des bornes, il faut calculer par exemple pour $x = 2$ les valeurs de $\ln(x)$ et $x^2 - 2$ pour voir si le graphe de $x^2 - 2$ est déjà plus haut. △

La majorité des méthodes numériques de résolution d'équation du type $f(x) = 0$ ou $x = g(x)$ seront sous la forme de suites. Avec questions à la clefs :

11. Nous n'envisageons que le cas où le déterminant est non nul.

(1) Quel point de départ choisir ?

(2) Convergence ?

(3) Est-ce que la limite est bien une solution ?

(4) Vu que la limite est unique, comment faire si l'équation a plusieurs solutions ? (souvent c'est le choix du point initial qui va jouer sur ce point)

**32.73.**
Si la fonction est très plate, il est possible d'avoir

$$|f(\tilde{\alpha})| \leqslant \epsilon \tag{32.171}$$

sans que $\tilde{\alpha}$ ne soit une bonne approximation.

Lorsqu'on fait tourner une méthode itérative résolvant $f(x) = 0$, il n'est pas suffisant de s'arrêter lorsque

$$f(x_n) \leqslant \epsilon_1. \tag{32.172}$$

Il faut aussi s'assurer que, si $\bar{x}$ est la solution exacte, $|x_n - \bar{x}| \leqslant \epsilon_2$. Ici $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ sont deux «précisions» que nous nous fixons au départ.

Évidemment, vérifier la condition $|x_n - \bar{x}| \leqslant \epsilon_2$, il faudrait savoir $\bar{x}$. Et savoir $\bar{x}$ c'est justement le problème. Nous sommes donc amenés à faire des estimation de $|x_n - \bar{x}|$.

**32.74.**
Lorsque nous effectuons une méthode itérative, il faut donc contrôler deux grandeurs :

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant \epsilon_1 \tag{32.173a}$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \epsilon_2. \tag{32.173b}$$

**Proposition 32.75.**
*Soit $p$ l'ordre de convergence de la suite $(x_n)$ vers $\bar{x}$. Si $p > 1$ et $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \epsilon_2$ alors $|\bar{x} - x_n| \leqslant \epsilon_2$.*

### 32.11.1 Méthode de bisection

Il y a ce théorème des valeurs intermédiaires.

**Théorème 32.76.**
*Soit $f$ continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]a, b[$.*

Pour démarrer une bisection, il est toujours bon de prendre l'intervalle $[a, b]$ de façon à ne contenir qu'une seule solution.

Soit donc un premier intervalle $[a_0, b_O]$ tel que $f(a_0)f(b_0) < 0$ et ne contenant qu'une seule solution. À chaque itération nous considérons la moitié de l'intervalle précédent, mais la moitié contenant la solution.

Le test d'arrêt de la méthode de bisection se base uniquement sur la taille de l'intervalle qui reste. En effet si nous avons

$$|b_n - a_n| \leqslant \epsilon \tag{32.174}$$

nous avons certainement

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \tag{32.175}$$

où $x_n$ est le point du milieu de $[a_n, b_n]$.

**32.77.**
La fonction $f$ n'intervient dans la méthode que via son signe, pas via ses valeurs exactes.

**32.78.**
Notons que le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas très puissant pour choisir l'intervalle de départ ; penser à la fonction

$$f(x) = x^2 - 5 \tag{32.176}$$

sur l'intervalle $[-10, 10]$. Il y a bien deux solutions dans l'intervalle, mais elles sont invisibles du théorème des valeurs intermédiaires. La fonction $x \mapsto x^2$ a sa solution en $x = 0$, mais elle aussi n'est pas visible.

**32.79.**
Certes la méthodes de bisection assure la convergence vers une solution, mais elle n'assure pas la convergence monotone. Il peut arriver que $|\bar{x} - x_n| < |\bar{x} - x_{n+1}|$. C'est le cas lorsque la solution est très proche du milieu de l'intervalle choisit. Le $x_0$ est alors proche de $\bar{x}$ alors que $x_1$ sera à une distance de $\bar{x}$ d'environ un quart de l'intervalle de départ.

Supposons déjà avoir trouvé un intervalle $[a, b]$ dans lequel se trouve une unique solution à $f(x) = 0$. Voici un algorithme possible.

```
1  from __future__ import division
2
3  def bissection(f, a, b, toll, mmax):
4      """
5      f : une fonction
6      a,b : les limites de l'intervalle
7      toll : la tolérance. C'est l'amplitude de l'intervalle à ↩
           partir duquel nous nous arrêtons.
8      nmax : le nombre maximum d'itérations.
9
10     Nous supposons que \( b>a\).
11
12     Retourne un tuple (x,n) où 'x' est la solution approchée et 'n↩
           ' est le nombre d'itérations effectuées
13     """
14     n = -1
15     amp = toll + 1 # Pour s'assurer que l'on entre dans le cycle
16     while amp > toll and n < nmax :
17         n = n + 1
18         amp=abs(b - a)
19         x = a + amp / 2
20         if f(a) * f(x) < 0:
21             b = x
22         elif f(a)*f(x) > 0:
23             a = x
24         else :       # Problème ZERO
25             amp = 0
26     return (x, n)
```

tex/frido/codeSnip_1.py

Plusieurs remarques :

(1) Le fait de retourner le nombre d'itérations effectuées permet à l'utilisateur de savoir la précision et si le nombre maximum d'itérations est dépassé. Si ce `n` retourné est égal à `nmax`, l'utilisateur sait que le `x` retourné n'est pas fiable.

(2) La ligne `from __future__ import division` fait en sorte que l'opération `/` est bien la division usuelle. Sinon, le défaut en python 2 est que `/` soit la division *entière*, c'est à dire

que $1/2 = 0$ en python 2. En python 3, le symbole `/` désigne bien la division usuelle, mais Sage utilise Python 2.

(3) Même si l'intervalle $[a, b]$ contient plus d'une solution, la méthode fonctionne et donne une solution. Il est simplement éventuellement très compliqué de savoir laquelle.

(4) Nous faisons `amp=toll+1` parce que nous voulons absolument lancer le cycle au moins une fois. Sinon, le `x` à retourner ne serait pas définit au moment de sortir du cycle (si le cycle n'est pas exécuté).

(5) Calculer le point milieu d'un intervalle $[a, b]$ est par la formule $(a + b)/2$ sauf que cette opération est numériquement dangereuse parce qu'à cause de l'arithmétique en précision finie, il est possible que cela tombe *exactement* sur $a$ ou $b$. D'où le fait de calculer le point milieu par

$$x = a + \frac{amp}{2}. \tag{32.177}$$

(6) Dans le cas `Problème ZERO` nous déduisons $f(x) = 0$. Attention que c'est pas que $f(x) = 0$ mais simplement que en mettant $x$ dans $f$, la *machine* retourne son zéro.

Il peut cependant avoir une fonction telle que $f(1) = 10^{-50}$ et $f(2) = 0$. L'algorithme de bisection risque de s'arrêter si $x_n = 1$. Parce que la machine risque de calculer $f(x_n) = 0$.

Quoi qu'il en soit, nous y mettons `amp=0` pour être sûr de sortir de la boucle dès la prochaine vérification.

(7) Il y a moyen de sauver les valeurs de $f(a)$ et $f(x)$ pour ne pas les recalculer, et en particulier au moment de faire `b=x` nous pouvons poser `fa=fx`.

Si $\tau$ est la précision de la solution voulue, nous pouvons fixer a priori le nombre d'itérations à faire grâce à la formule

$$n \geqslant \left\lceil \log_2 \left( \frac{b-a}{\tau} \right) \right\rceil. \tag{32.178}$$

Il y a un "$\geqslant$" et non une égalité parce qu'en arithmétique numérique, le nombre obtenu à droite pourrait ne pas être le bon à 1 près.

Ici pour $\nu \in \mathbb{R}$ le nombre $\lceil \nu \rceil$ est le plus petit entier à être plus grand ou égal à $\nu$.

**32.80.**
Notons l'importance de la continuité de $f$. Par exemple que ferait la bisection sur la fonction $f(x) = 1/x$ pour l'intervalle $[-3, 1]$ ?

Il y a changement de signe sans avoir de racine.

Vu que $2^{10}$ est déjà 1024. Donc si on veut de la précision de l'ordre de 1/1000, dix itération suffisent. Si donc nous avons besoin de 200 itérations pour atteindre la précision voulue, c'est l'occasion de trouver un intervalle plus petit. Par exemple en traçant la fonction, en faisant un zoom et en trouvant des valeurs de $a$ et $b$ qui sont déjà proches.

**32.81.**
Dans le monde réel, il arrive souvent d'utiliser une méthode de bisection pour se donner un point de départ pour une autre méthode.

## 32.12 Efficacité

**Définition 32.82.**
*L'**efficacité** est le nombre*

$$E = \sqrt[s]{p} \tag{32.179}$$

*où $p$ est l'ordre de convergence de la méthode et $s$ est le nombre de fois qu'il faut calculer une valeur de la fonction à chaque itération (nous ne comptons pas l'initialisation).*

Que le nombre de d'évaluations de $f$ intervienne est logique parce que chaque évaluation provoque une erreur possible.

**Exemple 32.83**(Bisection)
Pour la méthode de bisection, nous avons $s = 1$ parce que chercher $x_{n+1}$, il faut seulement calculer $f(x_n)$. △

**Exemple 32.84**(Newton)
Pour l'algorithme de Newton nous avons $p = 2$ et il y a deux évaluations à chaque itérations (une fois $f$ et une fois $f'$), donc $s = 2$ et $E = \sqrt{2}$. △

## 32.13 Exercices

**Exercice 1**

Nous supposons une machine acceptant 5 chiffres significatifs. Elle retient les nombres sous la forme $\pm 0.x \cdots \times 10^{\cdots}$.

$x = 1.403$, $y = 0.4112 \times 10^{-3}$, $z = -0.4111 \times 10^{-3}$.

Soient $a = (x \oplus y) \oplus z$ et $b = (y \oplus z) \oplus x$.

(1) D'abord la calculer à la main.

(2) Quel est le calcul préférable ?

(3) Donner l'erreur relative avec 3 chiffres significatifs.

**Correction de l'exercice 1**

Dans le cas du calcul à la main, il faut en faire un seul parce que, algénriquement, $a = b$.

Nous avons $x = 1.403$, $y = 0.0004112$ et $z = -0.0004111$. Et la somme donne :

$$a = b = 1.4030001 = 0.14030001 \times 10^1. \tag{32.180}$$

Faisons d'abord la normalisation de $x$, c'est à dire $\text{fl}(x)$.

$$\text{fl}(x) = 0.1403 \times 10^1. \tag{32.181}$$

et $y$ est déjà normalisé :

$$\text{fl}(y) = 0.4112 \times 10^{-3}. \tag{32.182}$$

Il n'y a pas d'erreurs d'assignation pour ces deux nombres.

Pour faire la somme, il faudra déjà un peu casser les nombres pour les écrire de façon à pouvoir les sommer. En effet, il faut écrire les deux nombres avec le même exposant de 10 (le plus grand), pour pouvoir les mettre en colonne :

$$0.1404 \times 10^1 \to 0.1404 \times 10^1 \tag{32.183a}$$

$$0.4112 \times 10^{-3} \to 0.00004 \times 10^1. \tag{32.183b}$$

La somme donne $0.14034 \times 10^1$. Et ça, c'est à nouveau arrondi. Le premier chiffre supprimé est un 4, donc

$$x \oplus y = 0.1403 \times 10^1. \tag{32.184}$$

Et là on remarque que nous avons la même chose que $x$. C'est un classique du calcul numérique.

Nous avons aussi

$$\text{fl}(z) = 0.4111 \times 10^{-3}. \tag{32.185}$$

Et pour faire la somme de cela avec $x \oplus y$ nous devons le remettre sous la forme d'un $10^1$ :

$$\text{fl}(z) \to -0.00004 \times 10^1 \tag{32.186}$$

(erreur de conversion), et en sommant on trouve

$$(x \oplus y) \oplus z = 0.140216 \times 10^1, \tag{32.187}$$

qui est encore arrondi. Le premier chiffre supprimé est un 6, donc

$$\text{fl}(a) = 0.1403 \times 10^1, \tag{32.188}$$

Le nom de l'erreur qui consiste à avoir $x \oplus y = x$ est "relation annirmale".

Calculons $b$.

Les nombres $y$ et $z$ ont même ordre de grandeur, donc pas d'erreur au moment de les mettre sous forme sommable.

$$\text{fl}(x) + \text{fl}(y) = 0.00010 \times 10^{-3}. \tag{32.189a}$$

Cela est renormalisé et arrondi : $\text{fl}(x) \oplus \text{fl}(y) = 0.1000 \times 10^{-6}$.

Notons que nous avons ici commis potentiellement une erreur de cancellation parce que entre $y$ et $z$, il y a 3 chiffres sur 4 qui sont identiques. Seul le chiffre 1 est significatif en réalité.

Il faut maintenant ajouter $x$ à cela. D'abord

$$\text{fl}(x) = 0.1403 \times 10^1. \tag{32.190}$$

Pour cette somme, il faudra remettre notre $0.1000 \times 10^{-6}$ avec une puissance $10^1$. Et là, nous obtenons zéro parce que vraiment ce nombre est trop petit pour être écrit avec $10^1$. Résultat des courses :

$$\text{fl}(b) = 0.1403 \times 10^1. \tag{32.191}$$

Dans le premier calcul nous avons deux "relations anormales" et dans le second nous en avons une plus une cancellation.

Nous préférons avoir deux relations anormales, parce que l'erreur de cancellation est plus grave : elle consiste à une perte de chiffre significatifs. Le fait est que faisant la différence à l'ordinateur nous avons obtenu 0.1 qui est certes exact, mais qui est un coup de bol : la différence aurait aussi bien pu être 0.19 avec d'autres nombres, machinement égaux.

Note : avec les données ici, il n'y a en fait pas d'erreur de cancellation. Mais il y a une erreur potentielle de cancellation, potentiellement grave.

En ce qui concerne l'erreur relative. Dans la formule

$$\epsilon_r = \frac{|a - a^*|}{|a|}, \tag{32.192}$$

la différence ne peut pas être calculée à la calculatrice justement parce qu'elle est très potentiellement sujette à erreur de cancellation.

$$\epsilon_r = \frac{|0.1030001 \times 10^1 - 0.1403 \times 10^1|}{0.14030001 \times 10^1} = \frac{0.1 \times 10^{-6}}{0.14030001 \times 10^1} \simeq 0.712758 \times 10^{-7}. \tag{32.193}$$

En passant à 3 chiffres significatifs, $0.713 \times 10^{-7}$ (le premier chiffre supprimé est un 7).

**Exercice 2**

Soient $x = 0.1 \times 10^{21}$ et $y = 0.5 \times 10^20$ et les expressions

(1) $z_1 = \frac{x-y}{y} + \frac{x+y}{x}$

(2) $z_2 = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

Ces deux expressions sont algébriquement équivalentes.

(1) Calculer les valeurs.

(2) On suppose une machine en précision simple. Laquelle des deux expressions est préférable ?

**Correction de l'exercice 2**

Pour $z_1$, en arithmétique exacte :

$$z_1 = \frac{0.5 \times 10^{20}}{0.5 \times 10^{20}} + \frac{1.5 \times 10^{20}}{1 \times 10^{20}} = 0.25 \times 10^1. \tag{32.194}$$

Le calcul exact de $z_2$ donne la même chose.

**Calcul de $z_1$** Les deux valeurs sont mémorisables et la différence $x-y<++>$ se fait sans erreurs de cancellation. Idem pour la somme $x+y$. Idem pour les divisions.

**Calcul de $z_2$** Pour faire $x^2$, c'est pas possible parce que c'est de l'ordre de $10^{40}$ alors que nous sommes en précision simple. Idem pour le produit $xy$.

Morale : $z_2$ donne un `overflow` alors que $z_1$ fonctionne de façon exacte.

**Remarque 32.85.**
En réalité le $z_1$ n'est pas tout à fait calculable de façon exacte sur la machine parce qu'elle doit d'abord convertir en binaire, ce qui n'est pas toujours possible. Mais sur notre machine qui fonctionne en base 10, il n'y a pas de problèmes.

**Exercice 3**

Soit la fonction

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 - e^{-x}. \tag{32.195}$$

(1) Identifier la plus grande des solutions réelles de $f(x) = 0$.

(2) Effectuer une bisection pour la savoir.

(3) Sachant que

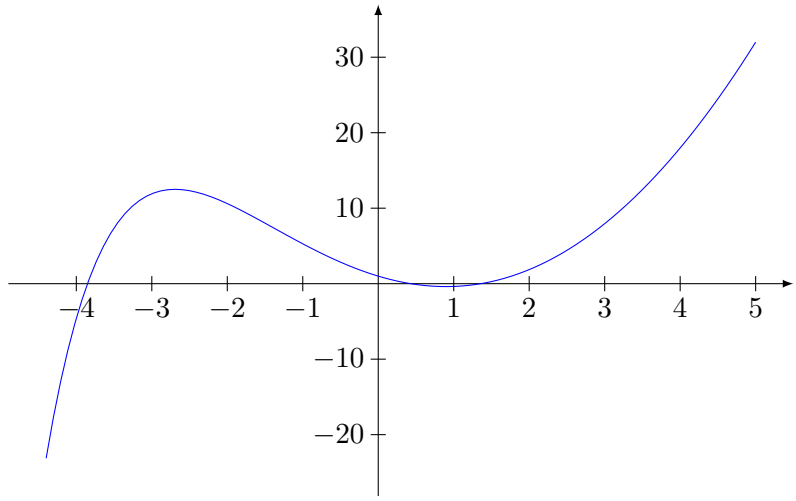
$$\alpha \simeq 1.358500220734946, \tag{32.196}$$

quelle est l'erreur relative ?

**Correction de l'exercice 3**

Note : si c'est pour chercher à la main des approximation pour démarrer, il est évidemment préférable de dessiner $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 2$ et $f_2(x) = -e^{-x}$ séparément.

Quoi qu'il en soit, voici un graphique :




Nous voyons trois racines : $\alpha_1 \in [0, 0.5, ]$, $\alpha_2 \in [1, 1.5]$ et $\alpha_0 \in [-4, -3.5]$.

La plus grande solution est $\alpha_2$. Nous pouvons déjà remplir le tableau des précisions :

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $g(x_n)$ | $\lvert b_n - a_n \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $<++>$ | $<++>$ | $<++>$ | $<++>$ | $<++>$ | 0.5 |
| $<++>$ | $<++>$ | $<++>$ | $<++>$ | $<++>$ | 0.25 |
| $<++>$ | $<++>$ | $<++>$ | $<++>$ | $<++>$ | 0.125 |

Et nous calculons les valeurs de $f$ aux points d'extrémité de l'intervalle. Note que seul le signe nous importe :

$$f(1) \simeq -0.368 \tag{32.197a}$$
$$f(1.5) \simeq 0.278. \tag{32.197b}$$

Voici donc le tableau avec le signe de $f$ indiqué :

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $g(x_n)$ | $\lvert b_n - a_n \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $1(+)$ | $1.5(-)$ | $< ++ >$ | $-0.162 \times 10^0$ | 0.5 |
| 1 | $< ++ >$ | $< ++ >$ | $< ++ >$ | $< ++ >$ | 0.25 |
| 2 | $< ++ >$ | $< ++ >$ | $< ++ >$ | $< ++ >$ | 0.125 |

Puis :

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $g(x_n)$ | $\lvert b_n - a_n \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $1(+)$ | $1.5(-)$ | $1.25(-)$ | $-0.162 \times 10^0$ | 0.5 |
| 1 | $< ++ >$ | $< ++ >$ | $< ++ >$ | $< ++ >$ | 0.25 |
| 2 | $< ++ >$ | $< ++ >$ | $< ++ >$ | $< ++ >$ | 0.125 |

Et enfin :

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $g(x_n)$ | $\lvert b_n - a_n \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $1(+)$ | $1.5(-)$ | $1.25(-)$ | $-0.162 \times 10^0$ | 0.5 |
| 1 | $1.25(-)$ | $1.5(+)$ | $1.375(+)$ | $+0.284 \times 10^{-1}$ | 0.25 |
| 2 | $1.25(-)$ | $1.375(+)$ | $1.3125(-)$ | $)0.738 \times 10^{-1}$ | 0.125 |

Note que les $f(x_n)$ restent toujours du même ordre de grandeur. Si un moment on voit un $1.6 \times 10^7$, c'est qu'une erreur a été commise.

En ce qui concerne le calcul de l'erreur relative, la première chose à faire est de vérifier que le $\alpha$ proposé est dans l'intervalle qui nous reste. Sinon c'est qu'une erreur a été commise.

De plus notre approximation est $x_n = 1.3125$, dont déjà deux chiffres sont corrects. En deux itérations de bisection en partant de 0.5, nous ne pouvons pas nous attendre à mieux.

## 32.14 Approximations de fonctions

(1) D'habitude on n'approxime pas une fonction sur tout son domaine, mais seulement sur une partie.

(2) Il y a le problème du choix de la classe des fonctions qui vont approximer. Nous allons travailler avec des polynômes.

(3) Il nous faut un critère disant si une approximation est bonne ou non.

### 32.14.1 Critère d'interpolation

À partir de $n+1$ abscisses points distinctes $x_i$, nous calculons $y_i = f(x_i)$. Il y a ce théorème qui dit qu'il existe un unique polynôme de degré (au plus) $n+1$ passant par les points $(x_i, y_i)$.

**Proposition-définition 32.86** (Base de Lagrange)**.**
*Étant donnés $n+1$ valeurs distinctes $x_i$, l'espace des polynômes de degré $n$ admet la base*

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{32.198}$$

*pour $i = 0, \dots, n$.*

Soit par exemple les valeurs de $f$ données dans

| $x_i$ | $y_i = f(x_i)$ |
|---|---|
| $x_0 = 5$ | $1$ |
| $x_1 = -7$ | $-23$ |
| $x_2 = 6$ | $-54$ |
| $x_3 = 0$ | $-954$ |

Les polynômes de Lagrange pour ces données dépendent seulement des $x_i$, pas des $y_i$. En particulier,

$$L_0^{(3)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}, \tag{32.199}$$

etc.

La réponse est que

$$L_0^{(3)}(x) = \frac{x^3+13x^2+42x}{660} \tag{32.200a}$$

$$L_1^{(3)}(x) = \frac{-x^3-x^2+30x}{84} \tag{32.200b}$$

$$etc. \tag{32.200c}$$

Ce qu'il y a de bien avec cette base est que en posant $a_i = f(x_i)$ alors le polynôme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i L_i^{(n)}(x) \tag{32.201}$$

passe par les points $(x_i, f(x_i))$. Du coup il suffit d'écrire

$$P_3(x) = L_0^{(3)}(x) - 23L_1^{(n)}(x) - 54L_2^{(n)}(x) - 954L_3^{(n)}(x) = 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954. \tag{32.202}$$

Un inconvénient de cette base est qu'elle est complètement dépendante des points choisis. Si on ajoute un point ou qu'on en prend un à peine différent, tous les coefficients changent. Mais en pratique, ajouter des points est quelque chose qui arrive souvent parce que souvent, après avoir vu le résultat d'un polynôme d'interpolation, on veut ajouter un point pour avoir un meilleur résultat.

**32.87.**
Une habitude : le premier et le dernier nœud se choisissent aux extrémités de l'intervalle sur lequel nous voulons une approximation.

Le but d'une approximation est d'avoir des approximations de $f(x^*)$ pour des valeurs de $x^*$ qui ne soit pas une des abscisses données (parce que sur ces points, le polynôme et la fonction sont égaux). Nous considérons donc

$$f(x^*) \simeq P_n(x^*). \tag{32.203}$$

Si $x^*$ est dans l'intervalle $I = [x_{min}, x_{max}]$ alors nous disons que nous calculons $f$ par **interpolation**. Si au contraire $x^*$ est en dehors de cet intervalle nous parlons d'**extrapolation**.

Si $x^*$ est pris à l'extérieur de $I$, alors l'erreur risque d'être très grande, surtout parce que les polynômes tendent tous vers $\pm\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$.

Autant l'interpolation via polynômes est le plus souvent valable, il faut garder à l'esprit que les extrapolation sont souvent mauvaises si $x^*$ est trop loin des extrémités de $I$.

### 32.14.2 Base de Newton

Après la base canonique et la base de Lagrange, nous voyons la base de Newton. Soient encore $n+1$ points donnés du graphe de $f$.

**Définition 32.88.**
*La **base de Newton** pour les abscisses $x_i$ est l'ensemble des polynômes suivants :*

$$1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \tag{32.204}$$

Notons que ces polynômes n'utilisent pas le dernier point des $x_i$. Le polynôme passant par les points est

$$P_n(x) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j). \tag{32.205}$$

Le calcul des $c_i$ n'est pas absolument évident. Mais si nous ajoutons un point d'interpolation, les polynômes déjà calculés sont encore bons ; en particulier

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + c_{n+1} \prod_{j=0}^{n}(x - x_j). \tag{32.206}$$

Et cela est bien, parce que ça donne une façon de les calculer par récurrence.

Il y a plusieurs façons de calculer les $c_i$.

Les différences divisées sont des façons d'approximer les dérivées.

**Définition 32.89.**
*Soient $n+1$ nœuds $x_i$ pour la fonction $f$. La* ***différence divisée*** *sont :*

**Ordre** 0

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{32.207}$$

**Ordre** 1

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}. \tag{32.208}$$

**Ordre** 2

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}. \tag{32.209}$$

**Ordre** $n$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}. \tag{32.210}$$

Les ordres font référence à l'ordre de dérivation qui est approximé.

Nous avons alors

$$c_i = f[x_0, \ldots, x_i]. \tag{32.211}$$

Cela donne effectivement une méthode de récurrence pour trouver les coefficients $c_i$.

**Remarque 32.90.**
Pour calculer $c_0$, il faut seulement calculer $f[x_0] = f(x_0)$. Mais pour calculer $c_1$ il faut $f[x_0]$ et $f[x_1]$. Et pour $c_2$ il faut $f[x_0, x_1, x_2]$ qui demande $f[x_0, x_1]$ et $f[x_0, x_1]$, qui demande etc.

Il faut donc calculer en réalité tous les $f[x_i]$ pour terminer le calcul. Par contre, pour ajouter un point, il ne faut pas tout recalculer, et même pas tout conserver en mémoire. Il faut seulement garder en mémoire la dernière diagonale.

**Exercice 4**

Soit les nœuds

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 1 | $-3$ |
| 5 | 2 |
| 6 | 4 |

Trouver le polynôme d'interpolation via la base de Newton.

**Correction de l'exercice 4**

| $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_j]$ | $f[x_i, x_j, x_k]$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | $\frac{1+3}{2} = 2$ | $\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} = \frac{2-\frac{5}{4}}{-2} = -\frac{3}{8}$ |
| 1 | $-3$ | $\frac{-3-2}{-4} = \frac{5}{4}$ | $\frac{\frac{5}{4}-2}{-5} = \frac{3}{20}$ |
| 5 | 2 | $\frac{2-4}{-1} = 2$ | $\frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3} = \frac{4}{40}$ |
| 6 | 4 | $< ++ >$ | $< ++ >$ |

Le polynôme d'interpolation sera

$$P_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \tag{32.212}$$

Un exercice typique serait de donner tout pour 3 points puis de demander le polynôme qui aurait un quatrième point.

### 32.14.3 Méthode des minima quadratiques

Soient $m+1$ points connus sur le graphe de la fonction $f$ que nous devons approximer. Au lieu d'exiger que notre approximation ne passe par tous les points, nous allons chercher une approximation qui minimise la somme des carrés des erreurs sur ces points.

Soit $\mathcal{F}$ une classe de fonctions dans laquelle nous allons chercher l'approximation. Nous cherchons $g \in \mathcal{F}$ qui minimise

$$E(g) = \sum_{i=0}^{m} \big(f(x_i) - g(x_i)\big)^2 \omega_i \tag{32.213}$$

où $\omega_i > 0$ est une pondération. Souvent on prend $\omega_i = 1$, mais pas toujours. La fonction $E$ sur $\mathcal{F}$ est la **fonction d'erreur**.

**32.91.**
À part dans les exercices à la main, le nombre de points est grand, du type du milliard. Il est bien entendu pas envisageable de faire passer un polynôme *exactement* par un milliard de points, parce que cela demanderait un polynôme de degré un milliard.

Plus généralement, d'un point de vue scientifique, avoir $n$ paramètres libres pour $n$ données expérimentales, ça ne passe pas Popper.

Afin de faire de la science qui passe Popper nous nous restreignons à une classe de fonction $\mathcal{F}$ dont la dimension n'est pas grande : $\dim(\mathcal{F}) \ll m$. Et nous notons $\dim(\mathcal{F}) = n + 1$.

**Exemple 32.92**
La qualité d'une expérience peut être influencée par des paramètres extérieurs comme l'humidité, le vent, etc. Donc il est normal d'avoir des expériences moins précises que d'autres. On le pèse moins. △

**Exemple 32.93**
Dans un questionnaire, il se met des questions volontairement contradictoires. Si quelqu'un répond «oui» aux deux questions, il y a une indication que la personne a répondu un peu n'importe comment, et il faut moins peser ses réponses. △

Soit $g \in \mathcal{F}$, et une base $\{g_i\}_{i=0,\dots,n}$ de $\mathcal{F}$. Nous écrivons

$$g = a_0 g_0 + a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n \tag{32.214}$$

La fonction donnée $E$ donnée en (32.213), est, à partir du moment où $\mathcal{F}$ et une base sont choisis, une fonction des paramètres $a_i$ que nous nommons $F(a_0, \dots, a_i)$. Il faut minimiser $F$, c'est à dire poser

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0 \tag{32.215}$$

pour $j = 0, \dots, n$. Cela sont $n+1$ équations pour $n+1$ inconnues. Notons que ces équations sont linéaires parce que chacun des termes est du type

$$\left( f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j g_j(x_i) \right)^2, \tag{32.216}$$

et lors de la dérivation par rapport à $a_j$, nous obtenons du degré 1.

### 32.14.4 Notre espace de Hilbert

Nous allons maintenant formaliser un peu tout cela. Dans [334] il est expliqué que si $\omega$ est une fonction strictement positive, alors l'espace $L^2_\omega\big([a,b]\big)$ dérivé de la norme

$$\|f\|^2_{L^2_\omega} = \int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx \tag{32.217}$$

est un espace de Hilbert. Nous allons tenter le coup avec $\omega = \sum_{i=0}^{m} \omega_i \delta_{x_i}$ où $\delta_a$ est la distribution de Dirac [12] centrée en $a$.

Sur l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nous considérons la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f(x_i) = g(x_i)$ pour tout $i = 0, \dots, m$. Nous notons $L^2_\omega$ cet ensemble.

**Proposition 32.94.**
*La formule*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{m} f(x_i) g(x_i) \omega_i \tag{32.218}$$

*définit un produit scalaire sur $L^2_\omega$. Ce dernier devient un espace de Hilbert.*

*Démonstration.* Pour être un produit scalaire (définition 9.24), la forme considérée doit être symétrique et strictement définie positive. La symétrie de la formule (32.218) ne fait pas de doute. Le fait que ce soit semi-défini positif non plus. Pour le strict,

$$\langle f, f \rangle = \sum_{i=0}^{m} |f(x_i)|^2 \omega_i. \tag{32.219}$$

Étant donné que $\omega_i > 0$ pour tout $i$, l'annulation de $\langle f, f \rangle$ implique l'annulation de $f(x_i)$ pour tout $i$. Cela signifie que $f$ est dans la classe de 0 et donc est nul dans $L^2_\omega$.

En ce qui concerne la complétude, la proposition 23.3 répond à notre place, étant donné que $L^2_\omega$ est de dimension finie. Une base est donnée par exemple par $e_i(x) = \delta_{x,x_i}$. Ici le $\delta$ est celui de Kronecker, et non celui de Dirac. □

**Lemme 32.95.**
*Si la classe de fonctions $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $L^2_\omega$ et si $f \in L^2_\omega$ il existe un unique élément $g$ de $\mathcal{F}$ minimisant la distance à $f$.*

*Démonstration.* Le théorème de projection (au choix 12.233 ou 23.6) nous assure l'existence et l'unicité d'un élément de $\mathcal{F}$ minimisant la distance à $f \in L^2_\omega$. □

**32.96.**
Ce lemme est gentil, mais ne nous donne pas de méthodes pour trouver ce minimum. Nous allons donc écrire explicitement un système d'équations permettant de le trouver. Si $\{g_\alpha\}$ est une base (finie) de $\mathcal{F}$ alors nous cherchons le minimisant sous la forme $f = \sum_\alpha a_\alpha g_\alpha$.

Nous devons minimiser

$$E(g) = \sum_{i=0}^{m} \big(f(x_i) - g(x_i)\big)^2 \omega_i = \sum_{i=0}^{m} \big(f(x_i) - \sum_\alpha a_\alpha g_\alpha(x_i)\big)^2 \omega_i. \tag{32.220}$$

12. Définition 28.26.

Vu que cela est maintenant plutôt une fonction des coefficients $a_\alpha$ que de la fonction $g$ nous la notons $F(a_0,\dots,a_n)$. Il s'agit d'étudier le système d'équations

$$\frac{\partial F}{\partial a_\alpha}=0. \tag{32.221}$$

Un tout petit peu de calcul mène au système

$$\sum_i\sum_\beta a_\beta\omega_i g_\alpha(x_i)g_\beta(x_i)=\sum_i\omega_i g_\alpha(x_i)f(x_i). \tag{32.222}$$

À droite nous reconnaissons $\langle f,g_\alpha\rangle$. et à gauche, $\sum_\beta a_\beta\langle g_\alpha,g_\beta\rangle$. Donc le système s'écrit

$$\sum_\beta a_\beta\langle g_\alpha,g_\beta\rangle=\langle f,g_\alpha\rangle. \tag{32.223}$$

Il y a une équation pour chaque valeur de $\alpha$.

La matrice $A\in\mathbb{M}(n+1),\mathbb{R}$ donnée par $\langle g_\alpha,g_\beta\rangle$ étant strictement définie positive (c'est un produit scalaire), le système a une unique solution. Et comme cette matrice est de plus symétrique, elle est diagonalisable par le théorème spectral 9.165. Toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Notons pour la curiosité que si l'on considère la matrice $B\in\mathbb{M}(m\times n)$ donnée par

$$B_{ij}=\sqrt{\omega_i}g_j(x_l), \tag{32.224}$$

alors nous avons $A=B^tB$.

### 32.14.5 Droite de régression

La droite de régression est la cas particulier $n=1$, c'est à dire un système $2\times2$. Nous cherchons $P=a_0+a_1x$. Et la base choisie est $g_0(x)=1$, $g_1(x)=x$. Nous avons

$$\langle g_0,g_0\rangle=\sum_i\omega_i g_0(x_i)g_0(x_i)=\sum_i\omega_i \tag{32.225a}$$

$$\langle g_0,g_1\rangle=\sum_i\omega_i x_i \tag{32.225b}$$

$$\langle g_1,g_1\rangle=\sum_i\omega_i x_i^2. \tag{32.225c}$$

Donc pour approximer une fonction $f$ il faut résoudre le système

$$\begin{pmatrix}\sum_i\omega_i & \sum_i\omega_i x_i\\ \sum_i\omega_i x_i & \sum_i\omega_i x_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle f,g_0\rangle\\ \langle f,g_1\rangle\end{pmatrix}. \tag{32.226}$$

Pour calculer les produits $\langle f,g_\alpha\rangle$ il suffit de savoir $f$ sur les points $x_i$. Et encore heureux, parce que toute la méthode est basée sur le fait que nous ne connaissons pas $f$ ailleurs. C'est pour cela que nous avons défini $L^2_\omega$ comme un ensemble quotient.

**Exemple 32.97**
Faisons la droite de régression pour les données avec tous les poids $\omega_i=1$.

| $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|
| $-5$ | 18 |
| $-3$ | 7 |
| 1 | 0 |
| 3 | 7 |
| 4 | 16 |
| 6 | 50 |
| 8 | 67 |

Nous avons

$$\langle g, g_0 \rangle = \sum_i f(x_i) = 165 \tag{32.227a}$$

$$\langle f, f_1 \rangle = \sum_i f(x_i)x_i = 810. \tag{32.227b}$$

et donc le système

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 14 & 160 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165 \\ 810 \end{pmatrix} \tag{32.228}$$

dont résolution donne la droite de régression. △

**Proposition 32.98.**
*Si tous les poids sont identiques, alors la droite de régression passe par le barycentre des points donnés :*

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{m+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{m} x_i & (32.229a) \\ y_M = \dfrac{1}{m+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{m} y_i. & (32.229b) \end{cases}$$

Cela donne une vérification possible de la réponse trouvée.

**Définition 32.99.**
*L'**erreur quadratique** est la fonction $F(a_0, \ldots, a_n)$ dont il est question plus haut. Et si une solution est connue, son erreur quadratique est la valeur de $F$ pour cette solution.*

## 32.15 Conditionnement d'une matrice

Soit le système d'équations linéaires $Au = b$ avec la matrice inversible $A$ ainsi que le système perturbé $(A + \Delta A)u' = (b + \Delta b)$. Nous notons $\Delta u = u' - u$ et nous voudrions pouvoir dire des choses de l'erreur relative $\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|}$.

**Exemple 32.100**([107])
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \tag{32.230}$$

et $b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$. La solution de $Au = b$ est $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Si nous conservons la même matrice mais nous considérons $b = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$. La solution devient $u' = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix}$

En norme $\|.\|_\infty$ nous avons[13]

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{0.1}{32} = 0.003125 \tag{32.231}$$

et

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} = \frac{1.7}{6} = 0.28. \tag{32.232}$$

Cela montre environ amplification d'un facteur 100 entre l'erreur sur $b$ et l'erreur sur la solution. △

13. La proposition 10.2(3) montre que si nous voulions des estimations en norme $\|.\|_2$, il y aurait au maximum un facteur $\sqrt{2}$ par-ci par là.

**Définition 32.101.**
*Le **conditionnement** de la matrice inversible $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est le nombre positif*

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|. \tag{32.233}$$

Cette dénomination sera justifié par le corollaire 32.106 parce qu'il est évident que le conditionnement d'une matrice est lié au conditionnement du problème de résolution d'un système linéaire.

**Remarque 32.102.**
Le conditionnement dépend de la norme choisie, mais cette dependence est contrôlée par la proposition 10.2 qui nous indique que si le conditionnement d'une matrice est grand dans une norme, il sera grand dans une autre norme.

D'autre part, lorsque nous écrirons $\|A\|$ nous supposerons toujours que $\|.\|$ est une norme d'algèbre [14] et donc que nous avons toujours

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|. \tag{32.234}$$

De plus nous supposerons toujours avoir une norme subordonnée à une norme sur l'espace $\mathbb{C}^n$, de telle sorte à avoir

$$\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\| \tag{32.235}$$

pour tout $u \in \mathbb{C}^n$. Voir aussi le lemme 10.12.

**Proposition 32.103** ([107])**.**
*Si $A$ est une matrice inversible et si $\alpha \in \mathbb{C}$ nous avons :*

*(1)* $\mathrm{Cond}(A) \geqslant 1$

*(2)* $\mathrm{Cond}(A) = \mathrm{Cond}(A^{-1})$

*(3)* $\mathrm{Cond}(\alpha A) = \mathrm{Cond}(A)$.

*Si $Q \in \mathrm{O}(n)$ alors*

*(1) Nous avons $\mathrm{Cond}_2(Q) = 1$ où $\mathrm{Cond}_2$ est le conditionnement pour la norme $\|.\|_2$.*

*(2) Nous avons aussi*

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \mathrm{Cond}_2(AQ) = \mathrm{Cond}_2(QA). \tag{32.236}$$

*Démonstration.* Nous savons que $\mathrm{Cond}(\mathbb{1}) = 1$ et donc

$$1 = \|\mathbb{1}\| \leqslant \|A\|\|A^{-1}\| \tag{32.237}$$

parce que la norme utilisée est une norme matricielle.

Les deux autres formules sont évidentes à partit du fait que la définition du conditionnement de $A$ est symétrique entre $A$ et $A^{-1}$.

En ce qui concerne les formules relatives à la matrice orthogonale $Q$ nous savons par la proposition 9.50(3) qu'une matrice orthogonale est une bijection de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$. Par conséquent

$$\|AQ\| = \sup_{x \text{ tel que } \|x\|=1} \|AQx\| = \sup_{Q^{-1}x \text{ tel que } \|x\|=1} \|AQQ^{-1}x\| = \|A\|. \tag{32.238}$$

Donc $\|AQ\| = \|A\|$. Les assertions s'ensuivent immédiatement en remarquant que $Q^{-1}$ est également orthogonale. □

Soit une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. La matrice $A^*A$ est hermitienne [15] et le théorème 9.159 nous assure que ses valeurs propres sont réelles. Par la remarque 9.160, ses valeurs propres sont même positives.

14. Définition 10.9.
15. Définition 9.45.

**Proposition 32.104** ([107]).
*Soit une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, et $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres de $A^*A$. Alors nous avons la formule*

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_1}}. \tag{32.239}$$

*Démonstration.* Par le théorème 10.25, la norme de $A$ est liée au au rayon spectral de $A^*A$ par

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\mu_n}. \tag{32.240}$$

Vu que le spectre de $AA^*$ est le même que celui de $A^*A$ (lemme 9.163) nous avons aussi

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho\big((A^{-1})^*A^{-1}\big)} = \sqrt{\rho\big((A^*A)^{-1}\big)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \tag{32.241}$$

parce que la plus grande valeur propre de $(A^*A)^{-1}$ est l'inverse de la plus petite de $A^*A$.

Ces deux calculs étant,

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_1}}. \tag{32.242}$$

□

**Problèmes et choses à faire**

À mon avis ce qui est dans la proposition 18.98 est le conditionnement de la matrice ou sa racine carré ou un truc du genre. Il faut voir le lien entre les valeurs propres de $A$ et celles de $AA^*$.

### 32.15.1 Perturbation du vecteur

**Proposition 32.105** (Système linéaire : perturbation du vecteur[107]).
*Soit une matrice inversible $A$ et les systèmes d'équations linéaires*

$$Au = b \tag{32.243a}$$
$$Au' = b'. \tag{32.243b}$$

*En notant $\Delta u = u' - u$ et $\Delta b = b' - b$ nous avons*

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leqslant \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \tag{32.244}$$

*Démonstration.* En soustrayant les équations (32.243) nous avons $\Delta b = A\Delta u$, et donc $\Delta u = A^{-1}\Delta b$. D'une part nous avons alors

$$\|\Delta u\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\Delta b\|. \tag{32.245}$$

Et d'autre part, $\|b\| \leqslant \|A\|\|u\|$, ce qui donne

$$\frac{\|b\|}{\|A\|} \leqslant \|u\|. \tag{32.246}$$

En mettant les deux ensemble,

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta b\|}{\|b\|}\|A\| = \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \tag{32.247}$$

□

Le corollaire suivant justifie le nom «conditionnement» au conditionnement d'une matrice.

**Corollaire 32.106.**
*Soit $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ fixée et le problème de résoudre $Au = b$, c'est à dire la fonction*

$$F(u, b) = Au - b. \tag{32.248}$$

(1) *Ce problème est stable pour toute valeur de b.*

(2) *Nous avons une majoration pour le conditionnement relatif*[16] *:*

$$K_{rel}(\eta, b_0) \leqslant \text{Cond}(A). \tag{32.249}$$

*Démonstration.* **Stabilité** Vu que $A$ est inversible, il existe une solution unique à tout système de la forme $Au = b'$. De plus $u(b) = A^{-1}b$, donc

$$\|u(b) - u(b_0)\| = \|A^{-1}(b - b_0)\| \leqslant \|A^{-1}\|\|b - b_0\|, \tag{32.250}$$

de telle sorte que la condition 32.25(2) fonctionne avec $K = \|A^{-1}\|$.

**Conditionnement** En partant de la définition 32.46, et en utilisant la majoration de la proposition 32.105 sous la forme

$$\|u(b) - u(b_0)\| \leqslant \text{Cond}(A)\|u(b_0)\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}, \tag{32.251}$$

nous obtenons :

$$K_{rel}(b_0, \eta) = K_{abs}(b_0, \eta)\frac{\|b_0\|}{\|u(b_0)\|} \tag{32.252a}$$

$$= \sup_{\|b-b_0\|\leqslant\eta} \frac{\|u(b) - u(b_0)\|}{\|b - b_0\|}\frac{\|b_0\|}{\|u(b_0)\|} \quad \leqslant \sup_b \text{Cond}(A)\frac{\|u(b_0)\|}{\|b_0\|}\|\Delta b\|\frac{1}{\|b - b_0\|}\frac{\|b_0\|}{\|u(b_0)\|} \tag{32.252b}$$

$$= \text{Cond}(A). \tag{32.252c}$$

□

**Remarque 32.107.**
La notion de conditionnement relatif dépend aussi de la norme choisie. Dans la formule (32.249) il faut prendre le conditionnement $\text{Cond}(A)$ pour la norme dans laquelle le $K_{rel}$ est écrit. Encore une fois, toutes les normes étant équivalentes, cette majoration est à constante près bonne pour toutes les normes. Si la dimension est très grande, cette constante peut par contre être grande.

### 32.15.2 Perturbation de la matrice

**Proposition 32.108** (Système linéaire : perturbation de la matrice[107])**.**
*Soient les systèmes linéaires*

$$Au = b \tag{32.253a}$$

$$A'u' = b \tag{32.253b}$$

*avec $A$ et $A'$ inversibles. Nous notons $\Delta A = A' - A$. Alors*

*(1)*

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u'\|} \leqslant \text{Cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \tag{32.254}$$

*(2)*

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leqslant \text{Cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\big(1 + \alpha(\|\Delta A\|)\big) \tag{32.255}$$

*où* $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$.

16. Si vous doutez de la norme à prendre, lisez la remarque 32.107

*Démonstration.* D'abord nous avons

$$0 = Au' - Au \tag{32.256a}$$
$$= (A' - A)u' - Au' - Au \tag{32.256b}$$
$$= \Delta A u' + A\Delta u. \tag{32.256c}$$

Par conséquent, $\Delta u = -A^{-1}(\Delta A)u'$ et

$$\|\Delta u\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|u'\|. \tag{32.257}$$

Donc

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u'\|} \leqslant \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \text{Cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \tag{32.258}$$

Cela est (1).

Pour l'autre inégalité, nous avons $A' = A + \Delta A$ et donc

$$\|A'^{-1}\| = \|(A + \Delta A)^{-1}\| \tag{32.259}$$

Nous repartons alors de (32.257) en changeant le rôle de $A$ et $A'$ (et donc aussi de $u$ et $u'$). Ce changement étant, $\|\Delta u\|$ et $\|\Delta A\|$ ne changent pas. Nous avons :

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leqslant \|A'^{-1}\|\|\Delta A\| \tag{32.260a}$$
$$= \|(A + \Delta A)^{-1}\|\|\Delta A\|\frac{\text{Cond}(A)}{\|A\|\|A^{-1}\|} \tag{32.260b}$$
$$= \frac{\|(A + \Delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\text{Cond}(A). \tag{32.260c}$$

Il reste à voir que

$$\lim_{\|\Delta A\|\to 0}\frac{\|(A + \Delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = 1, \tag{32.261}$$

ou autrement dit que

$$\lim_{A\to A'}\frac{\|A'^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = 1 \tag{32.262}$$

où la limite est celle dans $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Par définition de la topologie, la norme est continue (quelle qu'elle soit par l'équivalence de norme 10.3). Par le théorème 12.232, l'application $A \mapsto A^{-1}$ est également continue et commute donc avec la limite. Nous avons donc

$$\lim_{A'\to A}\|A'^{-1}\| = \|(\lim_{A'\to A}A')^{-1}\| = \|A^{-1}\|. \tag{32.263}$$

Donc la limite du quotient (32.262) est bien 1. □

## 32.16 Système linéaires (généralités)

Soit un système d'équations linéaires $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Le problème est évidemment de savoir s'il existe une unique solution $x$ et de la déterminer. Nous supposons l'existence et l'unicité. C'est à dire que les conditions équivalentes [17] sont vérifiées :

(1) $A$ est inversible, c'est à dire qu'il existe une matrice notée $A^{-1}$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$.

(2) $\det(A) \neq 0$.

17. L'équivalence est la proposition 9.10(2).

Note : si nous avons un système pas carré du type $Bx = v$ avec $B \in \mathbb{M}(n \times m)$ alors nous pouvons nous ramener à un système carré en écrivant

$$B^t Bx = B^t v. \tag{32.264}$$

Mais attention : bien que $B^t B$ soit symétrique et semi-définie positive, certaines valeurs propres peuvent être nulles.

**32.109.**
Deux choses générales en calcul numérique :

(1) On ne calcule pas l'inverse d'une matrice.

(2) On ne calcule même pas son déterminant.

Par conséquent nous ne faisons pas $x = A^{-1}v$.

Il faut garder en tête le fait que dans la pratique, la matrice $A$ possède des millions de lignes et colonnes, si pas pire. Pour une matrice de taille de l'ordre du million, il y a 1000 milliards d'entrées. Si on compte 32 bits par nombre (précision simple, définition 32.8), c'est à dire 4 octets, il faut 4000 giga-octets pour enregistrer la matrice. Même pour la mémoire actuellement disponible, ce n'est pas rien. Surtout que souvent, la précision simple n'est pas utilisée, mais la précision double, ce qui donne 8000 giga pour enregistrer la matrice.

Heureusement, dans la majorité des cas pratiques, les matrices géantes qui apparaissent sont pleines de zéros.

**Définition 32.110.**
*Une matrice est* ***creuse*** *si elle possède beaucoup de zéros. Une matrice non creuse est dite* ***dense****.*

*Notons que lorsqu'on parle de matrice comprenant beaucoup de «zéros», nous pensons à des éléments très petits, et non de vrai zéros.*

Les matrices creuses ne sont pas mémorisées entièrement, mais plutôt comme un dictionnaire $(i, j, v)$ qui donne la valeur $v$ de $A_{ij}$.

**Définition 32.111.**
*Une matrice est de «grande dimension» si elle ne peut pas être mise en mémoire sur un ordinateur donné. Sur certains ordinateurs, ça commence à* 5000 *inconnues. Mais sur des plus forts, on peut aller jusqu'au million ou le milliard.*

Si la matrice est de petite dimension, il est possible d'utiliser des méthodes dites «directes». Sinon, il faudra utiliser des méthodes itératives.

### 32.16.1 Les méthodes directes

Une méthode directe consiste à successivement transformer un système $A^{(0)}x = b^{(0)}$ en de nouveaux systèmes $A^{(i)}x = b^{(i)}$ dont la solution est identique jusqu'à obtenir un système $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ qui est à résolution immédiate.

L'avantage d'une méthode directe est qu'elle fournit une réponse exacte, pour autant que les calculs intermédiaires soient bien faits (ce qui n'est pas le cas sur un ordinateur).

Une méthode directe fonctionne en général avec un nombre de pas fixés par la taille du système. Par exemple pour un système $n \times n$, la méthode de Gauss demande exactement $n$ pas, et il n'y a pas moyen de faire mieux. Or chaque pas demande de recalculer tous les éléments de la matrice. Encore une fois, si la matrice a une taille de l'ordre du milliard, cela fait $10^{18}$ éléments à recalculer un milliard de fois (sans compter les éléments du vecteur $b$). Infaisable.

Souvent une méthode directe passe par une factorisation $A = BC$ avec $B, C \in \mathbb{M}(n \times n)$.

Quelque types de matrices dont la résolution est immédiate :

— Matrice diagonale.

— Matrice orthogonale parce que si $A$ est orthogonale alors $Ax = v$ se résout par $x = A^t v$ qui n'est pas particulièrement lourd à faire numériquement.

— Matrice triangulaire.

**Remarque 32.112.**
Pour une matrice diagonale, le déterminant et l'inverse sont faciles. Mais également pour la triangulaire. Pour une matrice triangulaire, le déterminant est le produit des éléments diagonaux, et il se fait qu'il y a une algorithme facile pour calculer l'inverse.

Donc en fait les matrices à résolution immédiates sont des matrices pour lesquelles l'inverse et le déterminant sont facile à calculer.

### 32.16.2 Méthodes itératives

Si la matrice est trop grande, il n'est pas possible de faire des manipulations de matrices à chaque itération.

En général, les méthodes itératives ne convergent pas toujours. Mais lorsqu'une méthode converge, c'est une propriété de la matrice, et donc la convergence aura lieu pour tout vecteur de départ $x_0$. Cela est très différent du cas des équations non linéaires type Newton pour lesquelles la convergence peut fortement dépendre du point de départ.

## 32.17 Système linéaires (méthodes directes)

Les matrices que nous sommes autorisés à inverser sont les matrices
— orthogonales : l'inverse est la transposée
— diagonales : l'inverse est diagonale avec les inverses sur la diagonale
— triangulaires : nous en parlons maintenant.

### 32.17.1 Inversion de matrice triangulaire

Si $T$ est une matrice triangulaire (mettons supérieure pour fixer les idées), il est possible d'en calculer l'inverse sans trop d'efforts. Notons $B$ la matrice inverse que nous allons construire ligne par ligne. Vu que $BT = \mathbb{1}$ nous avons

$$\delta_{1j} = \sum_{k=1}^{n} B_{1k}T_{kj} = \sum_{k=1}^{j} B_{1k}T_{kl} \tag{32.265}$$

parce que $T_{kj} = 0$ pour $k > j$. Donc nous pouvons calculer les éléments $B_{1j}$ un par un parce que chacun ne dépend que des précédents. Le même procédé fonctionne pour les autres lignes :

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{j} B_{ij}T_{kj}. \tag{32.266}$$

Et tu notes que le calcul peut être parallélisé : le calcul de la ligne numéro $j$ ne dépend pas du résultat des autres lignes.

### 32.17.2 Transformation gaussienne

**Définition 32.113** (Transformation gaussienne[335])**.**
*Soit $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x_k \neq 0$. La $k^e$**transformation gaussienne** pour $x$ est la matrice*

$$M_k(x) = \mathbb{1} - T_k(x) \tag{32.267}$$

*où $T_k(x)$ est la matrice unité à qui on a ajouté le vecteur*

$$\tau_k(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1}/x_k \\ \vdots \\ x_n/x_k \end{pmatrix} \tag{32.268}$$

*à la $k^e$colonne.*

Autrement dit, la matrice $M_k(x)$ est la matrice

$$M_k(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & -x_{k+1}/x_k & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & -x_n/x_k & 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{32.269}$$

En coordonnées nous avons

$$\big(M_k(x)\big)_{ij} = \delta_{ij} - \tau_k(x)_i\delta_{kj}. \tag{32.270}$$

**32.114.**
Les matrices de transformation gaussienne sont des matrice triangulaires de diagonale unitaire (c'est à dire avec des 1 sur la diagonale).

**Lemme 32.115.**
*Si $x \in \mathbb{R}^n$ alors nous avons*

$$M_k(x)x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{32.271}$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\big(M_k(x)x\big)_i = \sum_l M_k(x)_{il}x_l = \sum_l \big(\delta_{il} - \tau_k(x)_i\delta_{kl}\big)x_l = x_i - \tau_k(x)_i x_k. \tag{32.272}$$

Si $i \leqslant k$ nous avons $\tau_k(x)_i = 0$ et donc $\big(M_k(x)x\big)_i = x_i$. Si par contre $i \geqslant k+1$ alors $\tau_k(x)_i = \frac{x_i}{x_k}$ et alors $\big(M_k(x)x\big)_i = 0$. □

**Lemme 32.116.**
*Si $y \in \mathbb{R}^n$ vérifie $y_i = 0$ pour $i > k$ alors $M_{k+1}(x)y = y$.*

*Démonstration.* C'est une simple vérification :

$$\big(M_{k+1}(x)y\big)_i = \sum_l \big(\delta_{il} - \tau_{k+1}(x)_i\delta_{k+1,l}\big)y_l = y_i - \tau_{k+1}(x)_i y_{k+1}. \tag{32.273}$$

Mais comme $y_{k+1} = 0$ il nous reste automatiquement $y_i$. □

Le sens de ce lemme est si un vecteur est déjà «gaussiannisé» au niveau $k$, alors en lui appliquant une transformation gaussienne de niveau plus élevé que $k$, il ne change pas. Ce fait est important parce qu'il assure que lorsque l'on avance dans le processus de Gauss, chaque étape ne détruit pas les précédentes.

Le lemme suivant nous indique que l'inverse d'une matrice de transformation gaussienne est facile à calculer [18].

**Lemme 32.117.**
*L'inverse de la transformation gaussienne*

$$M_k(x)_{ij} = \delta_{ij} - \tau_k(x)_i\delta_{kj}. \tag{32.274}$$

18. Elle rentre d'ailleurs dans la catégorie des matrices triangulaires dont nous avons déjà discuté l'inverse.

*est la matrice donnée par*

$$M_k(x)^{-1}_{ij} = \delta_{ij} + \tau_k(x)_i \delta_{kj}. \tag{32.275}$$

*Autrement dit, il suffit de changer le signe de la partie non diagonale.*

*Démonstration.* Il s'agit d'une simple vérification, utilisant le produit matriciel explicite, et en remarquant que $\tau_k(x)_k = 0$ pour tout $k$. □

### 32.17.3 Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on procède comme suit :

(1) Écrire le système sous forme matricielle.

$$\text{p.ex. } \begin{cases} 2x + 3y &= 5 \\ x + 2y &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(2) Se ramener à une matrice avec un maximum de 0 dans la partie de gauche en utilisant les transformations admissibles :

(a) Remplacer une ligne par elle-même + un multiple d'une autre ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{L_1 - 2.L_2 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(b) Remplacer une ligne par un multiple d'elle-même ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{-L_1 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(c) Permuter des lignes.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{L_1 \mapsto L_2' \text{ et } L_2 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

(3) Retransformer la matrice obtenue en système d'équations.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 3 \end{cases}$$

**Remarques :**

— Si on obtient une ligne de zéros, on peut l'enlever :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

— Si on obtient une ligne de zéros suivie d'un nombre non-nul, le système d'équations n'a pas de solution :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ 0x + 0y + 0z = 7 \end{cases} \Rightarrow \textbf{Impossible}$$

— Si on moins d'équations que d'inconnues, alors il y a une infinité de solutions qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

### 32.17.4 Méthode de Gauss sans pivot (décomposition LU)

La méthode de Gauss est encore utilisée aujourd'hui dans les vrais problèmes.

La méthode de Gauss est souvent aussi appelée méthode «LU» qui va décomposer $A = LU$ où $L$ est triangulaire inférieure et $U$ est triangulaire supérieure. La décomposition est même plus précise que cela : on demande que $L$ ait seulement des 1 sur la diagonale.

Si $A$ est une matrice nous notons

$$\Delta_k(A) = (A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k} \tag{32.276}$$

la matrice tronquée dont nous ne gardons que le carré $k \times k$ en haut à gauche.

**Lemme 32.118.**
*Soit $S$ une matrice triangulaire inférieure. Soient également $A$ et $B$ telles que $B = SA$. Alors*

$$\Delta_k(B) = \Delta_k(S)\Delta_k(A). \tag{32.277}$$

*Démonstration.* En effet nous avons

$$\Delta_k(B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} S_{il}A_{lj}. \tag{32.278}$$

Dans la somme sur $l$ il ne reste que les termes $l \leqslant i$. Mais dans le calcul des éléments de matrice $\Delta_k(B)_{ij}$, nous avons évidemment $i, j \leqslant k$. Donc $l \leqslant i \leqslant k$. Les seuls éléments de matrice de $A$ qui sont utilisés dans la somme (32.278) sont les éléments $A_{lj}$ avec $l, j \leqslant k$.

Nous pouvons donc limiter la somme à $l = k$ au lieu de $l = n$ et écrire $\Delta_k(A)_{lj}$ au lieu de $A_{lj}$.

Même chose en ce qui concerne $S$. À partir du moment où $l$ est limité à $k$, les éléments $S_{il}$ et $\Delta_k(S)_{il}$ sont les mêmes. □

**Théorème 32.119** (Décomposition $LU$[336, 1])**.**
*Soit une matrice $A$ inversible telles que* $\det(\Delta_k(A)) \neq 0$ *pour tout $k$. Alors il existe un unique couple de matrices $(L, U)$ telles que*

— *$U$ soit triangulaire supérieure*
— *$L$ soit triangulaire inférieure, de diagonale unité*
— *$A = LU$.*

*De plus pour tout $k \leqslant n$ nous avons*

$$\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U). \tag{32.279}$$

*Démonstration.* Nous allons prouver par récurrence le fait suivant : pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$ il existe des matrices $E_i$ $(i = 1, \dots, k)$ telles que en posant

$$A_k = E_k \dots E_1 A, \tag{32.280}$$

— $E_j$ est une transformation gaussienne pour la $j^{\text{e}}$colonne,
— pour tout $j \leqslant k$, $A_{ij} = 0$ dès que $i > j$. Autrement dit la matrice $A_k$ est triangulaire supérieure jusqu'à y compris la $(k+1)^{\text{e}}$colonne (laquelle est quelconque). Exemple pour fixer les idées : pour une matrice $A \in \mathbb{M}(4 \times 4)$, la matrice $A_2$ doit avoir la forme

$$A_2 = E_2E_1A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \circledast & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \tag{32.281}$$

où les éléments notés $*$ sont a priori non nuls,
— l'élément de matrice $(A_k)_{k+1,k+1}$ est non nul (celui entouré dans l'exemple).

La chose un peu triste dans cette démonstration est que l'initialisation va être très ressemblante au pas de récurrence.

**Initialisation : $k = 1$** Vu que $\Delta_1(A)$ est inversible, l'élément $A_{11}$ est non nul. Il existe donc une transformation gaussienne $E_1$ telle que la première colonne de la matrice $A_1 = E_1A$ soit nul sauf la première composante. En particulier $(A_1)_{21} = 0$.

Par le lemme 32.118, nous avons $\Delta_2(A_1) = \Delta_2(E_1)\Delta_2(A)$, donc [19]

$$\det\big(\Delta_2(A_1)\big) = \det\big(\Delta_2(E_1)\big)\det\big(\Delta_2(A)\big). \tag{32.282}$$

Étant donnée la forme (32.269), toutes les matrices du type $\Delta_k(E_i)$ ont un déterminant unité, et par hypothèse $\Delta_2(A)$ est inversible, donc de déterminant non nul. Par conséquent $\det\big(\Delta_2(A_1)\big) \neq 0$. Mais comme ce déterminant est le produit des éléments diagonaux (c'est une matrice triangulaire), ces derniers ne sont pas nuls. Finalement, $(A_1)_2 2 \neq 0$.

**Le pas de récurrence** Nous supposons avoir $A_k = E_k \dots E_1 A$ avec $(A_k)_{k+1,k+1} \neq 0$. Alors il existe une transformation gaussienne $E_{k+1}$ de la $(k+1)^{\text{e}}$colonne telle que $A_{k+1} = E_{k+1}A_k$ soit une matrice dont la $(k+1)^{\text{e}}$colonne n'ait que des zéros en dessous de la $(k+1)^{\text{e}}$position. Vu le lemme 32.116, cette transformation n'affecte pas les colonnes précédentes.

La matrice $A_{k+1}$ est donc triangulaire supérieure jusqu'à la $(k+2)^{\text{e}}$colonne.

Vu que le produit $E_k \dots E_1$ est une matrice triangulaire inférieure, le lemme 32.118 fonctionne encore et nous avons

$$\Delta_{k+1}(A_k) = \Delta_{k+1}(E_k \dots E_1)\Delta_{k+1}(A). \tag{32.283}$$

Au niveau des déterminants par hypothèse nous avons $\det\big(\Delta_{k+1}(A)\big) \neq 0$ et $\det\big(\Delta_{k+1}(E_k \dots E_1)\big) = 1$. Donc

$$\det\big(\Delta_{k+1}(A_k)\big) \neq 0. \tag{32.284}$$

Cette matrice état triangulaire, ses éléments diagonaux sont non nuls et nous avons $(A_k)_{k+1,k+1} \neq 0$.

En poussant la récurrence jusqu'au bout, la matrice

$$A_{n-1} = E_{n-1} \dots E_n A \tag{32.285}$$

est triangulaire supérieure.

Nous posons alors $L = (E_{n-1} \dots E_n)^{-1}$ et $U = A_{n-1}$. Cela prouve l'existence parce que

$$A = (E_{n-1} \dots E_1)^{-1} A_{n_1}. \tag{32.286}$$

Encore une fois, le lemme 32.118 nous donne

$$\Delta_k(A) = \Delta_k\Big((E_{n_1} \dots E_1)^{-1}\Big)\Delta_k(A_{n-1}), \tag{32.287}$$

ou encore $\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U)$.

En ce qui concerne l'unicité, si $A = L_1U_1 = L_2U_2$ alors $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$. Vu qu'à gauche nous avons une matrice triangulaire inférieure et que à droite nous avons une triangulaire inférieure, nous savons que les deux membres représentent une matrice diagonale. Mais à gauche, la diagonale est unitaire. Donc les deux membres représentent la matrice unité. □

**32.120.**

En pratique, pour résoudre $Ax = b$, il faut seulement appliquer les transformations gaussiennes à la matrice élargie $(A|b)$ pour finir sur un système du type

$$Ux = b' \tag{32.288}$$

qui est immédiatement soluble. Autrement dit, en effectuant les annulations de colonnes, la matrice $U$ est «gratuite».

19. Le déterminant est multiplicatif, proposition 9.10(1).

Il n'est pas indispensable de calculer la matrice $L$ qui, elle, demande à chaque étape de se souvenir de la matrice $E_i$ utilisée. S'il faut résoudre plusieurs systèmes $Ax_i = b_i$, nous pouvons encore travailler avec la matrice encore plus élargie $(A|b_1 \dots b_m)$.

Si par contre nous ne connaissons pas à l'avance l'ensemble des vecteurs $b$ avec lesquels il faudra résoudre le système, il est bon de calculer la décomposition $A = LU$ in extenso, c'est à dire de garder une trace des matrices $L$ et $U$ séparément. Dans ce cas, résoudre $Ax = b$ revient à résoudre $Ly = b$, et ensuite $Ux = y$. Ce sont deux systèmes de résolution directe parce que les matrices sont triangulaires.

**32.121.**
Le fait que

$$\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U) \tag{32.289}$$

nous dit que si après avoir calculer $L$ et $U$ nous remarquons que le système est un peu plus petit ou un peu plus grand que prévu, tout le travail n'est pas perdu. En particulier si le système est plus petit que prévu, l'adaptation de $L$ et $U$ est immédiate.

Notons que $U$ et $L$ sont inversibles, et que $\det(L) = 1$. Donc $\det(U) = \det(A)$.

**Exemple 32.122**
Pour travailler la méthode de Gauss pour le système $Ax = b$, nous introduisons la matrice un peu augmentée $(A|b)$. Nous faisons un exemple. Soit à résoudre

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ -2 & 1 & 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{32.290}$$

Nous introduisons la matrice augmentée

$$(A|b)^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}. \tag{32.291}$$

Le premier pas consiste à annuler tous les éléments sous la diagonale de la première colonne. Autrement dit, nous prenons le 2 comme pivot. Nous introduisons les multiplicateurs $l_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{i1}}$. La nouvelle matrice est :

$$(A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \end{pmatrix} \tag{32.292}$$

où nous avons utilisé les multiplicateurs $l_{21} = 2$, $l_{31} = -1$.

Et la matrice suivante est :

$$(A|b)^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{32.293}$$

où nous avons utilisé le multiplicateur $l_{32} = 2$.

Cela est un système de résolution immédiate :

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 & \text{(32.294a)} \\ y + 4z = 6 & \text{(32.294b)} \\ 2z = 2. & \text{(32.294c)} \end{cases}$$

La troisième donne $z = 1$. Ensuite $y + 4 = 6$, donc $y = 2$. Et la première donne : $2x + 2 + 3 = 11$, c'est à dire $2x = 6$, enfin : $x = 3$.

Solution : $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

Nous notons surtout que dans $(A|b)^{(2)}$ nous avons une matrice triangulaire supérieure. Où est la matrice triangulaire inférieure ? En réalité la matrice $L$ est la matrice des multiplicateurs :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.295}$$

△

Le problème de cette méthode est que faisant ainsi nous risquons d'avoir un zéro sur un des pivots. Par exemple tomber sur

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \end{pmatrix}. \tag{32.296}$$

Le zéro sur la deuxième ligne nous ennuie si nous voulons tout faire dans l'ordre. Mais notons qu'en échangeant les deux dernière lignes, tout va bien : le système donné par

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \tag{32.297}$$

fonctionne très bien. Et même tellement bien qu'il est de résolution immédiate, dans ce cas.

Un autre problème est que si un des pivots est $10^{-14}$, le multiplicateur sera de l'ordre $10^{14}$, qui est mal représenté en mémoire. Il est donc bon de prendre les pivots le plus grand possible. Si le pivot est le plus grand nombre en valeur absolue d'une colonne, alors les nombres $x_{k+i}/x_k$ qui entrent dans la matrice de transformation gaussienne sont des nombres dans $[-1, 1]$ qui sont bien représentés en mémoire.

Tout cela nous incite à développer une méthode de Gauss qui permet de tenir une trace des permutations.

### 32.17.5 Matrice de permutation élémentaires

**Définition 32.123.**
*Une **matrice de permutation élémentaire** est une matrice obtenue en permutant deux lignes de la matrice identité. Nous notons $P_{ij}$ la matrice obtenue en inversant les lignes $i$ et $j$ de la matrice identité.*

**Exemple 32.124**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{12}. \tag{32.298}$$

△

**Lemme 32.125.**
*La matrice $P_{ij}A$ est la matrice $A$ avec ses lignes $i$ et $j$ inversées.*

*Démonstration.* Il suffit d'écrire

$$(P_{ij}A)_{kl} = \sum_m (P_{ij})_{km} A_{ml} \tag{32.299}$$

et de faire trois cas selon que $k = i$, $k = j$ ou $k$ différent de $i$ et $j$. Si $k = i$ alors $(P_{ij})_{im} = \delta_{mj}$ et si $k$ est différent de $i$ et $j$ alors $(P_{ij})_{mk} = \delta_{km}$ (troisième cas similaire au premier). □

Et la matrice $AP_{12}$ est la $A$ avec ses deux premières *colonnes* échangées.
Avec ces notations, notre matrice $(A|b)^{0'}$ est

$$P_{12}(A|b)^{(0)}. \tag{32.300}$$

Puis la matrice $(A|b)^{(1')}$ est

$$P_{23}(A|b)^{(1)}. \tag{32.301}$$

Et la matrice $P$ qui arrive dans $PA = LU$ est la matrice $P = P_{23}P_{21}$, qui est une matrice de permutation non élémentaire. Elle vaut :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32.302}$$

**Lemme 32.126** ([337])**.**
*Si $i, j > k$ alors les matrices de permutation élémentaires ont la relation de «commutation» suivante avec les transformations gaussiennes :*

$$M_k(x)P_{ij} = P_{ij}M_k\big(P_{ij}(x)\big). \tag{32.303}$$

*Démonstration.* Il suffit de calculer les éléments de matrice :

$$\big(P_{ij}M_k(x)\big)_{st} = (P_{ij})_{st} - \sum_m (P_{ij})_{sm}\tau_k(x)_m\delta_{kt}, \tag{32.304}$$

mais

$$\sum_m (P_{ij})_{sm}\tau_k(x)_m = \big(P_{ij}\tau_k(x)\big)_s = \tau_k\big(P_{ij}(x)\big)_s \tag{32.305}$$

parce que $i, j > k$ implique que dans $P_{ij}\tau_k(x)$ nous inversons deux élément non nuls de $\tau_k(x)$, tout en laissant le $k^{\text{e}}$élément. Le dénominateur ne change pas et il s'agit réellement d'une inversion de ligne. Donc

$$\big(P_{ij}M_k(x)\big)_{st} = (P_{ij})_{st} - \tau_k\big(P_{ij}x\big)_s\delta_{kt}. \tag{32.306}$$

De l'autre côté,

$$\big(M_k(y)P_{ij}\big)_{st} = (P_{ij})_{st} - \tau_k(y)_s(P_{ij})_{kt}. \tag{32.307}$$

Mais comme $i, j > k$ la $k^{\text{e}}$ligne de $P_{ij}$ est la même que celle de la matrice unité, donc $(P_{ij})_{kt} = \delta_{kt}$.

$$\big(M_k(y)P_{ij}\big)_{st} = (P_{ij})_{st} - \tau_k(y)_s\delta_{kt}. \tag{32.308}$$

Cela correspond bien à (32.306). □

## 32.18 Méthode de Gauss avec pivot partiel (décomposition PLU)

### 32.18.1 L'idée

À chaque pas, nous faisons une permutation de ligne. Nous permutons à chaque pas la première ligne avec celle qui a le pivot le plus grand (en valeur absolue). Donc :

$$(A|b)^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \tag{32.309}$$

Nous commençons par déplacer des lignes :

$$(A|b)^{(0')} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}. \tag{32.310}$$

Les multiplicateurs sont $l_{21} = 1/2$ et $l_{31} = -1/2$. Le fait est que les multiplicateurs ont toujours le plus grand dénominateur possible et nous avons alors toujours $0 \leqslant |l_{ij}| \leqslant 1$, qui sont des nombres relativement petits, et bien représentés en mémoire.

Nous avons la nouvelle matrice

$$(A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & -1/2 & -2 & -3 \\ 0 & 5/2 & 12 & 17 \end{pmatrix}. \tag{32.311}$$

Le pivot serait $-1/2$. Nous cherchons un pivot plus grand en dessous de ce $-1/2$ (et pas au dessus, sinon on casserait les zéros déjà trouvés). Nous trouvons le $5/2$ qui est plus grand. Nous permutons donc les deux dernières lignes :

$$(A|b)^{(1')} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & 5/2 & 12 & 17 \\ 0 & -1/2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \tag{32.312}$$

où le pivot est maintenant $l_{32} = -1/5$. La matrice suivante :

$$(A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & 5/2 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix} \tag{32.313}$$

Dans ce cas, la matrice $L$ n'est pas aussi simple à construire parce que nous avons permuté des choses. Dans ce cas, la matrice $L$ est encore de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.314}$$

Mais vu que nous avons permuté les lignes 2 et 3 au deuxième pas, nous devons permuter $l_{21}$ et $l_{31}$ avant de remplir la matrice $L$ avec les multiplicateurs :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.315}$$

Notons que ces $L$ et $U$ ne sont pas les mêmes que le $LU$ obtenu sans pivot. Où est l'unicité ? Elle est que en fait maintenant nous n'avons pas $A = LU$, mais

$$PA = LU \tag{32.316}$$

où $P$ est une matrice de permutation.

### 32.18.2 Le théorème

**Proposition 32.127** (Méthode de Gauss avec pivot partiel[337])**.**
*Soit une matrice inversible $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Il existe*

- *une matrice de permutation $P$*
- *une matrice triangulaire inférieure de diagonale unitaire $L$,*
- *une matrice triangulaire supérieure inversible $U$*

*telles que*

$$PA = LU. \tag{32.317}$$

Notons que cette proposition ne demande que l'hypothèse d'inversibilité pour $A$. Il n'y a pas d'hypothèses sur tous les mineurs comme c'était le cas avec Gauss sans pivot.

*Démonstration.* Nous prouvons par récurrence qu'il existe des matrices $Q_k$, $E_1$, ..., $E_k$ et $A_k$ telles que

$$Q_k A = E_1 \dots E_k A_k \tag{32.318}$$

avec

(1) $Q_k$ est une matrice de permutation

(2) $E_i$ est une transformation gaussienne sur la $i^{\text{e}}$colonne

(3) $A_k$ est triangulaire supérieure jusqu'à la $k^{\text{e}}$colonne.

Sachant que $\det(Q_k) = \pm 1$, et que $\det(E_i) = 1$, le passage au déterminant dans (32.318) nous donne $\det(A_k) \neq 0$ et si nous notons $\Omega_k(A)$ la matrice tronquée de $A$, ne gardant que les entrées plus grandes que $k$, nous avons

$$\det(A_k) = \prod_{i=1}^{k} (A_k)_i i \det\big(\Omega_{k+1}(A_k)\big). \tag{32.319}$$

Donc : $(A_k)_{ii} \neq 0$ pour $i \leqslant k$ et $\det\big(\Omega_{k+1}(A_k)\big) \neq 0$.

Pour fixer les idées, voici une image de $k = 2$ :

$$\begin{array}{c} \overbrace{\phantom{**}}^{\Delta_k(A_2)} \\ \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{*} & \boxed{*} & * & * & * \\ \boxed{0} & \boxed{*} & * & * & * \\ 0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$\boxed{\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array}}$}} \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right) \\ \underbrace{\phantom{*****}}_{\Omega_{k+1}(A_2)} \end{array} \tag{32.320}$$

Étant donné que $\det\big(\Omega_{k+1}(A_k)\big) \neq 0$, parmi les nombres $(A_k)_{i,k+1}$ $(i \geqslant k+1)$, au moins un est non nul et nous posons $r_{k+1}$ tel que $|(A_k)_{r_{k+1},k+1}|$ soit maximum parmi ces éléments.

Le nombre $r_{k+1}$ est enregistré parce qu'il servira à écrire la matrice $P$ plus tard. Les matrices $E_i$ ne sont pas enregistrées, parce que nous verrons qu'elles vont encore changer. Seule la dernière sera enregistrée.

La composante $(k+1, k+1)$ de la matrice

$$P_{r_{k+1},k+1} A_k \tag{32.321}$$

est non nulle et peut donc servir de pivot. Soit $M_{k+1}$ la transformation gaussienne pour la $(k+1)^{\text{e}}$colonne de la matrice $P_{r_{k+1},k+1}A_k$. La matrice

$$A_{k+1} = M_{k+1} P_{r_{k+1},k+1} A_k \tag{32.322}$$

est alors une matrice triangulaire supérieure jusqu'à la $(k+1)^{\text{e}}$colonne. En posant $E_{k+1} = M_{k+1}^{-1}$ nous avons

$$P_{r_{k+1},k+1} E_{k+1} A_{k+1} = A_k, \tag{32.323}$$

et nous nous sentons en droit de récrire l'équation de départ (32.318) :

$$Q_k A = E_1 \dots E_k A_k = E_1 \dots E_k P_{r_{k+1},k+1} E_{k+1} A_{k+1}. \tag{32.324}$$

Le lemme 32.126 nous permet de ramener la matrice $P_{r_{k+1},k+1}$ en première position, quitte à modifier un peu (pas beaucoup) chacune des matrices $E_i$ $(i = 1, \dots, k)$. C'est pour cela que nous n'enregistrons pas les matrices $E_i$. Nous avons donc

$$P_{r_{k+1},k+1} Q_k A = E_1' \dots E_k' E_{k+1} A_{k+1} \tag{32.325}$$

où

— Le produit $P_{r_{k+1},k+1}Q_k$ est encore une matrice de permutation, et mieux : elle vaut

$$\prod_{i=1}^{k+1} P_{r_i,i}. \tag{32.326}$$

Cela montre qu'il est suffisant d'enregistrer les nombres $r_i$ pour reconstituer cette partie.
— La matrice $E_i'$ est une transformation gaussienne pour la $i^{\text{e}}$colonne.
— La matrice $A_{k+1}$ est triangulaire supérieure jusqu'à la $k+1^{\text{e}}$colonne.

La récurrence est maintenant finie et nous pouvons écrire avec $k = n$ :

$$Q_nA = E_1 \dots E_nA_n \tag{32.327}$$

où le produit $E_1 \dots E_n$ est triangulaire inférieure et $A_n$ est triangulaire supérieur.

Maintenant nous enregistrons la matrice $U = A_n$, le produit $L = \prod_{i=1}^{n} E_n$ et les nombres $r_i$ qui permettent de retrouver $P$. □

Note : dans l'équation (32.327) nous avons bien entendu massivement renommé les $E_i'$ en $E_i$. En réalité la matrice $E_1$ vient avec $n$ primes sur la tête.

Dans les exemples 32.130, 32.131 et 32.132, nous allons résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{32.328}$$

d'abord de façon exacte, et ensuite en supposant une machin ne tenant que 8 chiffres significatifs en utilisant la méthode de Gauss avec ou sans pivot.

Commençons par voir comment se passe en pratique la décomposition $PA = LU$ de Gauss avec pivot partiel.

**Exemple 32.128**

Décomposons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32.329}$$

Sur la première colonne, le plus grand nombre est 3. Nous commençons par permuter la première et la troisième ligne en utilisant la matrice de permutation $P_1 = P_{3,1}$ et nous enregistrons $r_1 = 3$. Nous avons alors la matrice

$$A_0' = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \tag{32.330}$$

En pratique ce ne nous faisons à présent pour trouver la matrice $A_1$ de (32.333), ce sont des combinaisons de lignes : $L_2 \to L_2 - 2L_1/3$ et $L_3 \to L_3 - L_1/3$. Il est cependant important de passer par la matrice gaussienne pour obtenir la matrice $L_1$.

La matrice de transformation gaussienne pour la première colonne de (32.330) est :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32.331}$$

et $L_1 = M_1^{-1}$. Le lemme 32.117 nous dit comment calculer facilement cet inverse :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32.332}$$

En suivant l'équation (32.322) nous posons $A_1 = M_1A_0'$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \end{pmatrix} \tag{32.333}$$

et nous avons

$$Q_1 A = L_1 A_1 \tag{32.334}$$

où $L_1$, $A_1$ et $r_1 = 3$ sont enregistrés. La matrice $Q_1$ peut être retrouvée en sachant $r_1$ parce que $P$ est la matrice de permutation $P_{r_1,1}$.

Nous travaillons maintenant sur la deuxième colonne de $A_1$. Le plus grand élément en valeur absolue (sur ou sous la diagonale) est $-2/3$. Nous posons $r_2 = 3$ et

$$A_1' = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \tag{32.335}$$

et la matrice gaussienne pour la deuxième colonne est

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \tag{32.336}$$

Le $-1/2$ provient du calcul $-\big((-1/3)/(-2/3)\big)$. L'inverse de cette matrice est facile :

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \tag{32.337}$$

et la matrice suivante à enregistrer est

$$A_2 = M_2 P_{3,2} A_1 = M_2 A_1' = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}. \tag{32.338}$$

Notons toutefois que pour calculer cette matrice, seul le dernier élément demande un calcul. La première colonne ne change pas (par construction), la seconde gagne un zéro en dernière ligne (la matrice $M_2$ sert à ça) et sur la dernière colonne, seule la dernière ligne est sujette à changement.

Avec la matrice $A_2$, la trigonalisation supérieure est faite. La décomposition n'est cependant pas terminée. Nous devons encore trouver la partie triangulaire inférieure. Nous en sommes à

$$Q_1 A = L_1 A_1 = L_1 P_{3,2} L_2 A \tag{32.339}$$

où $Q_1$ est la première matrice de permutation.

Utilisant le lemme 32.126, il est facile de permuter $L_1$ avec $P_{3,2}$ :

$$L_1 P_{3,2} = P_{3,2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1'} \tag{32.340}$$

Nous avons donc

$$P_{3,2} P_{3,1} A = L_1' L_2 A \tag{32.341}$$

Deux multiplications matricielles plus tard nous terminons :

$$PA = LU \tag{32.342}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}. \tag{32.343}$$

△

Notons que Sage utilise la méthode de Gauss avec pivots :

```
sage: A=matrix([ [1,2,3],[2,5,0],[3,8,0] ])
sage: A
[1 2 3]
[2 5 0]
[3 8 0]
sage: A.LU()
(
[0 1 0]  [  1   0   0]  [   3    8    0]
[0 0 1]  [1/3   1   0]  [   0 -2/3    3]
[1 0 0], [2/3 1/2   1], [   0    0 -3/2]
)
```

tex/sage/sageSnip006.sage

Mais attention : Sage crée une décomposition $A = PLU$ et non $PA = LU$. D'où le fait que la matrice de permutation de Sage est l'inverse de celle donnée ici.

### 32.18.3 D'un point de vue algorithmique

**Problèmes et choses à faire**

Je ne suis pas certain de l'optimalité de ce que je raconte ici. Je décris simplement ce que j'ai fait pour écrire mon programme finitediff.

Si vous êtes expert en calcul numérique, n'hésitez pas à donner votre avis.

Nous décrivons à présent la décomposition $A = PLU$ (du théorème 32.127, avec le $P$ à droite). En suivant l'exemple 32.128 nous voyons assez bien comment créer les matrices $U$ et $P$ au fur et à mesure. La construction de $L$ est peut-être moins évidente.

Écrivons un exemple très explicite pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \tag{32.344}$$

Nous commençons par permuter des lignes pour avoir un grand pivot :

$$P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \tag{32.345}$$

Et nous effectuons l'élimination avec la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.346}$$

Cela donne le premier résultat :

$$M_1P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & 5/2 & 12 \end{pmatrix} \tag{32.347}$$

Nous continuons avec $P_{23}$ pour avoir un nouveau grand pivot :

$$P_{23}M_1P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 5/2 & 12 \\ 0 & -1/2 & -2 \end{pmatrix}. \tag{32.348}$$

Nous utilisons la matrice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \tag{32.349}$$

et au final :

$$M_2P_{23}M_1P_{12}A=\begin{pmatrix}4&3&10\\0&5/2&12\\0&0&2/5\end{pmatrix}=U. \tag{32.350}$$

L'égalité obtenue est

$$M_2P_{23}M_1P_{12}A=U. \tag{32.351}$$

Pour avoir la décomposition $PLU$ il faut écrire

$$A=P_{12}M_1^{-1}P_{23}M_2^{-1}U, \tag{32.352}$$

et permuter $P_{23}$ avec $M_1^{-1}$, ce qui est facile par le lemme 32.126.

**Remarque 32.129.**
Nous ne devons permuter la matrice $M_k$ avec une matrice de permutation qu'à partir de la deuxième étape. En effet l'équation (32.347) revient à

$$A=M_1^{-1}P_{12}m_U \tag{32.353}$$

qui est dans le bon ordre. Ce n'est qu'à partir de la seconde étape que des matrices de permutation apparaissent à droite des matrices gaussiennes.

Cependant dans un cas $4\times 4$, cette méthode deviendrait fastidieuse parce que nous aurions encore des étapes à faire. En repartant de (32.352), mais avec $m_U$ (la matrice pas encore tout à fait triangularisée) au lieu de $U$, nous aurons, pour un certain $k>3$ :

$$M_3P_{3k}M_2P_{23}M_1P_{12}A=U, \tag{32.354}$$

ce qui fait :

$$A=P_{12}M_1^{-1}P_{23}M_2^{-1}P_{3k}M_3^{-1}U. \tag{32.355}$$

Tous les $P_{ij}$ peuvent être mis à gauche parce que leurs indices sont toujours strictement supérieurs à ceux des $M_l$ placés devant eux. Mais c'est fastidieux.

Nous allons donc permuter à chaque étape pour ne retenir que l'important. Si à une certaine étape nous avons

$$A=P_{1,r_1}\dots P_{k,r_k}M_1^{-1}\dots M_k^{-1}m_U \tag{32.356}$$

avec

$$m_U=P_{k+1,r_{k+1}}M_{k+1}^{-1}U \tag{32.357}$$

alors nous allons directement permuter $P_{k+1,r_{k+1}}$ avec tous les $M_i^{-1}$. Si nous notons $P_k$ la permutation (pas élémentaire) à l'étape $k$ et $L_k$ la matrice triangulaire inférieure à de l'étape $k$,

$$A=P_kL_km_U=P_kL_kP_{k+1,r_{k+1}}M_{k+1}^{-1}m'_U. \tag{32.358}$$

Nous enregistrons alors $P_{k+1}=P_kP_{k+1,r_{k+1}}$ et pour $L_{k+1}$ nous partons de $L_k$ et nous faisons deux opérations suivantes :

— nous permutons, sur ses colonnes non triviales, les indices $k+1$ et $r_{k+1}$,

— nous multiplions par $M_{k+1}^{-1}$, ce qui revient à simplement lui ajouter une colonne non triviale.

Notons que $r_{k+1}\geqslant k+1$, de telle sorte que sur les colonnes non triviales (qui sont jusqu'au numéro $k$), la permutation des lignes $k+1$ et $r_{k+1}$ ne change pas l'aspect de la matrice : elle reste multi-gaussienne de dernière colonne $k$.

### 32.18.4 Exemples

Nous nous lançons dans la résolution du système

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{32.359}$$

**Exemple 32.130**
Nous commençons de façon exacte, par la méthode de Gauss sans pivot. La première transformation gaussienne est

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix} \tag{32.360}$$

et nous calculons

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{-9} \end{pmatrix}. \tag{32.361}$$

Vu que cette dernière est triangulaire supérieure, nous avons fini la méthode de Gauss et $U = E_1 A$. En ce qui concerne la matrice $L$, elle est donnée par $L = E_1^{-1}$, c'est à dire

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.362}$$

Au final nous avons la décomposition $A = LU$ exacte suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 - 10^9 \end{pmatrix}. \tag{32.363}$$

Résoudre le système $Ax = b$ revient à résoudre $LUx = b$ et donc résoudre successivement les systèmes

$$\begin{cases} Ly = b & \text{(32.364a)} \\ Ux = y. & \text{(32.364b)} \end{cases}$$

D'abord le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{32.365}$$

donne $y_1 = 1$ et $y_2 = 2 - 10^9$.

Ensuite nous résolvons

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 - 10^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 10^9 \end{pmatrix}. \tag{32.366}$$

Cela donne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10^9}{1-10^9} \\ \frac{2-10^9}{1-10^9} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32.367}$$

C'est également le résultat que trouve Sage :

```
sage: var('y')
y
sage: solve(    [10**(-9)*x+y==1,x+y==2],[x,y]    )
[[x == (1000000000/999999999), y == (999999998/999999999)]]
```

tex/sage/sageSnip007.sage

△

**Exemple 32.131**([337])
Nous recommençons tout le calcul avec une précision limitée à 8 chiffres significatifs, sans pivot.

Nous avons à nouveau la transformation gaussienne

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix}, \tag{32.368}$$

mais pour calculer $U$ nous effectuons le produit matriciel

$$U = E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix}. \tag{32.369}$$

Nous détaillons à présent le calcul de l'élément noté $*$. Le calcul de $10^9 \ominus 1)$ donne

$$999999999 = 9.99999999 \times 10^8, \tag{32.370}$$

mais la précision étant limitée à 8 chiffres, un arrondit arrive. Étant donné que le premier chiffres supprimé est un 9 nous retombons sur $10^9$, et donc notre machine à précision limitée donnera

$$U = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & -10^9 \end{pmatrix}. \tag{32.371}$$

Ensuite le calcul de $L = E_1^{-1}$ ne cause pas de problèmes :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.372}$$

Maintenant il s'agit de résoudre les systèmes $Ly = b$ et $Ux = y$. Du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{32.373}$$

nous tirons tout de suite $y_1 = 1$ et ensuite $10^9 + y_2 = 2$, c'est à dire $y_2 = 2 - 10^9$, qui en précision limitée donne encore $y_2 = -10^9$. À résoudre maintenant :

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & -10^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^9 \end{pmatrix}. \tag{32.374}$$

Cela donne immédiatement $x_2 = 1$ et ensuite

$$10^{-9} x_1 + 1 = 1, \tag{32.375}$$

donc $x_1 = 0$. La solution trouvée est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{32.376}$$

qui est complètement faux au niveau de la première variable. △

**Exemple 32.132**([337])
Nous résolvons encore le même système en précision limitée, mais en utilisant cette fois la méthode de Gauss avec pivot partiel.

Le plus grand élément de la première colonne est 1 ; nous utilisons donc la permutation $P_{1,2}$ :

$$P_{1,2} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.377}$$

La matrice de transformation gaussienne pour la première colonne de cette matrice est

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-9} & 1 \end{pmatrix} \tag{32.378}$$

et nous posons

$$A_1 = M_1 P_{1,2} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -10^{-9} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U \tag{32.379}$$

où un arrondi a eu lieu pour $-10^{-9} + 1 = 1$. En inversant $M_1$ nous avons

$$L_1 = M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.380}$$

La décomposition est

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \tag{32.381}$$

Le moment de résoudre est venu. Vu que $PLUx = b$ nous devons résoudre les systèmes

$$\begin{cases} Pz = b & \text{(32.382a)} \\ Ly = z & \text{(32.382b)} \\ Ux = y. & \text{(32.382c)} \end{cases}$$

Pour $z$ c'est facile :

$$z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32.383}$$

Pour $y$ il y a un arrondi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32.384}$$

Tout de suite : $y_1 = 2$ et ensuite $2 \times 10^{-9} + y_2 = 1$, ce qui donne $y_2 = 1 \ominus 2 \times 10^{-9} = 1$. Donc

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32.385}$$

Et enfin pour $x$ c'est le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32.386}$$

Nous avons $x_2 = 1$ et ensuite $x_1 + 1 = 2$ c'est à dire $x_1 = 1$. Au final la solution trouvée est

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32.387}$$

Cette solution est considérablement meilleure que (32.376). △

**32.133.**
L'utilisation du pivot non seulement assure le fait que la trigonalisation va bien se passer (on évite les zéros en pivot), mais aussi et surtout, en choisissant de prendre le plus grand pivot possible, nous obtenons une meilleur stabilité numérique.

## 32.19 Résolution de systèmes linéaires (suite)

### 32.19.1 Déterminant

Pour calculer un déterminant lorsque nous avons la décomposition $A = LU$ nous pouvons faire

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U) \tag{32.388}$$

parce que $L$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale.

Si par contre nous avons fait des pivots, nous avons $PA = LU$. Il nous faut le déterminant de $P$, qui n'est autre que $\pm 1$. Nous avons

$$\det(P) = (-1)^s \tag{32.389}$$

où $s$ est le nombre de permutations effectives effectuées. Nous précisons «effectives» parce qu'il ne faut pas compter le pas où nous n'avons pas permuté (les cas où le bon pivot était présent du premier coup). Nous avons alors

$$\det(A) = (-1)^s \det(U). \tag{32.390}$$

### 32.19.2 Plusieurs termes indépendants

Mettons un système $Ax = b$ qu'il faut résoudre pour plusieurs $b$ différents. C'est typiquement le cas où l'on voudrait calculer l'inverse de $A$. Mais on va directement se calmer. Soient donc à résoudre $Ax_1 = b_1$, …, $Ax_n = b_n$.

Les opérations (avec ou sans pivot) que nous faisons ne dépendent que de la matrice $A$, mais aucune décisions concernant les pivots ou la matrice des multiplicateurs ne dépend de $b$. Autre façon de dire : si le système $(A|b_1)$ devient $(U|y_1)$, le système $(A|b_i)$ devient $(U|y_i)$ avec le même $U$.

Nous ne sommes donc pas obligés de faire tout le travail autant de fois qu'il n'y a de systèmes à résoudre. Donc si on a plusieurs systèmes à résoudre avec la même matrice, on fait mieux de retenir une fois pour toute la décomposition $LU$ (avec ou sans pivots), avant de vraiment résoudre.

Ou alors on peut aussi faire que, au lieu de faire $(A|b_i)$ plein de fois, faire une seule fois

$$(A|b_1 \dots b_n). \tag{32.391}$$

Et on fait tout le travail sur tous les vecteurs d'un en même temps.

Soit $e_i$ la base canonique. Si nous notons $x_n$ les solutions des problèmes $Ax_i = e_i$, tous les problèmes $Ax_i = e_i$ s'écrivent d'un seul coup

$$AX = Y \tag{32.392}$$

où $X$ est la matrice des $x_i$ en colonnes, et $Y$ est celle des $e_i$ en colonnes. Oh, mais $Y = \mathbb{1}$ évidemment. Donc

$$AX = \mathbb{1}. \tag{32.393}$$

Si nous supposons que $A$ est inversible, alors ce $X$ est l'inverse.

Donc pour calculer l'inverse d'une matrice de dimension non trop grande, il suffit d'utiliser la méthode de Gauss sur les vecteurs de la base canonique. Cette idée est la base du calcul de l'inverse par matrice companion. En effet, si nous partons du problème

$$(A|\mathbb{1}) \tag{32.394}$$

et nous appliquons la méthode de Gauss avec pivot, nous arrivons à

$$(U|L^{-1}P). \tag{32.395}$$

Attention : le produit $L^{-1}P$ est une permutation des *colonnes* de $L^{-1}$. Vu que $L$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, $L^{-1}$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale.

Donc si la matrice n'est pas trop grande, on peut assez facilement remettre les colonnes de $L^{-1}P$ dans l'ordre pour recomposer une matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale.

Une autre façon de calculer l'inverse, si $A = LU$ est connue, il suffit de faire

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}. \tag{32.396}$$

Et il existe un algorithme facile pour l'inverse d'une matrice triangulaire.

### 32.19.3 Cholesky

Le commandant Cholesky travaillait sur le tir de canon (chose éminemment liée à de nombreuses mathématiques ingénieuses). La méthode de Cholesky est encore utilisée aujourd'hui dans les vrais problèmes.

La méthode de Gauss s'applique sans hypothèses sur la matrice $A$, à part qu'elle doit être de petite dimension, comme pour toute méthode directe. Souvent nous savons des choses sur la matrice. Ici nous allons supposer que $A$ est symétrique et définie positive.

Comment numériquement vérifier ces hypothèses ? En ce qui concerne la symétrique, il suffit de faire le test complet :

$$A^t = A. \tag{32.397}$$

La vérification de cela coûte au maximum $n^2$ comparaisons (et en fait la moitié de ça moins la diagonale).

Le fait que $A$ soit définie positive est facile à vérifier pour utiliser Cholesky parce que il suffit de le faire, et s'il n'y a pas de nombres complexes qui arrivent, c'est que la matrice était définie positive.

Un lemme très simple à mettre en oeuvre numériquement nous permet de traiter certains cas.

**Lemme 32.134.**
*Une matrice symétrique possédant un élément négatif sur la diagonale n'est pas définie positive.*

*Démonstration.* Un simple calcul ou effort d'imagination montre que $\langle Me_k, e_k\rangle = M_{kk}$. Donc si $M$ doit être définie positive, $M_{kk}$ doit être positive par le lemme 9.170. □

Ce lemme est un moyen déjà de faire quelque vérifications. Et si les éléments diagonaux de $A$ sont tous négatifs, on peut prendre $-A$.

**Lemme 32.135.**
*Si $A$ est une matrice symétrique strictement définie positive, alors pour tout $k$, la matrice tronquée $\Delta_k(A)$ l'est également.*

*Démonstration.* Le fait que $\Delta_k(A)$ soit symétrique est évidement. Le fait qu'elle soit définie positive l'est moins. Soit $y \in \mathbb{R}^k$ et le vecteur $\tau y \in \mathbb{R}^n$, qui est «complété» avec des zéros.

Nous avons $\langle \Delta_k(A)y, y\rangle_k = \langle A\tau y, \tau\rangle_n$. En effet

$$\langle \Delta_k(A)y, y\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} A_{il}y_l y_i. \tag{32.398}$$

Et à droite :

$$\langle A\tau y, \tau y\rangle = \sum_{i=1}^{n}(A\tau y)_i(\tau y)_i = \sum_{i=1}^{k}(A\tau y)_i y_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{n} A_{il}(\tau y)_l y_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} A_{il}y_l y_i \tag{32.399}$$

où nous avons utilisé le fait que $(\tau y)_i = 0$ dès que $i > k$ et que $(\tau y)_i = y_i$ sinon.

En conséquence de quoi $\langle \Delta_k(A)y, u\rangle > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^k$ et la matrice $\Delta_k(A)$ est strictement définie positive. □

**Lemme 32.136.**
*Si $T$ est une matrice triangulaire, alors $(T_{ii})^{-1} = (T^{-1})_{ii}$.*

*Démonstration.* Il suffit de se rendre compte que le coefficient $ii$ de l'égalité $\mathbb{1} = TT^{-1}$ donne

$$1 = \sum_l T_{il}(T^{-1})li. \tag{32.400}$$

Dans la somme il ne reste que le terme $l = i$. □

Nous allons chercher une décomposition de type $LU$ sous la forme $A = LL^t$, c'est à dire $U = L^t$. Attention : maintenant nous n'avons plus des 1 sur la diagonale. Ce n'est donc pas exactement la décomposition $LU$ dont nous parlions plus haut. C'est pour cela que nous n'allons pas la noter $LL^t$ mais $BB^t$.

**Théorème 32.137** (Cholesky[336])**.**
*Soit une matrice réelle symétrique strictement définie positive. Il existe une unique matrice réelle $B$ telle que*

— *$B$ est triangulaire inférieure,*
— *la diagonale de $B$ est positive,*
— *$A = BB^t$.*

*Démonstration.* Par la décomposition $LU$ du théorème 32.119 nous avons des matrices $L$ et $U$ telles que $A = LU$. Soit $D$ la matrice diagonale donnée par

$$D_{ii} = \sqrt{U_{ii}}. \tag{32.401}$$

Cette définition fonctionne parce que $U_{ii} > 0$. En effet nous savons que $\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U)$, et en passant au déterminant,

$$\det\big(\Delta_k(A)\big) = \det\big(\Delta_k(U)\big). \tag{32.402}$$

Vu que $\Delta_k(A)$ est strictement définie positive par le lemme 32.135, son determinant est strictement positif[20] et nous avons

$$\det\big(\Delta_k(U)\big) > 0. \tag{32.403}$$

En appliquant cela à $k = 1$ nous avons $U_{11} > 0$ puis de proche en proche, $U_i i > 0$ pour tout $i$.

Nous posons :

$$B = LD \qquad \text{qui est triangulaire inférieure} \tag{32.404a}$$
$$C = D^{-1}U \qquad \text{qui est triangulaire supérieure.} \tag{32.404b}$$

Nous avons bien entendu $A = BC$ et nous allons prouver que $C = B^t$. Vu que $A = A^t$ nous pouvons identifier $BC$ et $C^tB^t$ :

$$BC = C^tB^t. \tag{32.405}$$

En mettant les matrices triangulaires supérieures à gauche et inférieures à droite :

$$C(B^t)^{-1} = B^{-1}C^t, \tag{32.406}$$

qui sont donc deux matrices diagonales. Nous montrons que cette diagonale est en réalité l'identité.

D'abord

$$B_{ii} = \sum_{l=1}^{n} L_{il}D_{li} = L_{ii}\sqrt{U_{ii}} = \sqrt{U_{ii}} \tag{32.407}$$

parce que $L_{ii} = 1$. Notons en passant que la diagonale de $B$ est positive. Ensuite

$$C_{ii} = \sum_{l=1}^{n}(D^{-1})_{il}U_{li} = (D^{-1})_{ii}U_{ii} = \frac{1}{\sqrt{U_i i}}U_{ii} = \sqrt{U_{ii}}. \tag{32.408}$$

20. Le théorème 9.165 donne une diagonalisation par des matrices de déterminant 1. Vu que les valeurs propres forment sur la diagonale, et qu'elles sont toutes positives, el déterminant est positif.

Donc $B$ et $C$ ont des diagonales égales. Calculons alors la diagonale de $B^{-1}C^t$ :

$$\left(B^{-1}C^t\right)_{ii} = \sum_l (B^{-1})_{il}(C^t)_{li} = (B^{-1})_{ii}C_{ii} \tag{32.409}$$

parce que encore une fois, de la somme il ne reste que le terme $l = i$.

Mais $B$ est une matrice triangulaire qui tombe sous le coup du lemme 32.136. Donc $(B^{-1})_{ii} = (B_{ii})^{-1} = (C_{ii})^{-1}$. Nous avons alors

$$(B^{-1}C^t)_{ii} = 1. \tag{32.410}$$

Cela conclu l'existence de la décomposition de Cholesky.

En ce qui concerne l'unicité, soient $A = BB^t = CC^t$. Nous regroupons les supérieures et les inférieures :

$$B^t(C^t)^{-1} = B^{-1}C. \tag{32.411}$$

Ces deux matrices sont donc diagonales et nous posons $D = B^{-1}C$, c'est à dire $C = BD$. Nous remplaçons donc $C$ par $BD$ dans (32.411) :

$$A = BB^t = BD(BD)^t = BDD^tB^t. \tag{32.412}$$

Donc $DD^t = \mathbb{1}$, ce qui signifie que les éléments diagonaux de $D$ sont $\pm 1$. Nous montrons qu'ils sont positifs : à partir de $C = BD$ nous déballons

$$C_{ii} = \sum_l B_{il}D_{li}, \tag{32.413}$$

et donc

$$B_{ii}D_{ii} = C_{ii}. \tag{32.414}$$

En sachant que les conditions de la décomposition de Cholesky demandent les éléments diagonaux positifs nous en déduisons que $D_{ii}$ est positif et donc égal à 1. Finalement $D = \mathbb{1}$ et $B = C$. □

Prenons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & -7 \\ -2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \tag{32.415}$$

Elle est symétrique et définie positive. Nous posons

$$\{ \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}} l_{i1} = a_{i1}/l_{11} \tag{32.416a}$$

pour $i = 2, \ldots, n$. Et aussi

$$\begin{cases} l_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{1/2} & (32.417a) \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk})/a_{jj} & (32.417b) \end{cases}$$

pour $i = j + 1, \ldots, n$.

Les formules (32.416) nous disent comment remplir la première colonne. Cela donne la matrice

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{4} = 2 & . & . \\ 2/2 = 1 & . & . \\ -2/2 = -1 & . & . \end{pmatrix} \tag{32.418}$$

Les formules (32.417) donnent les autres colonnes en fonction des précédentes.

Dans Sage :

```
sage: A=matrix(  [  [4,2,-2],[2,10,-7],[-2,-7,9]  ]   )
sage: A
[ 4  2 -2]
[ 2 10 -7]
[-2 -7  9]
sage: A.cholesky()
[ 2  0  0]
[ 1  3  0]
[-1 -2  2]
```

tex/sage/sageSnip005.sage

## 32.20 Système linéaire (méthodes itératives)

Nous trouvons des méthodes itératives lorsque les matrices sont grandes, ce qui arrive lorsque l'on discrétise une équation différentielle.

Nous allons chercher des méthodes de la forme $x_{n+1} = Bx_n + q$ ; ce sont des méthodes stationnaires. La convergence d'une méthode est toujours liée à la matrice $B$ et en général, la convergence ne dépend pas du choix du vecteur initial. Nous faisons donc souvent $x_0 = 0$ et donc $x_1 = q$. Voila donc une itération de faite gratuitement.

Nous notons $e_k$ le **vecteur d'erreur** qui est définit par $e_k = x - x_k$. Et le **vecteur résidu** $r_k = b - Ax_k$. Attention : ici $k$ n'est pas un indice mais un numéro de vecteur.

Notons que si $x$ est solution, alors $b - Ax = 0$, ce qui motive le vecteur résidu.

Les conditions d'arrêt d'un algorithme seraient

$$\begin{cases} \|e_k\|_\infty \ll \epsilon_1 & (32.419a) \\ \|r_k\|_\infty < \epsilon_2 & (32.419b) \end{cases}$$

où $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ sont des précisions décidées à l'avance par l'utilisateur.

**Proposition 32.138.**
*Si $A$ est une matrice inversible, alors*

$$\lim_{k\to\infty} e_k = \lim_{k\to\infty} r_k = 0. \tag{32.420}$$

Vu que $r_k = Ae_k$, si la matrice $A$ est mal conditionnée, il peut arriver que $r_k$ reste grand alors que $e_k$ est déjà petit.

**Remarque 32.139.**
Dans les méthode stationnaires, nous avons $x_{n+1} = Bx_n + q$ avec $B$ et $q$ fixés au départ de l'algorithme. Il existe des méthodes non stationnaires pour lesquelles l'itération prend la forme $x_{n+1} = B_n x_n + q_n$ avec $B_n$ et $q_n$ qui changement avec les étapes.

**Proposition 32.140.**
*Pour la méthode $x_{n+1} = Bx_n + q$ nous avons équivalence de*

*(1) La méthode converge pour tout $x_0$*

*(2) $B$ est une matrice convergente*[21]

*(3) $\rho(B) < 1$ (rayon spectral).*

*De plus si $\|B\| < 1$ alors la méthode converge (quelle que soit la norme algébrique).*

La norme d'une matrice (en tout cas, certaines normes) est quelque chose de facile à calculer à l'ordinateur. Typiquement $\|.\|_\infty$ est un simple maximum. Cependant si après avoir calculé $\|B\|_i$ pour des dizaines de normes $i$ différentes, nous avons toujours $\|B\|_i \geqslant 1$, alors nous ne pouvons rien conclure.

21. C'est à dire $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$.

### 32.20.1 La méthode générale

Nous décomposons la matrice $A$ sous la forme $A = M - N$ avec $M$ inversible. Le système $Ax = b$ devient

$$Mx - Nx = b \tag{32.421}$$

puis $Mx = Nx + b$ et finalement

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b, \tag{32.422}$$

et voila une méthode stationnaire avec $B = M^{-1}N$ et $q = M^{-1}b$.

Mais ici nous voyons que $M$ doit être non seulement inversible, mais en plus doit être facilement calculable. En sachant que nous travaillons avec des grandes matrices, il n'est pas question d'inverser $M$ avec une méthode de Gauss.

En bref, il faut choisir $M$ triangulaire parce que c'est en gros la seule que nous pouvons inverser facilement [22].

**Remarque 32.141.**
La matrice $B$ ne doit pas spécialement être inversible. Si elle ne l'est pas, ce n'est pas un problème.

### 32.20.2 Jacobi

Nous décomposons

$$A = D - E - F \tag{32.423}$$

où $D$ est la diagonale de $A$, $-F$ est la partie triangulaire supérieure (sans la diagonale) et $-E$ la triangulaire inférieure (sans la diagonale). Donc $D$, $E$ et $F$ sont simplement des extraction de parties de la matrice $A$ (et quelque changements de signes).

La méthode de Jacobi prend $M = D$ et $N = (E + F)$. L'inverse de $M$ est facile à calculer parce que $M$ est diagonale. Nous notons $B_J$ la matrice $B$ de la méthode de Jacobi.

**Remarque 32.142.**
Il se peut que la matrice $A$ ait des zéros sur la diagonale, même si elle est inversible. Et cela est un problème parce qu'alors la matrice $D$ ici construite n'est pas inversible. Dans ce cas, avant de nous lancer dans la méthode de Jacobi, il faut permuter deux lignes de $A$ et donc de $b$.

Attention cependant que l'on pourrait vouloir effectuer ces permutations en mettant sur la diagonale des nombres les plus grands possibles (parce qu'ensuite, ce qui rentre dans les calculs, c'est $D^{-1}$ qui aura alors des petits nombres). Mais il faut toutefois faire en sorte que le rayon spectral de la matrice $B$ résultante reste plus petit que 1.

Chaque changement dans $A$ induit des changements dans $B$ et donc sur la convergence de la méthode.

### 32.20.3 Gauss-Seidel

Nous partons de la même décomposition $A = D - E - F$ que dans (32.423). La méthode de Gauss-Seidel prend $M = (D - E)$ et $N = F$.

### 32.20.4 Autres

Voir la méthode des gradients, et des gradients conjugués.

## 32.21 Indices connectés, matrice irréductible

**Définition 32.143.**
*Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nous disons que les indices $i$ et $j$ sont* ***directement connectés*** *si $A_{ij} \neq 0$ ou $A_{ji} \neq 0$.*

22. Les matrices orthogonales sont aussi facilement inversibles, mais ne se prêtent pas bien à une décomposition de type somme.

**Définition 32.144.**
*Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nous disons que les indices $i$ et $j$ sont **connectés** si il existe un ensemble d'indices $i_0 = i, i_1, \dots, i_{r-1}, i_r = j$ tels que $A_{i_k, i_{k+1}} \neq 0$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant r$.*

Par exemple pour que les indices 1 et 4 soient connectés, on peut avoir les éléments $A_{13}$, $A_{32}$ $A_{24}$ non nuls.

**Définition 32.145** ([338])**.**
*Une matrice carré $A$ est **réductible** si il existe une permutation $\sigma$ telle que*

$$\sigma^t A \sigma = \begin{pmatrix} K & L \\ 0 & M \end{pmatrix} \tag{32.424}$$

*où $K$ et $M$ sont carrées.*

Notons que par définition de la matrice d'une application linéaire,

$$B_{ij} = \langle e_i, Be_j \rangle = \langle e_i, \sigma^t A \sigma e_j \rangle = \langle \sigma e_i, A \sigma e_j \rangle = A_{\sigma(i), \sigma(j)}. \tag{32.425}$$

**Proposition 32.146** ([338])**.**
*Soit une matrice carré $A$. Les faits suivants sont équivalents :*

*(1) $A$ est réductible.*
*(2) Il existe une partition non triviale $I, J$ de $\{1, \dots, n\}$ telle que $I \cup J = \{1, \dots, n\}$, $I \cap J = \varnothing$ et pour tout $i \in I$, et pour tout $j \in J$, $A_{ij} = 0$.*
*(3) La matrice $A$ admet des indices non connectés (définition 32.144).*

*Démonstration.* Dans plusieurs sens...

**(1) implique (2)** Nous notons $j^*$ la taille de la matrice $K$ dans (32.424). Nous avons $B_{ij} = 0$ si

$$\begin{cases} J^* + 1 \leqslant i \leqslant n & \text{(32.426a)} \\ 1 \leqslant j \leqslant j^*. & \text{(32.426b)} \end{cases}$$

Donc en posant $I = \sigma\{j^* + 1, \dots, n\}$ et $J = \sigma\{1, \dots, j^*\}$ nous avons une partition non triviale de $\{1, \dots, n\}$ telle que si $i \in I$ et $j \in J$ alors $i = \sigma(i_0)$, $j = \sigma(j_0)$ et

$$A_{ij} = A_{\sigma(i_0), \sigma(j_0)} = B_{i_0, j_0} = 0. \tag{32.427}$$

**(2) implique (1)** Soit une partition $I, J$ comme indiquée dans l'hypothèse. Soit $j^*$ le nombre d'éléments dans $J$. Soit $\sigma$ une permutation de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\sigma\{j^* + 1, \dots, n\} = I$ et $\sigma\{1, \dots, j^*\} = J$. Nous posons ensuite $B = \sigma^t A \sigma$. Par construction si $i \in I$ et $j \in J$ alors $A_{ij} = 0$.
Mais si

$$\begin{cases} J^* + 1 \leqslant i \leqslant n & \text{(32.428a)} \\ 1 \leqslant j \leqslant j^*. & \text{(32.428b)} \end{cases}$$

alors $B_{ij} = A_{\sigma(i)\sigma(j)} = 0$. Donc $B$ a la bonne forme.

**(3) implique (2)** Soient $i$ et $j$ deux indices non connectés : il n'existe pas de chaînes partant de $i$ et arrivant à $j$. Nous notons $I$ l'ensemble des indices connectés à $i$, et $J$ les autres. Pat hypothèses ces ensembles sont non vides.
Si $k \in i$ et $l \in J$ alors $A_{kl} = 0$ parce que sinon on aurait une chaine de $i$ à $k$ puis de $k$ à $l$ et donc de $i$ à $l$, ce qui signifierait que $l$ est connecté à $i$.

**(2) implique (3)** Soit une partition $I, J$ comme dans l'hypothèse. Si $j \in J$ est connecté à $i \in I$ alors il existe une chaîne

$$i = i_0, i_1, \dots, i_r = j. \tag{32.429}$$

Si $i_s$ est le premier dans $J$ alors $i_{s-1} \in I$ et $A_{i_{s-1}, i_s} = 0$, ce qui empêche la chaîne de connecter $j$ à $i$.

□

## 32.22 Localisation des valeurs propres

Sur l'ensemble $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ des matrices $n\times n$ à coefficients réels nous introduisons l'ordre partiel [23] donné par $A\geqslant B$ lorsque $A_{ij}\geqslant B_{ij}$ pour tout $i$ et $j$. Nous définissons de façon similaire les relations $A\leqslant B$, $A<B$ et $A>B$.

Si $x\in\mathbb{R}^n$ nous notons $|x|=\big(|x_1|,\dots,|x_n|\big)$ et $x\leqslant y$ lorsque $x_i\leqslant y_i$ pour tout $i$.

**Proposition 32.147.**
*Soit $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et $x,y\in\mathbb{R}^n$.*

*(1) Si $A\geqslant 0$ et si $x\leqslant y$ alors $Ax\leqslant Ay$.*

*(2) Si $A\geqslant 0$ alors $Ax\leqslant|Ax|\leqslant A|x|$.*

*Démonstration.* Pour la première inégalité, pour tout $i$ et $k$ nous avons $A_{ik}x_k\leqslant A_{ik}y_k$ et donc

$$(Ax)_i=\sum_k A_{ik}x_k\leqslant\sum_k A_{ik}y_k=(Ay)_k. \tag{32.430}$$

Pour la seconde, d'abord l'inégalité $Ax\leqslant|Ax|$ est évidente. Ensuite vu que $A_{ik}\geqslant 0$ nous avons

$$|Ax|_i=|\sum_k A_{ik}x_k|\leqslant\sum_k A_{ik}|x_k|=\big(A|x|\big)_i. \tag{32.431}$$

□

Soit une matrice $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Nous notons

$$r_i=\sum_{j\neq i}|A_{ij}|. \tag{32.432}$$

Notons la somme sur la ligne $i$, pas sur la colonne : la somme est horizontale.

**Définition 32.148.**
*Les ensembles*

$$D_i=\{z\in\mathbb{C}\text{ tel que }|z-A_{ii}|\leqslant r_i\} \tag{32.433}$$

*sont les **disques de Gershgorin**. Nous allons également noter $B_i=\mathrm{Int}(D_i)$ les boules ouvertes correspondantes.*

**Théorème 32.149** (Gershgorin)**.**
*Soit $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Si $\lambda\in\mathbb{C}$ est valeur propre de $A$ alors $\lambda\in D_i$ pour un certain $i$.*

*Démonstration.* Soit une valeur propre $\lambda$ et un de ses vecteurs propres $u\in\mathbb{R}^n$ : $Au=\lambda u$ avec $u\neq 0$. Soit $i$ un indice réalisant le maximum $|u_i|=\max\{|u_k|\}_k$. Nous écrivons la $i^{\text{e}}$ligne de $Au=\lambda u$ :

$$\sum_k A_{ik}u_k=\lambda u_i, \tag{32.434}$$

c'est à dire $A_{ii}u_i+\sum_{k\neq i}A_{ik}u_k=\lambda u_i$, ou encore

$$A_{ii}+\sum_{k\neq i}A_{ik}\frac{u_k}{u_i}=\lambda, \tag{32.435}$$

qui donne

$$|A_{ii}-\lambda|\leqslant\sum_{k\neq i}|A_{ik}|\frac{|u_k|}{|u_i|}\leqslant\sum_{k\neq i}|A_{ik}| \tag{32.436}$$

pare que $|u_i|\geqslant|u_k|$. Notons que sur la ligne précédente, $|.|$ est le module dans $\mathbb{C}$, pas la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. □

23. Définition 2.4.

**Théorème 32.150** (Gershgorin 2[338]).
*Soit une matrice irréductible $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et une valeur propre $\lambda$ de $A$. Si elle est sur la frontière de l'union des disques de Gershgorin, alors elle est sur le bord de tous les disques.*

*Démonstration.* Soit une valeur propre $\lambda$ de $A$ telle que $\lambda \in \partial\big(\bigcup_i D_i\big)$. Alors $\lambda$ n'est dans l'intérieur d'aucune boule et nous avons $|\lambda - A_{ii}| \geqslant r_i$ pour tout $i$.

Soit un vecteur propre $u$ de $A$ tel que $\|u\|_\infty = 1$. Nous posons $I = \{1 \leqslant i \leqslant n \text{ tel que } |u_i| = 1\}$ et $J = \{1 \leqslant j \leqslant n \text{ tel que } |i_j| < 1\}$. Par hypothèse $I$ n'est pas vide, et de plus $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J = \{1,\dots,n\}$ parce qu'aucune composante de $u$ n'a un module[24] plus grand que 1.

La $i^{\text{e}}$composante de la relation $Au = \lambda u$ peut s'écrire

$$(A_{ii} - \lambda)u_i + \sum_{k\neq i} A_{ik}u_k = 0. \tag{32.437}$$

Forts de cela nous écrivons les inégalités suivantes :

$$r_i \leqslant |\lambda - A_{ii}| = \big|(\lambda - A_{ii})u_i\big| = |\sum_{k\neq i} A_{ik}u_k| \leqslant \sum_{k\neq i} |A_{ik}||u_k| \leqslant \sum_{k\neq i} |A_{ik}| = r_i. \tag{32.438}$$

Donc les inégalités sont des égalités :

$$r_i = |\lambda - A_{ii}| = \big|(\lambda - A_{ii})u_i\big| = |\sum_{k\neq i} A_{ik}u_k| = \sum_{k\neq i} |A_{ik}||u_k| = \sum_{k\neq i} |A_{ik}|. \tag{32.439}$$

En particulier l'égalité $\sum_{k\neq i} |A_{ik}||u_k| = \sum_{k\neq i} |A_{ik}|$ donne

$$\sum_{k\neq i} |A_{ik}|\big(|u_k| - 1\big) = 0. \tag{32.440}$$

Donc pour tout $k \in J$ nous avons $A_{ik} = 0$. Vu que $A$ est irréductible, cela donnerait une partition impossible $\{1,\dots,n\} = I \cup J$. Nous en déduisons que $J$ est vide et donc que $|u_j| = 1$ pour tout $j$. En repartant de (32.439) nous avons alors

$$r_i = \big|(\lambda - A_{ii})u_i\big| = |\lambda - A_{ii}||u_i| = |\lambda - A_{ii}|. \tag{32.441}$$

Cela prouve que $\lambda \in \partial D_i$ pour tout $i$. □

**Exemple 32.151**

Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{32.442}$$

D'abord nous rappelons que si vous voulez entrer cette matrice dans Sage (ou plus généralement dans Python2[25]), vous devez faire attention au 1/2 qui, tel quel, est évalué à 0. Nous vous rappelons donc que tous vos codes Sage doivent commencer par ceci :

```
1 # -*- coding: utf8 -*-
2 from __future__ import unicode_literals
3 from __future__ import division
```

tex/sage/sageSnip015.sage

24. Les composantes de $u$ sont a priori dans $\mathbb{C}$, et non spécialement dans $\mathbb{R}$, même si $A$ est une matrice réelle.
25. Que vous n'avez aucune raison d'utiliser autre que Sage.

Les éléments non nuls hors diagonale sont $B_{13}$, $B_{31}$ et $B_{23}$. Elle n'est donc pas irréductible ; nous avons par exemple la partition $I = \{1, 3\}$, $J = \{2\}$ pour le critère de la proposition 32.146(2).

Les disques de Gershgorin sont

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - 2| \leqslant 1\} \tag{32.443a}$$
$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - 1| \leqslant 1/2\} \tag{32.443b}$$
$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - 3| \leqslant 1\} \tag{32.443c}$$

Les valeurs propres de la matrice sont sur des bords de disques de Gershgorin, sans être sur tous les bords, comme ça aurait été le cas par le théorème 32.150 si la matrice avait été irréductible. Elles sont sur la figure 32.1 ; notez en particulier les valeurs propres $\lambda_2$ et $\lambda_3$ qui sont sur le bord de deux disques mais pas sur le bord des trois disques en même temps.

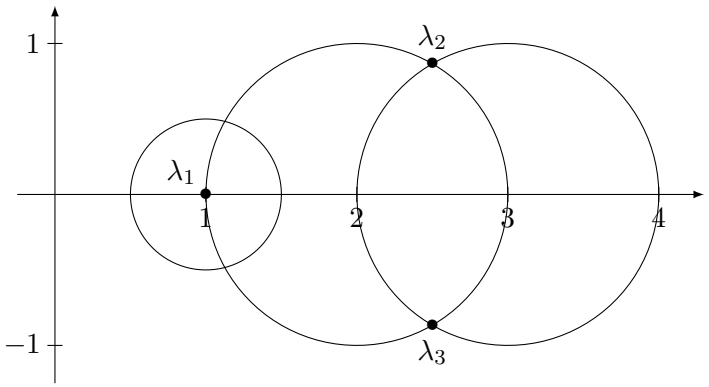



FIGURE 32.1 – Les disques de Gershgorin et les valeurs propres pour l'exemple 32.151.

△

**Exemple 32.152**

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{32.444}$$

Nous avons

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leqslant 1\}, \tag{32.445a}$$
$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - 1| \leqslant 2\}, \tag{32.445b}$$
$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - 2| \leqslant 3\}, \tag{32.445c}$$

Le polynôme caractéristique est

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 6. \tag{32.446}$$

Une fois remarqué que $\lambda_1 = -1$ est une racine, les autres sont faciles à trouver (division euclidienne de $\chi(\lambda)$ par $\lambda + 1$) : $\lambda_2 = 2 + i\sqrt{2}$ et $\lambda_3 = 2 - i\sqrt{2}$.

La matrice $A$ est irréductible. En effet les éléments non diagonaux non nuls sont $A_{12}$, $A_{23}$ et $A_{31}$. Ils peuvent former une chaîne reliant tous les indices entre eux.

Les contraintes sur la localisation des valeurs propres est donc qu'elles doivent être dans ou sur les disques de Gershgorin, mais que celles qui sont sur le bord d'un disque doivent être sur le bord de tous les disques en même temps. C'est cela que nous observons sur la figure 32.2. Notez en particulier la position de la valeur propre $\lambda_1$.

△

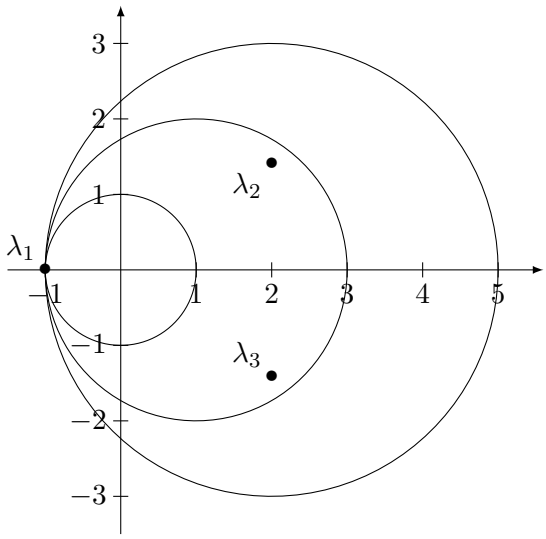



FIGURE 32.2 – Les disques de Gershgorin et les valeurs propres pour l'exemple 32.152.

### 32.22.1 Matrices à diagonale dominante

**Définition 32.153** ([339, 338])**.**
*La matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est* ***à diagonale dominante*** *si pour tout $i$,*

$$\sum_{j \neq i} |A_{ij}| \leqslant |A_{ii}| \tag{32.447}$$

*où $|.|$ est la module dans $\mathbb{C}$ ou la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.*

*Elle est* ***à diagonale fortement dominante*** *si elle est à diagonale dominante et si il existe un $i$ tel que*

$$\sum_{j \neq i} |A_{ij}| < |A_{ii}|. \tag{32.448}$$

*Elle est* ***à diagonale strictement dominante*** *si*

$$\sum_{j \neq i} |A_{ij}| < |A_{ii}| \tag{32.449}$$

*pour tout $i$ (entier entre 1 et $n$).*

Nous avons les inclusions suivantes :

$$\text{strictement dominante} \subset \text{fortement dominante} \subset \text{dominante}. \tag{32.450}$$

**Lemme 32.154.**
*Si $A$ est dans un des deux cas suivant :*
— *diagonale strictement dominante,*
— *diagonale dominante et irréductible*[26]
*alors $A_{ii} \neq 0$ pour tout $i$.*

*Démonstration.* Si $A$ est à diagonale strictement dominante, alors l'inégalité stricte (32.449) n'est pas possible.

Si $A$ est à diagonale dominante, alors si $A_{ii} = 0$, toute la ligne est nulle. Dans ce cas, la matrice ne peut pas être irréductible. □

**Proposition 32.155** ([339])**.**
*Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.*

26. Définition 32.145.

*Démonstration.* Soit une matrice $A$ à diagonale strictement dominante. Soit $x$ tel que $Ax = 0$. Le but est de montrer que $x = 0$. Soit un indice $i_0$ réalisant la norme maximum :

$$|x_{i_0}| = \|x\|_\infty. \tag{32.451}$$

Nous écrivons la composante $i_0$ de l'égalité $Ax = 0$ :

$$\sum_k A_{i_0k}x_k = 0, \tag{32.452}$$

et nous séparons le terme $k = i_0$ des autres :

$$\sum_{k\neq i_0} A_{i_0k}x_K + A_{i_0i_0}x_{i_0} = 0. \tag{32.453}$$

Nous prenons le module et majorons les sommes :

$$|A_{i_0i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{k\neq i_0} |A_{i_0k}||x_k| \leqslant \sum_{k\neq i_0} |A_{i_0k}||x_{i_0}|. \tag{32.454}$$

Si $|x_{i_0}|$ est non nul nous pouvons simplifier :

$$|A_{i_0i_0}| \leqslant \sum_{k\neq i_0} |A_{i_0k}|. \tag{32.455}$$

Hélas, l'hypothèse de diagonale strictement dominante implique l'inégalité stricte dans le sens inverse. Impossible. Nous en déduisons que $|x_{i_0}| = 0$. Donc $\|x\|_\infty = 0$, ce qui signifie que $x = 0$.

Le fait que le noyau de $A$ se réduise à $\{0\}$ implique l'inversibilité de $A$. □

**Proposition 32.156.**
*Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ une matrice qui est dans un des deux cas suivants :*

- *à diagonale strictement dominante*
- *à diagonale dominante et irréductible*

*Si $A = D - M$ où $D$ est la diagonale de $A$ (et $M$ est «le reste») alors $D$ est inversible et*

$$\rho(D^{-1}M) < 1 \tag{32.456}$$

*où $\rho$ est le rayon spectral (thème 39).*

*Démonstration.* Le lemme 32.154 nous dit que les éléments diagonaux de $A$ sont non nuls. Cela donne déjà le fait que la matrice $D$ est inversible et que la produit $D^{-1}M$ ait un sens. Nous posons $T = D^{-1}M$. Nous avons alors

$$T_{ii} = \sum_k (D^{-1})_{ik}M_{ki}. \tag{32.457}$$

Si $k = i$ alors $M_{ki} = 0$ et si $k \neq i$ alors $D_{ik} = 0$. Donc $T_{ii} = 0$ pour tout $i$.

En ce qui concerne les autres éléments de $T$,

$$T_{ij} = \sum_k (D^{-1})_{ik}M_{kj} = \sum_k \frac{1}{A_{ik}}\delta_{ik}M_{kj} = -\frac{A_{ij}}{A_{ii}}. \tag{32.458}$$

Notes :

- Les hypothèses sur $A$ jouent pour dire que $A_{ii} \neq 0$.
- Le signe moins est dû au fait que $M_{ij} = -A_{ij}$ lorsque $i \neq j$.

En faisant la somme des modules :

$$\sum_{j\neq i} |T_{ij}| = \sum_{j\neq i} \frac{|A_{ij}|}{|A_{ii}|} = \frac{1}{|A_{ii}|}\sum_{j\neq i} |A_{ij}| \leqslant 1. \tag{32.459}$$

La dernière inégalité est le fait que $A$ soit à diagonale dominante.

**Si $A$ est à diagonale strictement dominante** Alors nous avons l'inégalité stricte

$$\sum_{j\neq i}|T_{ij}|<1. \tag{32.460}$$

Et le théorème de Gershgorin 32.149 dit que le spectre de $T$ est contenu dans l'union des disques

$$D_i=\{z\in\mathbb{C}\text{ tel que }|z-T_{ii}|\leqslant r_i\} \tag{32.461}$$

où

$$r_i=\sum_{j\neq i}|T_{ij}|. \tag{32.462}$$

Mais nous avons prouvé que pour tout $i$, $T_{ii}=0$ et $\sum_{j\neq i}|T_{ij}|<1$. Donc toutes ces boules sont contenues dans $B(0,1)$. Cela prouve que $\rho(T)<1$.

**Diagonale dominante, irréductible** La matrice $T$ est alors également irréductible parce que les éléments non nuls de $A$ et de $T$ sont les mêmes : $T_{ij}=-A_{ij}/A_{ii}$. Nous utilisons alors le second théorème de Gershgorin 32.150. Si $\lambda$ est une valeur propre de $T$, alors soit

$$\lambda\in\bigcup_i B\big(0,r_i\big) \tag{32.463}$$

soit

$$\lambda\in\bigcap_i\partial B(0,r_i). \tag{32.464}$$

Vu que $r_i\leqslant 1$ pour tout $i$, dans le premier cas $\lambda$ est dans l'union des boules *ouvertes* de rayon 1. Le nombre $\lambda$ est donc une la boule ouverte de rayon 1. Bref, $|\lambda|<1$.

Dans le second cas, l'intersection de deux cercles de même centre sont soit vide soit tout le cercle (auquel cas les rayon sont égaux). Dans le second cas, ledit rayon est certainement strictement plus petit que 1 parce que

$$r_i=\sum_{j\neq i}|T_{ij}|=\sum_{j\neq i}\frac{|A_{ij}|}{|A_{ii}|}<1. \tag{32.465}$$

□

### 32.22.2 M-matrice

**Définition 32.157.**
*Une matrice $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est une **M-matrice** si*

*(1) $A_{ii}>0$ pour tout $i$,*

*(2) $A_{ij}\leqslant 0$ si $i\neq j$*

*(3) $A$ est inversible et $A^{-1}\geqslant 0$.*

**Proposition 32.158.**
*Soit $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ telle que $A_{ii}>0$ pour tout $i$ et $A_{ij}\leqslant 0$ pour tout $i\neq j$. Nous posons $A=D-M$ où $D$ est la diagonale de $A$.*

*La matrice $A$ est une M-matrice si et seulement si $\rho(D^{-1}M)<1$.*

*Démonstration.* En deux morceaux.

**Si $\rho(D^{-1}M)<1$** Nous posons encore $T=D^{-1}M$. Par le théorème 15.90, la matrice $\mathbb{1}-T$ est inversible et

$$(\mathbb{1}-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k. \tag{32.466}$$

D'autre part, via des calculs déjà faits, et les hypothèses sur les signes des éléments de $A$,

$$T_{ij} = -\frac{A_{ij}}{A_{ii}} \geqslant 0. \tag{32.467}$$

Donc tous les éléments de $T$ sont positifs (ou nuls). Par conséquent $T^k \geqslant 0$ pour tout $k$ et $(\mathbb{1} - T)^{-1}$ est positive.

Mais $A = D - M = D(\mathbb{1} - D^{-1}M) = D(\mathbb{1} - T)$. Vu que $D$ et $\mathbb{1} - T$ sont inversibles, nous savons que $A$ est inversible et

$$A^{-1} = (\mathbb{1} - A)^{-1}D^{-1}, \tag{32.468}$$

qui est un produit de matrices positives. Donc $A^{-1} \geqslant 0$.

Au final, $A$ est une M-matrice.

**Si $A$ est une M-matrice** Soit une valeur propre $\lambda$ de $T = D^{-1}M$ est un vecteur propre u : $Tu = \lambda u$. Vu que $T \geqslant 0$ nous avons d'une part $|\lambda u| = |\lambda|u|$ et d'autre part $|\lambda u| = |Tu| \leqslant T|u|$, ce qui donne

$$|\lambda||u| \leqslant T|u|. \tag{32.469}$$

Dans cette inégalité nous substituons $T$ par $\mathbb{1} - (\mathbb{1} - T)$ pour avoir

$$|\mu||u| \leqslant |u| - (\mathbb{1} - T)|u| \tag{32.470}$$

ou encore

$$(\mathbb{1} - T)|u| \leqslant \big(1 - |\lambda|\big)|u|. \tag{32.471}$$

Mais $(\mathbb{1} - T)^{-1} = A^{-1}D \geqslant 0$ parce que $A$ et $D$ sont positives. Donc en appliquant $(\mathbb{1} - T)^{-1}$ à l'inégalité (32.471), elle est conservée (proposition 32.147(2)) :

$$|u| \leqslant (\mathbb{1} - T)^{-1}\big(1 - |\lambda|\big)|u|. \tag{32.472}$$

Si $|\lambda| \geqslant 1$ alors toutes les composantes de $\big(1 - |\mathbb{1}|\big)|u|$ sont négatives et l'inégalité n'est possible qu'avec $|u| = 0$. Dans ce cas, $\lambda$ n'est pas une valeur propre (le vecteur propre soit être non nul).

Nous en déduisons que $|\lambda| < 1$ et donc que $\rho(T) = \rho(D^{-1}M) < 1$.

□

Le théorème suivant résume ce que nous avons vu en donnant une condition suffisante facile à vérifier pour être une M-matrice.

**Théorème 32.159.**
*Soit $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ telle que*

*(1)* $A_{ii} > 0$

*(2)* $A_{ij} \leqslant 0$ *pour* $i \neq j$

*(3) vérifiant une des deux conditions suivantes :*
- *à diagonale strictement dominante*
- *à diagonale dominante et irréductible.*

*Alors $A$ est une M-matrice.*

*Démonstration.* Au vu de la proposition 32.158, il suffira de montrer que $\rho(D^{-1}M) < 1$ où $D$ et $M$ sont la décomposition $A = D - M$ habituelle. C'est le cas grâce à la proposition 32.156. □

**Proposition 32.160.**
*Soit $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, une M-matrice irréductible. Alors $A^{-1} > 0$.*

*Démonstration.* Nous posons $T = D^{-1}M$. En comparant la définition 32.157 de M-matrice et la caractérisation de la proposition 32.158, nous avons $\rho(D^{-1}M) < 1$. Par conséquent

$$(\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \tag{32.473}$$

par la proposition 32.158. D'autre part, $A^{-1} = (\mathbb{1} - A)^{-1}D$ où les éléments $D$ sont strictement positifs. Donc nous devons encore prouver que $(\mathbb{1} - T)^{-1} > 0$. Nous savons que $T \geqslant 0$, et vu que

$$\big(\sum_k T^k\big)_{ij} = \sum_k (T^k)_{ij} \tag{32.474}$$

il nous suffit de prouver que pour chaque $(ij)$, un des $(T^k)_{ij}$ est strictement positif. Soient donc deux indices $i$ et $j$. Vu que $A$ est irréductible, ils sont connectés par une suite d'indice $i = i_0, i_1, \dots, , i_r = j$ tels que

$$T_{i_k,i_{k+1}} = -\frac{A_{i_k,i_{k+1}}}{A_{i_k,i_k}} > 0. \tag{32.475}$$

Or les indices $i_k$ sont choisis de telle sorte que les numérateurs soient non nuls et donc strictement négatifs. Nous avons, en général :

$$(T^k)_{ij} = \sum_{l_1,\dots,l_{r-1}} T_{i,l_1}T_{l_1,l_2}\dots T_{l_{r-1},j}. \tag{32.476}$$

Chacun des termes est positif ou nul, mais pour $k = r$, il y a entre autres le terme

$$T_{i,i_1}T_{i_1,i_2}\cdots T_{i_r,j} \neq 0. \tag{32.477}$$

Donc $(T^r)_{ij} > 0$ et $\sum_{k=0}^{\infty}(T^k)_{ij} > 0$. Et par conséquent

$$A^{-1} = (\mathbb{1} - T)^{-1}D > 0. \tag{32.478}$$

□

**Théorème 32.161.**
*Soit une M-matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{R}^n$ tel que $(Ag)_i \geqslant 1$ pour tout $i$. Alors $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$.*

*Démonstration.* Nous posons $u = (1, \dots, 1)$ et considérons $x \in \mathbb{R}^n$. Vu que $A$ est une M-matrice, nous avons $A^{-1} \geqslant 0$, donc

$$|A^{-1}x| \leqslant A^{-1}|x| \leqslant \|x\|_\infty A^{-1}u \leqslant \|x\|_\infty g. \tag{32.479}$$

Justifications :

— La première inégalité est la proposition 32.147(2).

— La seconde provient de

$$\big(B|x|\big)_i = \sum_k B_{ik}|x_k| \leqslant \sum_k B_{ik}\|x\|_\infty = \|x\|_\infty \sum_k B_{ik}u_k = \|x\|_\infty Bu. \tag{32.480}$$

— Étant donné que $A^{-1} \geqslant 0$ nous conservons l'inégalité et $Ag \geqslant u$ implique $g \geqslant A^{-1}u$ (c'est la proposition 32.147(1)).

En ce qui concerne la norme de $A^{-1}$ nous avons donc

$$\|A^{-1}\|_\infty = \sup_{|x|_\infty=1} \|A^{-1}x\|_\infty \leqslant \sup_{\|x\|_\infty=1} \|x\|_\infty\|g\|_\infty = \|g\|_\infty. \tag{32.481}$$

□

**Proposition 32.162.**
*Une matrice de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ qui*

*(1) est symétrique,*

*(2) Vérifie une des deux conditions suivantes*
- *est irréductible à diagonale fortement dominante*
- *est à diagonale strictement dominante,*

*(3) vérifie $A_{ii} > 0$ pour tout $i$*

*est strictement définie positive.*

*Démonstration.* D'après le théorème de Gershgorin 32.149, chaque valeur propre de $A$ est dans un des disques fermés

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - A_{ii}| \leqslant r_i\}. \tag{32.482}$$

Par hypothèse, les centres de ces disques sont réels et strictement positifs. Mais le fait que $A$ soit à diagonale dominante donne que le rayon de ces cercles sont plus petits que $A_{ii}$. Donc $D_i$ n'intersecte pas $]-\infty, 0[$. Mais le fait que $A$ soit symétrique implique que les valeurs propres soient réelles (théorème 9.165(1)). Cela montre que les valeurs propres de $A$ sont toutes dans $[0, \infty[$.

Si la matrice $A$ est à diagonale strictement dominante, alors les inégalités sont strictes et le théorème est prouvé.

Sinon nous somme dans le cas irréductible à diagonale fortement dominante et nous avons le théorème de Gershgorin numéro 2 32.150. Soit une valeur propre $\lambda$. Soit elle est dans un des disques ouvert (qui est inclus à $]0, \infty[$), soit elle est dans l'intersection des bords des disques. Mais au moins un des disques n'intersecte pas 0 (parce que la diagonale est strictement dominante). Dans ce cas non plus $\lambda$ ne peut pas être nul.

Nous en déduisons que dans tous les cas, les valeurs propres sont toutes réelles strictement positives. □

# Chapitre 33

# Méthodes des différences finies

## 33.1 Problèmes de dimension un

Soit une fonction $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et soit $h > 0$. Nous définissons les opérations suivantes (qui sont supposées approximer la dérivée $u'(x)$ lorsqu'elle existe).

**Définition 33.1.**
*La **différence progressive** est*

$$(D_h^+ u)(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \tag{33.1}$$

*la **différence régressive** est*

$$(D_h^- u)(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \tag{33.2}$$

*la **différence centrée** est*

$$(D_h^0 u)(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \tag{33.3}$$

Nous ne noterons pas toujours la dépendance en $h$, c'est à dire que nous noterons $D^+u$ au lieu de $D_h^+ u$ lorsque cela ne pose pas de problèmes.

Notons que $u''$ peut être approximé par $D^+D^+u$, $D^0D^+$, $D^+D^-$, et encore de nombreuses autres possibilités.

Voici un lemme qui dit que tout cela n'est pas si mal, pourvu que $u$ soit assez régulière.

**Lemme 33.2.**
*Soit un ouvert connexe $\Omega$ de $\mathbb{R}$, soit $x \in \Omega$ et $h > 0$ tel que $\overline{B(x,h)} \subset \Omega$.*

*(1) Si $u \in C^2(\Omega)$ alors*

$$|u'(x) - D^+u(x)| \leqslant \frac{h}{2}\|u''\|_{\bar{\Omega}} \tag{33.4}$$

*et*

$$|u'(x) - D^-u(x)| \leqslant \frac{h}{2}\|u''\|_{\bar{\Omega}}. \tag{33.5}$$

*(2) Si $u \in C^3(\bar{\Omega})$ alors*

$$|u'(x) - D^0(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}\|u^{(3)}\|_{\bar{\Omega}} \tag{33.6}$$

*(3) Si $u \in C^4(\bar{\Omega})$ alors*

$$|u''(x) - D^-D^+u(x)| \leqslant \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_{\bar{\Omega}}. \tag{33.7}$$

*Démonstration.* Nous prouvons le point (3). D'abord nous regardons de quoi nous avons besoin :

$$D^-D^+u(x) = \frac{(D^+u)(x) - (D^+u)(x-h)}{h} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \tag{33.8}$$

Nous allons y mettre les approximations de $u(x+h)$ et $u(x-h)$ par Taylor, proposition 12.271 :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x+\theta_1 h) \tag{33.9}$$

avec $\theta_1 \in [0,1]$. De même,

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x-\theta_2 h) \tag{33.10}$$

avec $\theta_2 \in [0,1]$.

Donc

$$u(x+h) + u(x-h) - 2u(x) = h^2u''(x) + \frac{h^4}{4!}\Big(u^{(4)}(x+\theta_1 h) + u^{(4)}(x-\theta_2 h)\Big), \tag{33.11}$$

ce qui donne

$$(D^-D^+u)(x) = u''(x) + \frac{h^2}{4!}\Big(u^{(4)}(x+\theta_1 h) + u^{(4)}(x-\theta_2 h)\Big). \tag{33.12}$$

Chacun des deux termes dans la parenthèse peut être majoré par $\|u^{(4)}\|_{\bar{\Omega}}$. Notons que c'est une majoration très sauvage parce que $x+\theta_1 h$ ne prend ses valeurs que dans $[x, x+h]$ avec $h$ supposé petit. Quoi qu'il en soit nous ne pouvons pas dire mieux que

$$|u''(x) - D^-D^+u(x)| \leqslant \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_{\bar{\Omega}}. \tag{33.13}$$

□

**Remarque 33.3** ([1])**.**
Lorsque nous écrivons

$$|u'(x) - D^+u(x)| \leqslant \delta \tag{33.14}$$

pour tout $x$, nous ne pouvons pas écrire

$$\|u' - D^+u\|_\infty \leqslant \delta \tag{33.15}$$

parce que l'inégalité (33.14) n'est valable que pour les $x$ tels que $[x-h, x+h] \subset \Omega$, de telle sorte que l'inégalité n'est pas spécialement correcte sur $\bar{\Omega}$.

### 33.1.1 Un schéma à cinq points

#### 33.1.1.1 Poser le système

Soit $\Omega = ]0,1[$ et l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f \quad \text{sur } \Omega \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases} \tag{33.16}$$

où $c$ est une fonction positive et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous considérons $h > 0$ assez petit pour que le reste ait un sens. Si nous cherchons des solutions dans $C^4(\bar{\Omega})$, le lemme 33.2 nous dit que

$$|u''(x) - D^-D^+u(x)| = \eta(h^2) \tag{33.17}$$

où $\eta$ est une fonction telle que $\lim_{t\to 0}\eta(t) = 0$. Nous pouvons récrire l'équation différentielle sous la forme

$$-D^-D^+u(x) + c(x)u(x) = f(x) + \eta(h^2). \tag{33.18}$$

Si nous négligeons le terme $\eta(h^2)$ qui est supposé être petit nous pouvons tenter de résoudre pour la fonction $u_h$

$$-D^-D^+u_h(x) + c(x)u_h(x) = f(x). \tag{33.19}$$

Notons ici l'importance de la notion de problème bien posé parce que en remplaçant le paramètre (fonctionnel) $f$ par $f+\eta(h^2)$, nous modifions les solutions. Dans la mesure où le problème est bien posé, cette petite modification ne modifiera pas trop la solution et nous pouvons espérer que $\|u-u_h\|$ soit petit pour une norme ou une autre.

Utilisant l'expression (33.8) pour $D^-D^+$ nous avons l'équation suivante pour $u_h$ :

$$\frac{1}{h^2}\Big(2u_h(x)-u_h(x+h)-u_h(x-h)\Big)+c(x)u_h(x)=f(x). \tag{33.20}$$

Avons-nous gagné quelque chose ? Pas encore. L'idée est de la discrétisation est de ne considérer $u_h$ qu'en certains points, écartés de $h$. Soit donc un nombre entier $N$ et $h=1/(N+1)$. Nous posons

$$x_k=kh \tag{33.21}$$

pour $i=0,\dots,N+1$. Avec cela nous avons

$$\overline{\Omega}=\bigcup_{k=0}^{N-1}[x_k,x_{k+1}] \tag{33.22a}$$

$$x_0=0 \tag{33.22b}$$

$$x_{N+1}=1. \tag{33.22c}$$

Nous posons surtout

$$\Omega_h=\{x_i\}_{i=1,\dots,N} \tag{33.23}$$

et

$$\bar{\Omega}_h=\{x_i\}_{i=0,\dots,N+1}. \tag{33.24}$$

Enfin, nous ne considérons plus $u_h$ que comme une fonction $u_h\colon\bar{\Omega}_h\to\mathbb{R}$. C'est à dire que $u_h$ est un vecteur à $N+2$ composantes.

L'équation (33.20) devient

$$\frac{1}{h^2}\big(2u_h(x_i)-u_h(x_{i+1})-u_h(x_{i-1})+c(x_i)u_h(x_i)\big)=f(x_i) \tag{33.25}$$

pour $i=1,\dots,N$. Sur les bords, cette équation n'est pas possible parce que $x_{i-1}$ ou $x_{i+1}$ n'existerait pas. Au contraire, sur les bords nous avons les conditions aux bords

$$u_h(x_0)=\alpha \tag{33.26}$$

et

$$u_h(x_{N+1})=\beta. \tag{33.27}$$

En posant $c_i=c(x_i)$ et $u_i=u_h(x_i)$, les inconnues du problème sont les nombres $u_i$ ($i=1,\dots,N+1$). Elles sont immédiatement résolues pour $u_0$ et $u_{N+1}$. Pour les autres, il faut écrire et résoudre un système d'équation linéaire.

L'écriture du système linéaire à résoudre consiste essentiellement à écrire (33.25) en séparant les cas $i=0$ et $i=N$ parce que nous savons déjà les valeurs de $u_0$ et $u_N$. Le système que nous avons est :

$$\begin{cases}
\left(\frac{2}{h^2}+c_1\right)u_1-\frac{1}{h^2}u_2=f_1+\frac{\alpha}{h^2} & i=1 \quad (33.28a)\\
\left(\frac{2}{h^2}+c_N\right)u_N-\frac{1}{h^2}u_{N-1}=f_N+\frac{\beta}{h^2} & i=N \quad (33.28b)\\
\left(\frac{2}{h^2}+c_i\right)u_i-\frac{1}{h^2}u_{i+1}-\frac{1}{h^2}u_i=f_i. & \text{autres} \quad (33.28c)
\end{cases}$$

Cela se met sous la forme matricielle

$$L_hU_h=F_h \tag{33.29}$$

pour

$$F_h = \big(f_1 + \frac{\alpha}{h^2}, f_2, \dots, f_{N-1}, f_N + \frac{\beta}{h^2}\big) \tag{33.30}$$

et les éléments non nuls de $L_h$ sont :

$$(L_h)_{i,i-1} = -\frac{1}{h^2} \qquad \text{pour } i = 2, \dots, N \tag{33.31a}$$

$$(L_h)_{i,i+1} = -\frac{1}{h^2} \qquad \text{pour } i = 1, \dots, N-1 \tag{33.31b}$$

$$(L_h)_{i,i} = \frac{2}{h^2} + c_i \qquad \text{pour } i = 1, \dots, N. \tag{33.31c}$$

Cette matrice est pleine de zéros, à part les trois diagonales centrales, et il existe des méthodes efficaces pour résoudre le système d'équation correspondant.

#### 33.1.1.2 Propriétés du système

La matrice est la suivante :

$$L_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + c_1 & -1/h^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/h^2 & \frac{2}{h^2} + c_2 & -1/h^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1/h^2 & \frac{2}{h^2} + c_3 & -1/h^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1/h^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1/h^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1/h^2 & \frac{2}{h^2} + c_N \end{pmatrix} \tag{33.32}$$

où nous avions déjà posé l'hypothèse $c_i \geqslant 0$ pour tout $i$.

**Lemme 33.4.**
*La matrice $L_h$ est irréductible*[1] *à diagonale fortement dominante*[2].

*Démonstration.* Nous décomposons la preuve en plusieurs parties.

**La première ligne** Sur la première ligne, seuls deux éléments sont non nuls et nous avons

$$L_{11} = \frac{2}{h^2} + c_1 \geqslant \frac{2}{h^2} > \frac{1}{h^2} = L_{12}. \tag{33.33}$$

**La dernière ligne** Elle est semblable à la première.

**Les autres lignes** Sur les autres lignes nous avons trois éléments non nuls et

$$\sum_{j \neq i} |A_{ij}| = \frac{2}{h^2} \leqslant \frac{2}{h^2} + c_i = L_{ii}. \tag{33.34}$$

**Diagonale fortement dominante** Nous avons prouvé jusqu'à présent que $L_h$ était une matrice à diagonale fortement dominante.

**Irréductible** Nous allons utiliser la caractérisation de la proposition 32.146(3). Pour cela nous considérons le chaîne d'éléments non nuls

$$A_{12}, A_{23}, \dots, A_{N-1,N} = -\frac{1}{h^2}. \tag{33.35}$$

Soient deux indices $i$ et $j$ avec $i < j$. Cette suite d'indice (ou un sous-suite) rend $i$ et $j$ connectés.

Si par contre $i > j$, il faut considérer la suite inversée grâce au fait que $L_h$ est symétrique :

$$A_{N,N-1}, A_{N-1,N-2}, \dots, A_{32}, A_{21} = -\frac{1}{h^2}. \tag{33.36}$$

1. Caractérisation 32.146.
2. Définition 32.153.

□

**Proposition 33.5.**
*Soit le problème*

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f \quad \text{sur } \Omega \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases} \tag{33.37}$$

*où $c$ est une fonction positive et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous considérons $h > 0$ assez petit pour que le reste ait un sens. Et nous approximons $u''$ par $D^-D^+u$.*

*La matrice $L_h$ des différences finies associée à ce problème est*

*(1) une M-matrice,*

*(2) strictement définie positive,*

*(3) d'inverse $L_h^{-1} > 0$.*

*Démonstration.* Le théorème 32.159 dit que $L_h$ est une M-matrice. La Proposition 32.162 nous donne aussi que $L_h$ est strictement définie positive.

Le lemme 33.4 dit que $L_h$ est irréductible, ce qui permet à la proposition 32.160 de conclure que $L_h^{-1} > 0$. □

Cela étant rappelé, nous pouvons continuer.

**Lemme 33.6.**
*Soit $\Omega = ]0,1[$, soit $N \in \mathbb{N}$ et $h = 1/(N+1)$. La solution $w_h \colon \Omega_h \to \mathbb{R}$ du problème discrétisé*

$$\begin{cases} -(D^-D^+w_h)(x_i) = 1 & \text{(33.38a)} \\ w_h(0) = 0 & \text{(33.38b)} \\ w_h(1) = 0 & \text{(33.38c)} \end{cases}$$

*pour tout $x_i = ih$ $(i = 1, \dots, N)$ donne les valeurs exactes des $w(x_i)$ lorsque $w$ est la solution de*

$$\begin{cases} -w''(x) = 1 & \text{(33.39a)} \\ w(0) = 0 & \text{(33.39b)} \\ w(1) = 0. & \text{(33.39c)} \end{cases}$$

*Démonstration.* Un enseignement de la proposition 33.5 est que le système (33.38) peut être écrit sous la forme d'un système linéaire $L_h^0 w_h = F_h$ où $L_h^0$ est inversible. Il y a donc unicité de la solution.

D'autre part, la solution du système (33.39) est $w(x) = \frac{1}{2}(x - x^2)$, qui est de classe $C^\infty$. Le lemme 33.2(3) dit que $D^-D^+w = w''$. Donc les valeurs $w(x_i)$ résolvent aussi le système (33.38). □

**Lemme 33.7** (Quelque estimations)**.**
*La matrice $L_h$ du problème sus-mentionné en* (33.37) *vérifie*[3] *:*

*(1) $\|L_h\|_\infty \leqslant \frac{4}{h^2} + \|c\|_\infty$*

*(2) $\|L_h^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{8}$.*

*Démonstration.* Nous nous souvenons de la formule (10.20) :

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|. \tag{33.40}$$

La première ligne a pour somme : $\frac{3}{h^2} + c_1$, la dernière a pour somme $\frac{3}{h^2} + c_n$ et les autres sont pour somme $\frac{4}{h^2} + c_i$. Elles sont donc toutes majorées par $\frac{4}{h^2} + \|c\|_\infty$.

3. Dans le CTES d'analyse numérique de Marseille, l'estimation donnée est $\|L_h^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$.

Pour l'estimation de $\|L_h^{-1}\|_\infty$ nous allons nous appuyer sur le théorème 32.161.

Commençons par considérer le problème

$$\begin{cases} -w'' = 1 & (33.41a)\\ w(0) = w(1) = 0. & (33.41b)\end{cases}$$

La première équation dit que $w$ est un polynôme de degré 2. En écrivant $w(x) = ax^2 + bx + c$ et en imposante toutes les contraintes, nous trouvons l'unique solution

$$w(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - x). \tag{33.42}$$

Le lemme 33.6 nous dit que la fonction $w$ prise aux points $x_i = ih$ donne les valeurs de $w_h$.

La matrice $L_h^0$ est une M-matrice et le vecteur $w_h$ vérifie $L_h^0 w_h = \mathbb{1}$. Donc le théorème 32.161 s'applique et

$$\|(L_h^0)^{-1}\| \leqslant \|w_h\|_\infty = \frac{1}{8}. \tag{33.43}$$

L'obtention de 1/8 n'est rien d'autre que la recherche du maximum (en valeur absolue) de la parabole $x \mapsto (x - x^2)/2$ pour $x \in [0, 1]$. Le maximum est atteint pour $x = 1/2$ ; calcul de dérivée et tout ça ...

Nous retournons maintenant à notre matrice originale $L_h$. Nous avons

$$L_h - L_h^0 = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n) \geqslant 0, \tag{33.44}$$

et aussi

$$L_h^{-1} - (L_h^0)^{-1} = \underbrace{L_h^{-1}}_{\geqslant 0}\underbrace{(L_h^0 - L_h)}_{\leqslant 0}\underbrace{(L_h^0)^{-1}}_{\geqslant 0} \tag{33.45}$$

parce que $L_h$ est une M-matrice. Donc tous les coefficients de $L_h^{-1} - (L_h^0)^{-1}$ sont négatifs. Cela implique

$$L_h^{-1} \leqslant (L_h^0)^{-1}. \tag{33.46}$$

Mais nous savons que les coefficients de $L_h^{-1}$ sont positifs, donc le maximum de ses coefficients en valeur absolue est plus petit que ceux de $(L_h^0)^{-1}$, c'est à dire

$$\|L_h^{-1}\|_\infty \leqslant \|(L_h^0)^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{8}. \tag{33.47}$$

□

### 33.1.2 Exemple

Soit $\Omega = ]0, 1[$ et une fonction $u\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe $C^4$ vérifiant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \sin(x) & (33.48a)\\ u(0) = 0 & (33.48b)\\ u(1) = 0. & (33.48c)\end{cases}$$

Nous allons écrire la méthode des différences finies pour $h = 1/4$. Nous posons donc les points

$$\begin{cases} x_0 = 0 & (33.49a)\\ x_1 = 1/4 & (33.49b)\\ x_2 = 1/2 & (33.49c)\\ x_3 = 3/4 & (33.49d)\\ x_4 = 1. & (33.49e)\end{cases}$$

Vu que nous avons supposé $u$ de classe $C^4$, le lemme 33.2(3) nous donne[4]

$$u''(x) = (D^-D^+u)(x) + \alpha(h) \tag{33.50}$$

avec $\lim_{h\to 0} \alpha(h)/h = 0$. L'équation discrétisée serait alors

$$\begin{cases} -(D^-D^+u)(x) + u(x) = \sin(x) & \text{(33.51a)} \\ u(0) = u(1) = 0. & \text{(33.51b)} \end{cases}$$

où nous n'avons pas précisé l'indice $h$ au bas des opérateurs $D^+$ et $D^-$. Les équations (33.51) ne doivent être posées que pour $x_1$, $x_2$ et $x_3$ parce que les valeurs en $x_0$ et $x_4$ sont déjà connues.

**Pour $x_1$**

$$\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} + u_1 = \sin(x_1) \tag{33.52}$$

**Pour $x_2$**

$$\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} + u_2 = \sin(x_2) \tag{33.53}$$

**Pour $x_3$**

$$\frac{u_4 - 2u_3 + u_2}{h^2} + u_3 = \sin(x_3). \tag{33.54}$$

Nous tenons compte du fait que $u_0 = u_4 = 0$ et que $h = 1/4$ pour écrire le système

$$\begin{pmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 16 & -31 & 16 \\ 0 & 16 & -31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \tag{33.55}$$

A où les $s_i$ sont des nombres parfaitement connus : par exemple $s_1 = \sin(x_1) = \sin(1/4) \simeq 0.247403959254523$.

## 33.2 Problèmes de dimension deux

Nous allons considérer le système

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{33.56}$$

où $\Omega = ]0, a[ \times ]0, b[$.

**Remarque 33.8.**
Pourquoi un signe moins devant le laplacien ? Pour avoir la proposition 33.5 qui dira que la matrice correspondant aux différences finies appliquées à ce système est une M-matrice. Sinon, c'est la matrice $-L_h$ qui en serait une.

### 33.2.1 Discrétisation en croix

Nous allons maintenant déduire une discrétisation du laplacien en discrétisant les opérations $\partial_x^2$ et $\partial_y^2$. Nous discrétisons $\Omega$ en mailles carrés de côté $h$ : $x_k = kkh$ et $y_k = kh$. L'opération de dérivée partielle $\partial_x$ est discrétisée par

$$(D_x^+u)(x,y) = \frac{u(x+h) - u(x,y)}{h} \tag{33.57}$$

ou

$$(D_x^-u)(x,y) = \frac{u(x,y) - u(x-h,y)}{h} \tag{33.58}$$

4. Nous ferions n'importe quoi pour ne pas écrire $u''(x) = (D^-D^+u)(x) + o(h^2)$. Notez que vous faites ce que vous voulez : écrivez avec la notation «petit $o$» si cela vous chante.

ou

$$(D_x^0 u)(x,y) = \frac{u(x+h,y) - u(x-h,y)}{2h} \tag{33.59}$$

où le $h$ est sous-entendu dans les opérateurs $D^0$, $D^+$ et $D^-$.

La dérivée partielle seconde $\partial_x^2 u$ peut être approximée par toutes les combinaisons imaginable, par exemple

$$(D_x^- D_x^+ u)(x,y) = \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2}. \tag{33.60}$$

Pour évaluer la différence entre $(\partial_x^2 u)(x,y)$ et $(D^-D^+u)(x,y)$, il est possible de faire du Taylor en deux dimension, mais nous pouvons également recycler ce qui a été fait. Nous posons $u_y(x) = u(x,y)$ et alors $(\partial_x^2 u)(x,y) = u_y''(x)$ et le lemme 33.2(3) donne, si $u_y$ est de classe $C^4$,

$$|u_y''(x) - D^-D^+u_y(x)| \leqslant \frac{1}{12}h^2 \|u_y^{(4)}\|_\infty. \tag{33.61}$$

Là, les opérateurs $D^+$ et $D^-$ sont ceux à une dimension. Mais nous avons $(D^-D^+u_y)(x) = (D^-D^+u)(x,y)$ (à droite ce sont les opérateurs à deux dimension), donc

$$\big|(\partial_x^2 u)(x,y) - (D^-D^+u)(x,y)\big| \leqslant \frac{1}{12}h^2 \|\partial_x^4 u\|_\infty \tag{33.62}$$

et nous pouvons écrire

$$(\partial_x^2 u)(x,y) = (D^-D^+u)(x,y) + h^2 R(x,y,h) \tag{33.63}$$

où $R$ est une fonction qui dépend de $x$, $y$ et $h$, mais aussi de $u$. Le point important est que $R$ soit majoré par une quantité indépendante de $h$, de telle sorte que nous ayons quelque garanties que négliger ce terme soit une bonne approximation lorsque $h \to 0$.

Au niveau de la discrétisation, nous considérons $x_i$ avec $i = 0, \dots, N_x$ et $y_j$ avec $j = 0, \dots, N_y$. La discrétisation de $-(\Delta u)(x,y) = f(x,y)$ donne, pour $i = 1, \dots, N_x - 1$ et $j = 1, \dots, N_y - 1$,

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i+1,j} + 4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = f_{ij}. \tag{33.64}$$

Les équations avec $i$ ou $j$ valant 0 ou $N_x$, $N_y$ sont les valeurs au bords.

**33.9.**
Nous notons pour référence ultérieure la discrétisation suivante du laplacien :

$$(\Delta_h u)(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\big( -4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\big). \tag{33.65}$$

Elle vérifie

$$\Delta_h f = \Delta f + h^2 \alpha(h). \tag{33.66}$$

Cette discrétisation est dite «en croix» parce que les points exploités forment une croix.

### 33.2.2 Discrétisation en carré

L'opérateur laplacien est défini par $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, mais il existe de nombreuses autres façons de l'écrire.

**Lemme 33.10.**
*Le laplacien est invariant par changement de coordonnées orthogonales. Plus précisément, si $A$ est une matrice orthogonale, en posant $u_i = \sum_k A_{ik} e_k$ nous avons*

$$\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} f = \Delta f. \tag{33.67}$$

*Démonstration.* Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_k A_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{33.68}$$

et donc

$$\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \sum_k A_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \sum_{ijk} (A^t)_{ji} A_{ik} \partial^2 f = \sum_{jk} (A^t A)_{jk} \partial_{jk}^2 f. \tag{33.69}$$

En particulier si $A$ est une matrice orthogonale, $(A^t A)_{jk} = \delta_{jk}$ et le résultat est prouvé. □

Les plus convaincus diront que $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ et que le produit scalaire est invariant sous changement de coordonnées orthogonales.

Nous avons déjà déduit la discrétisation (33.65) du laplacien :

$$(\Delta_h u)(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2} \big( -4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} \big). \tag{33.70}$$

Nous allons maintenant en déduire une par l'idée de décomposer le laplacien dans la base $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 - e_2$. Pour cela nous introduisons les opérations (le nombre $h$ dont dépendent ces opérateurs est sous-entendu)

$$(D_u^+ f)(x, y) = \frac{f(x + h, y + h) - f(x, y)}{h} \tag{33.71a}$$

$$(D_v^+ f)(x, y) = \frac{f(x + h, y - h) - f(x, y)}{h} \tag{33.71b}$$

$$(D_u^- f)(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x - h, y - h)}{h} \tag{33.71c}$$

$$(D_v^- f)(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x - h, y + h)}{h}. \tag{33.71d}$$

Vu que

$$\partial_u^2 + \partial_v^2 = 2\Delta, \tag{33.72}$$

nous discrétisons le laplacien par

$$\Delta_h' = \frac{1}{2} \big( D_u^- D_u^+ + D_v^- D_v^+ \big). \tag{33.73}$$

Un peu de calcul donne :

$$(\Delta_h' f)(x, y) = \frac{1}{2h^2} \Big( -4f(x, y) + f(x + h, y + h) + f(x - h, y + h) \tag{33.74a}$$

$$+ f(x + h, y - h) + f(x - h, y - h) \Big). \tag{33.74b}$$

### 33.2.3 Résolution de la discrétisation en croix

Les équations (33.64) forment un système d'équations linéaires à résoudre. Certaines peuvent être simplifiées parce qu'elles «touchent» le bord. Nous verrons cela un peu plus tard.

Nous allons d'abord numéroter correctement les équations de façon à ne pas avoir deux mais un seul indice. Notre fonction de numérotation sera

$$\varphi(i, j) = (j - 1)(N_x - 1) + i \tag{33.75}$$

avec $i = 1, \dots, N_x - 1$ et $j = 1, \dots, N_y - 1$. Cela correspond à numéroter les points de l'intérieur du quadrillage ligne par ligne en bas en haut et de gauche à droite. Avec cela les équations (33.64) vont être numérotées par un seul indice $I$ allant de $\varphi(1, 1) = 1$ à $\varphi(N_x - 1, N_y - 1) = (N_x - 1)(N_y - 1)$.

Si $I = \varphi(i, j)$ alors nous avons vite

$$\varphi(i+1, j) = I + 1 \tag{33.76a}$$
$$\varphi(i, j+1) = I + N_x - 1 \tag{33.76b}$$
$$\varphi(i-1, j) = I - 1 \tag{33.76c}$$
$$\varphi(i, j-1) = I - N_x + 1. \tag{33.76d}$$

Nous posons $U_I = u_{\varphi^{-1}(I)}$, et l'équation (33.64) devient

$$\frac{1}{h^2}(-U_{I+1} + 4U_I - U_{I-1} - U_{I+N_x-1} - U_{I-N_x+1}) = f_I. \tag{33.77}$$

Pour savoir la matrice représentant ce système, nous devons simplifier les équations qui doivent l'être. Par exemple avec $I = 1$, le terme $U_{I-1} = U_0$ vaut $u_{0,1} = f_0 1$. Ce n'est donc pas réellement une inconnue de notre problème.

Nous voulons mettre les équations sous la forme du système

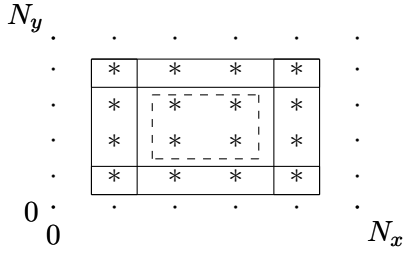
$$L_h U = F. \tag{33.78}$$

Sur la ligne numéro $I$ de $L_h$, les éléments non nuls sont :

$$L_{I,I} = 4 \tag{33.79a}$$
$$L_{I,I+1} = -1 \tag{33.79b}$$
$$L_{I,I-1} = -1 \tag{33.79c}$$
$$L_{I,I+N_x-1} = -1 \tag{33.79d}$$
$$L_{I,I-N_x+1} = -1 \tag{33.79e}$$

pour peu qu'ils existent. Par exemple pour $I = 1$, il n'y a pas d'éléments $L_{I,I-1}$. Les indices $I$ et $J$ de $L_{I,J}$ vont de 1 à $\varphi(N_x - 1, N_y - 1) = (N_y - 1)(N_x - 1)$.

Voici un dessin de notre situation :




À chaque élément du quadrillage correspond une équation.

— Aux points simples sur le bord, correspondent des équations triviales parce que la fonction $u$ y est directement donnée par les conditions aux bords.

— Aux points étoilés entourés en traits continus correspondent des équations «incomplètes» parce que certains termes de l'équation (33.64) sont donnés par les conditions aux bords. Elle correspondent aussi aux lignes incomplète de la matrice $L_h$ où certains éléments donnés en (33.79) n'existent pas.

Le membre de droite de ces équations est par contre enrichi de ce qui à gauche est «donné».

— Au points étoilés du centre entourés en traits discontinus correspondent des équations complètes.

Notons que $f_{00}$ ne joue aucun rôle dans notre histoire parce que dans les équations (33.64), chaque point $(i, j)$ du maillage n'est liée qu'aux quatre points situés «à côté».

**Proposition 33.11.**
*La matrice $L_h$ est*

*(1) irréductible et à diagonale fortement dominante*[5]*,*

*(2) une M-matrice,*

*(3) inversible avec $L_h > 0$,*

*(4) symétrique,*

*(5) strictement définie positive.*

*Démonstration.* On divise la preuve.

**Irréductible** Une matrice $n \times n$ dont les deux premières diagonales sont entièrement composées d'éléments non nuls est toujours irréductible. En effet, la première lie l'élément $(1, 2)$ à l'élément $(n - 1, n)$ et donc permet de dire que tous les $i < j$ sont connectés.

La seconde diagonale lie l'élément $(n, n - 1)$ à l'élément $(2, 1)$.

**Diagonale fortement dominante** En ce qui concerne la dominance de la diagonale, il faut sommer sur les lignes. Or chaque ligne contient (en valeur absolue) un 4 sur la diagonale et au plus quatre éléments qui valent 1. D'où

$$|L_{II}| \geqslant \sum_{J \neq I} |L_{IJ}|. \tag{33.80}$$

La première ligne n'est jamais complète : elle contient un 4 sur l'élément $(1, 1)$ au au maximum deux 1 plus à droite. Donc la matrice $L_h$ est à diagonale fortement dominante.

**M-matrice** D'après ce que nous venons de voir (proposition 33.11), le théorème 32.159 fonctionne et $L_h$ est une M-matrice[6].

**Inverse strictement positif** La proposition 32.160 nous assure qu'une M-matrice irréductible est d'inverse strictement positif. Donc $L_h^{-1} > 0$.

**Symétrique** La ligne numéro $I$ est

$$\big(\dots, \underbrace{-1}_{I-N_x+1}, \dots, -1, 4, -1, \dots, \underbrace{-1}_{I+N_x-1}, \dots\big) \tag{33.81}$$

Prenons par exemple l'élément $(I, I - N_x + 1)$ qui vaut $-1$. Son symétrique est l'élément $(I - N_x + 1, I)$ qui se trouve sur la ligne $I - N_x + 1$. Sur cette dernière ligne nous avons un $-1$ sur la colonne $I - N_x + 1 + N_x - 1 = I$. Donc l'élément $(I - N_x + 1, I)$ vaut bien $-1$ et la matrice est symétrique.

**Strictement définie positive** Vu que la matrice $L_h$ est symétrique, irréductible à diagonale fortement dominante (proposition 33.11), vu que ses éléments diagonaux sont strictement positifs (ils valent 4), la proposition 32.162 nous dit que $L_h$ est strictement définie positive.

□

## 33.3 Consistance, convergence

### 33.3.1 Définitions, mise en place

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et un opérateur différentiel $L$ sur $\Omega$. Nous considérons le problème qui consiste à trouver une fonction $u$ sur $\Omega$ telle que

$$Lu = f \tag{33.82}$$

pour une fonction $f$ donnée.

**Problèmes et choses à faire**

La définition suivante est une invention personnelle, n'est pas précise et mérite des commentaires de la part du lecteur.

5. Définition 32.153. Le cas $1 \times 1$ est discutablement à diagonale fortement dominante, il faut avouer.

6. Notons que c'est ici que nous sommes content d'avoir posé $-\Delta u = f$ dans le système (33.56), avec un signe négatif devant le laplacien. Sinon tous le signes auraient changé et la matrice $-L_h$ aurait été une M-matrice au lieu de $L_h$.

**Définition 33.12** ([1])**.**
*Un* ***schéma numérique*** *de pas $h$ pour $Lu = f$ est la donnée de*

*(1) un nombre $h > 0$ supposé petit,*

*(2) une quantité $N$ de points $x_i$ dans $\Omega$ formant l'ensemble discret $\Omega_h$,*

*(3) une matrice $L_h$ de taille $N \times N$,*

*(4) une solution $u_h \colon \Omega_h \to \mathbb{R}$ de l'équation $(L_h u_h)(x_i) = f_i$ où nous avons posé $f_i = f(x_i)$.*

**33.13.**
Évidemment pour qu'un schéma mérite le nom de schéma de pas $h$ pour l'équation $Lu = f$, il faut que le nombre $h$ soit lié au choix des points $x_i$, et que la matrice $L_h$ soit liée à l'opérateur $L$. La définition n'impose pas formellement de tels liens, parce qu'il y a de nombreuses façons d'approximer une équation différentielle en un système linéaire, sans compter que même l'équation $(L_h u_h)_i = f_i$ peut se résoudre de beaucoup de façons, exacte ou approchées.

Cela pour dire que le lien entre la solution exacte $u$ et la solution approchée n'a rien d'évident, et va dépendre des choix faits lors de la discrétisation et lors de la résolution du système linéaire. Nous allons supposer dans un premier temps que l'équation $L_h u_h = f$ est résolue exactement (nous avons un peu parlé de ces problème dans les sections 32.15 et suivantes).

**Définition 33.14.**
*L'erreur* ***de consistance*** *d'un schéma numérique est la fonction $\tau_h \colon \Omega_h \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\tau_h(x_i) = (L_h u)_i - (Lu)(x_i). \tag{33.83}$$

Il y a un jeu de notation pas tout à fait évident dans la définition (33.83). En effet, $L_h$ est une matrice, et ne s'applique donc a priori pas immédiatement à une fonction. Ce que signifie la notation $(L_h u)_i$ est que l'on applique la matrice $L_h$ au vecteur $j \mapsto u(x_j)$ et que l'on prend la composante $i$ du résultat.

**Définition 33.15.**
*Nous disons que le schéma est* ***consistant*** *avec l'opérateur différentiel $L$ lorsque*

$$\lim_{h \to 0^+} \|\tau_h\| = 0 \tag{33.84}$$

*où la norme $\|.\|$ est souvent la norme uniforme, c'est à dire $\|\tau_h\| = \max_i \tau_h(x_i)$.*

Notons que le lien entre $h$ et le choix des $x_i$ fait partie de la définition des schéma. Sur un segment de longueur $L$, lorsque $h$ n'est pas un diviseur de $L$, le schéma devrait expliquer ce que l'on fait pour que la limite (33.84) ait un sens.

**Définition 33.16.**
*Le schéma $(\Omega_h, L_h)$ est* ***consistant à l'ordre*** *$p$ avec l'opérateur différentiel $L$ pour la norme $\|.\|$ si il existe une constante $C$ indépendante de $h$ telle que*

$$\|\tau_h\| \leqslant Ch^p. \tag{33.85}$$

**Définition 33.17.**
*L'****erreur de discrétisation*** *entre la solution $u$ du problème $Lu = f$ et la solution approchée $u_h$ sur $\Omega_h$ est la fonction*

$$\begin{aligned} e_h \colon \Omega_h &\to \mathbb{R} \\ x_i &\mapsto u(x_i) - u_i. \end{aligned} \tag{33.86}$$

*où $u_i = u_h(x_i)$ est la solution approchée.*

*Le schéma discret $(L_h u_h)(x_i) = f_i$ est* ***convergeant*** *si $\lim_{h \to 0} \|e_h\| = 0$. Si de plus is existe une constante $C$ et $p > 0$ tels que*

$$\|e_h\| \leqslant Ch^p, \tag{33.87}$$

*alors nous disons que le schéma est convergence à l'****ordre*** *$p$.*

Si l'erreur de consistance est petite, le *problème* est bien approximé par la système linéaire. Cela n'implique cependant pas que la solution trouvée soit bien approximée.

**Exemple 33.18**(Deux opérateurs différentiels proches dont les solutions sont loin)
Soit la partie $\Omega = ]0, \infty[$, et les problèmes

$$\begin{cases} L_1 u = u' = 0 & (33.88a) \\ u(0) = 1 & (33.88b) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} L_2 v = v' - \epsilon v = 0 & (33.89a) \\ v(0) = 1. & (33.89b) \end{cases}$$

Les solutions exactes sont $u(x) = 1$ et $v(x) = e^{\epsilon x}$.

En ce qui concerne les opérateurs, quelle que soit la norme utilisée nous avons

$$\begin{aligned} \|L_1 - L_2\| &= \sup_{\|f\|=1} \|L_1(f) - L_2(f)\| & (33.90a) \\ &= \sup_{\|f\|=1} \|\epsilon f\| & (33.90b) \\ &= \epsilon. & (33.90c) \end{aligned}$$

Donc lorsque $\epsilon$ est petit, l'opérateur $L_2$ approxime bien l'opérateur $L_1$. Pour toutes les normes. Mais

$$\big|u(x) - v(x)\big| = |1 - e^{\epsilon x}|, \tag{33.91}$$

donc quel que soit $\epsilon$ nous avons $\|u - v\|_\infty = \infty$. Et d'ailleurs, quelle que soit la norme raisonnable que nous mettons sur l'espace des fonctions, avoir $\|u - v\| = \infty$ semble inévitable.

Donc deux opérateurs différentiels proches peuvent avoir des solutions lointaines. △

### 33.3.2 Exemple

Soit l'opérateur différentiel $L$ donné par

$$Lu = -u'' + cu \tag{33.92}$$

où $c$ est une fonction. Nous considérons sur $\Omega = ]0, 1[$ l'équation différentielle

$$Lu = 0. \tag{33.93}$$

En ce qui concerne la discrétisation, nous définissons le maillage $\Omega_h = \{x_i = ih\}$ avec $i = 0, \dots, N+1$. La solution approchée discrètement sera le vecteur $v$ qui peut être vu comme fonction $v\colon \Omega_h \to \mathbb{R}$. Les nombres $v_0$ et $v_{N+1}$ sont a priori donnés par les conditions aux bords. Pour les autres $v_i$ nous avons les équations

$$(L_h v)_i = -\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + c(x_i)v_i. \tag{33.94}$$

Cela est la définition de l'opérateur $L_h$, et le vecteur $v$ solution de $L_h v = 0$ est la solution du problème au sens de la méthode des différences finies (pour peu qu'il existe, soit unique et tout ça).

Pour calculer l'erreur de consistence, nous considérons une fonction $u$ et nous posons $u_i = u(x_i)$. Le vecteur $(u_i)$ ainsi construit est approximé par $v$ (on espère). Nous avons :

$$\tau_h(x_i) = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - c(x_i)u_i - (Lu)(x_i). \tag{33.95}$$

Pour étudier cela nous développons $u_{i+1} = u(x_i + h)$ et $u_{i-1} = u(x_i - h)$ à l'ordre 4 : il existe $\alpha_i \in [x_i, x_i + h]$ et $\beta_i \in [x_i - h, x_i]$ tels que

$$u_{i+1} = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\alpha_i) \tag{33.96}$$

et

$$u_{i-1} = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\beta_i). \tag{33.97}$$

Après simplification de plusieurs termes,

$$\tau_h(x_i) = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - c_i u_i + u''(x_i) + c_i u_i = \frac{h^2}{4!}\big(u^{(4)}(\alpha_i) + u^{(4)}(\beta_i)\big). \tag{33.98}$$

Parler de la consistance du schéma demande d'étudier $\lim_{h\to 0^+} \|\tau_h\|$, et pour cela, il faut préciser la norme avec laquelle nous voulons travailler. L'ordre de consistance va dépendre de la norme utilisée.

Pour la norme $\|.\|_\infty$, les nombres $u^{(4)}(\alpha_i)$ et $u^{(4)}(\beta_i)$ se majorent par $\|u^{(4)}\|_\infty$ et nous avons

$$\|\tau_h\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_\infty. \tag{33.99}$$

Nous avons consistance d'ordre 2.

**Remarque 33.19.**
La valeur de $\|\tau_h\|_\infty$ dépend de la fonction $u$ sur laquelle nous la calculons. Cependant nous avons convergence $\|\tau_h\|_\infty \to 0$ pour toute fonction (de classe disons $C^4$).

La constante $C$ pour laquelle nous avons $\|\tau_h\| \leqslant Ch^2$ et donc qui nous vaut de pouvoir dire que la consistance est d'ordre 2 ne dépend pas de $h$, ni des valeurs ponctuelles de $u$ ou de ses dérivées, mais dépend des normes de $u$ et de ses dérivées (en l'occurrence seulement de la norme de $u^{(4)}$.)

Étudions la consistance pour la norme $L_1$ :

$$\|\tau_h\|_1 = \sum_i |\tau_h(x_i)| \leqslant \frac{h^2}{12}\sum_i \|u^{(4)}\|_\infty \tag{33.100}$$

où nous avons majoré chacun des $u^{(4)}(\alpha_i)$ par $\|u^{(4)}\|_\infty$. Combien de termes dans la somme ? Nous avons $h = 1/(N-1)$ et donc $N = (1+h)/h$, ce qui donne

$$\|\tau_h\|_1 \leqslant N\frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_\infty = (1+h)Ch. \tag{33.101}$$

La constante $1+h$ se majore par n'importe quelle constante strictement plus grande que 1. Nous pouvons donc la rentrer dans $C$ et écrire

$$\|\tau_h\|_1 \leqslant Ch \tag{33.102}$$

et donc avoir la consistance à l'ordre 1.

### 33.3.3 Consistance, stabilité et convergence

**Lemme 33.20.**
*Soit un opérateur différentiel $L$, soit $u$ la solution de $Lu = f$ et un schéma numérique $(L_h, \Omega_h)$ pour cette équation. Nous notons $u_h$ la solution de $L_h u_h = f$. Alors nous avons*

$$L_h e_h = \tau_h \tag{33.103}$$

*Et si de plus $L_h$ est inversible,*

$$\|e_h\| \leqslant \|L_h^{-1}\|\|\tau_h\|. \tag{33.104}$$

*Démonstration.* Par définition $u_h$ est solution de $L_h u_h = f$ en tant que fonctions sur $\Omega_h$. Nous avons donc

$$L_h e_h = L_h u_h - L_h u \tag{33.105}$$

où $u$ doit être compris comme la restriction de $u$ à $\Omega$. En appliquant au point $x_i$,

$$(L_he_h)(x_i) = \underbrace{(L_hu_h)(x_i)}_{=f_i} - (L_hu)(x_i), \tag{33.106}$$

mais $f_i = (Lu)(x_i)$ parce que $u$ est solution de $Lu = f$. Donc

$$(L_he_h)(x_i) = (Lu)(x_i) - (L_hu)(x_i) = \tau_h(x_i). \tag{33.107}$$

Si la matrice $L_h$ est inversible nous avons $e_h = L_h^{-1}\tau_h$ et donc

$$\|e_h\| \leqslant \|L_h^{-1}\|\|\tau_h\| \tag{33.108}$$

par le lemme 10.12. □

Bien entendu, en tant qu'opérateur linéaire sur un espace de dimension finie, l'opérateur $L_h^{-1}$ est borné pour chaque $h$. Mais si il n'y a pas une borne uniforme en $h$, alors le lemme 33.20 dit qu'il n'y a pas d'espoir de majorer $\|e_h\|$ de façon à passer à la limite $\lim_{h\to 0}\|L_h^{-1}\|$.

**Définition 33.21.**
*Un schéma numérique est* ***stable*** *si il existe une constante $C > 0$ indépendante de $h$ telle que $\|L_h^{-1}\| \leqslant C$.*

**Théorème 33.22.**
*En deux parties.*

*(1) Si un schéma discret est consistant et stable, alors il est convergeant.*

*(2) Si de plus il est consistant à l'ordre $p$, alors il est convergeant à l'ordre $p$.*

*Démonstration.* Nous savons du lemme 33.20 (qui s'applique parce que l'inversibilité de $L_h$ est dans la définition de la stabilité) que $\|e_h\| \leqslant \|L_h^{-1}\|\|\tau_h\|$ et que $\|L_h^{-1}\| \leqslant C$. En passant à la limite [7],

$$\lim_{h\to 0}\|e_h\| \leqslant C\lim_{h\to 0}\|\tau_h\| = 0. \tag{33.109}$$

La dernière limite est le fait que le schéma soit consistant. Le schéma est donc convergeant.

Si de plus il est consistant à l'ordre $p$, alors

$$\|e_h\| \leqslant C\|\tau_h\| \leqslant C'h^p \tag{33.110}$$

Il est donc également convergeant à l'ordre $p$. □

### 33.3.4 Exemple : schéma à cinq points, laplacien en croix

Nous avions développé le schéma dont l'opérateur sur $\Omega_h$ est (voir (33.64))

$$(L_hu_h)(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\big(-u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1}\big). \tag{33.111}$$

**Proposition 33.23.**
*Le schéma est :*

*(1) consistant à l'ordre 2,*

*(2) stable pour la norme uniforme et*

$$\|L_h^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{8}, \tag{33.112}$$

*(3) convergeant à l'ordre 2 pour la norme $\|.\|_\infty$.*

7. Toutes les limites $h \to 0$ sont en réalité des limites $h \to 0^+$, mais nous allégeons cette notation.

*Démonstration.* Cet opérateur avait été construit de telle sorte à avoir (voir (33.63))

$$(\Delta u)(x_i,y_j) = (L_h u)(x_i,y_i) + h^2 R(x,y,h) \tag{33.113}$$

où $R$ peut être majoré indépendamment de $h$. En tant que fonctions sur $\Omega_h$ nous avons

$$\tau_h = \Delta u - L_h u = h^2 R(x,y,h), \tag{33.114}$$

et donc $\|\tau_h\|_\infty \leqslant Ch^2$, parce que le lemme 33.2(3) donne aussi

$$\|R\|_\infty \leqslant C \max\{\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\|_\infty, \|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\|_\infty\}. \tag{33.115}$$

En ce qui concerne la stabilité nous allons utiliser le théorème 32.161. Nous considérons la fonction

$$g(x,y) = -\frac{1}{4}(x^2+y^2), \tag{33.116}$$

qui vérifie $-\Delta g = 1$ sur le carré $[0,1]^2$. Nous considérons le vecteur $g_h$ d'indices $(i,j) \mapsto g_{ij} = g(x_i,y_j)$ sur lequel nous calculons $L_h$ :

$$(L_h g_h)_{ij} = \frac{1}{h^2}(-g_{i+1,j} - g_{i,j+1} + 4g_{ij} - g_{i-1,j} - g_{i,j-1}); \tag{33.117}$$

en remplaçant les $g$ par leurs valeurs en termes de $x_i$, $x_{i-1}$, $x_{i+1}$, $y_j$, $y_{j-1}$ et $y_{j+1}$, et ne tenant compte du fait que $x_k = kh$ et $y_l = lh$ nous avons :

$$(L_h g_h)_{ij} = \frac{1}{4}\big((i+1)^2 - j^2 + i^2 + (j+1)^2 - 4i^2 - 4j^2 + (i-1)^2 + j^2 + i^2 + (j-1)^2\big) = 1. \tag{33.118}$$

Donc $L_h g_h = 1$.

Vu que $L_h$ est une M-matrice (proposition 33.11(2)), le théorème 32.161 nous dit alors que $L_h^{-1}$ vérifie

$$\|L_h^{-1}\|_\infty \leqslant \|g_h\|_\infty. \tag{33.119}$$

Mais

$$\|g_h\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty = g\big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{8}. \tag{33.120}$$

Notons que cela est bien une inégalité et non une égalité parce que rien n'assure que le point $(1/2,1/2)$ soit sur le maillage ; donc rien n'assure que la valeur $g(1/2,1/2)$ ne soit parmi les valeurs du vecteur discrétisé $g_h$.

Notre schéma numérique est stable et consistant à l'ordre 2 pour la norme $\|.\|_\infty$. Le théorème 33.22 dit alors que le schéma est convergeant à l'ordre 2 pour la même norme. □

## 33.4 Autres laplaciens

Nous avons vu le laplacien en croix (33.65)

$$(\Delta_h f)(x,y) = \frac{1}{h^2}\big(-4f(x,y) + f(x+h,y) + f(x-h,y) \tag{33.121a}$$

$$+ f(x,y+h) + f(x,y-h)\big) \tag{33.121b}$$

qui vérifie

$$\Delta_h f = \Delta f + Kh^2, \tag{33.122}$$

ainsi que le laplacien en carré (33.74)

$$(\Delta'_h f)(x,y) = \frac{1}{2h^2}\Big(-4f(x,y) + f(x+h,y+h) + f(x-h,y+h) \tag{33.123a}$$

$$+ f(x+h,y-h) + f(x-h,y-h)\Big) \tag{33.123b}$$

qui vérifie également $\Delta'_h f = \Delta f + Kh^2$.

A priori toutes combinaisons de la forme

$$a\Delta_h + b\Delta'_h \tag{33.124}$$

avec $a + b = 1$ est valable comme tentative de discrétiser le laplacien. Ce sont des schémas à 9 points. Évidemment la matrice $L_h$ correspondante va être moins creuse, mais nous pouvons espérer ajuster $a$ et $b$ de telle sorte à obtenir une consistance d'un ordre supérieur à 2.

Nous allons développer les $\Delta_h f$ et $\Delta'_h f$ à l'ordre 4 (reste à l'ordre 6). Quelque remarques avant de commencer.

(1) Allez relire la proposition 12.260 et les notations qui vont avec pour comprendre les différentielles.

(2) Écrivez les formules du type (12.676) pour $d^2 f$ et $d^4 f$.

(3) Allez relire le développement de Taylor du théorème 12.264.

(4) À l'ordre zéro, il n'y a rien parce que le terme $-4f(x, y)$ compense les quatre termes d'ordre zéro des autres termes.

(5) Aux ordres impairs, il n'y a rien. En effet, prenons un nombre impair $l$ et la formule

$$(d^l f)_x(h, \dots, h) = \sum_{i_1,\dots,i_l} h_{i_1} \dots h_{i_l} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}(x). \tag{33.125}$$

Nous avons

$$(d^l f)_x(h, \dots, h) + (d^l f)_x(-h, \dots, -h) = 0. \tag{33.126}$$

Or dans les expressions (33.123) et (33.121), les termes arrivent par pair opposées.

Commençons par calculer $h^2(\Delta_h f)(x, y)$.

**Ordre** 4 . Le premier terme est :

$$(d^2 f)_{(x,y)}\big((h, 0), (h, 0)\big) = h^2 (d^2 f)_{(x,y)}\big((1, 0), (1, 0)\big). \tag{33.127}$$

La formule (12.676) à peine adaptée permet de calculer ça explicitement.

Il y a encore les termes du même type avec $(0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(0, -1)$.

**Ordre** 4 Cette fois, ce sont 4 termes du type

$$h^4 (d^4 f)_{(x,y)}\big((1, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 0)\big) \tag{33.128}$$

à calculer.

Cela fait beaucoup de termes à calculer. Je vois laisse vous persuader que le programme suivant en Sage nous donne les coefficients.

```
#! /usr/bin/env python3
# -*- coding: utf8 -*-


x,y=var("x,y")

C=[]
C.append(x)
C.append(y)

def coef4(h):
    S=0
    for i in [0,1]:
```

```
        for j in [0,1]:
            for k in [0,1]:
                for l in [0,1]:
                    S=S+h[i]*h[j]*h[k]*h[l]*C[i]*C[j]*C[k]*C[l]
    return S

def coef2(h):
    S=0
    for i in [0,1]:
        for j in [0,1]:
            S=S+h[i]*h[j]*C[i]*C[j]
    return S

cross=[]
square=[]

cross.append(  [1,0] )
cross.append(  [-1,0] )
cross.append(  [0,1] )
cross.append(  [0,-1] )

square=[]
square.append(  [-1,-1] )
square.append(  [1,-1] )
square.append(  [-1,1] )
square.append(  [1,1] )


print("Cross scheme :")

K=sum(  coef2(v) for v in cross   )
L=sum(  coef4(v) for v in cross   )
print(K)
print(L)

print("square scheme :")

K=sum(  coef2(v) for v in square   )
L=sum(  coef4(v) for v in square   )
print(K)
print(L)
```

tex/sage/coefs.sage

Le résultat est que, en utilisant la formule

$$\partial_x^4 f + 2\partial_{xxyy}^4 f + \partial_y^4 f = \Delta\Delta f, \tag{33.129}$$

nous avons

$$(\Delta_h f)(x,y) = \frac{1}{2}(2\partial_x^2 f + 2\partial_y^2 f)(x,y) + \frac{1}{4!}2h^2(\partial_x^4 f + \partial_y^4 f)(x,y) + Kh^4 \tag{33.130a}$$
$$= (\Delta f)(x,y) + \frac{1}{12}h^2(\partial_x^4 f + \partial_y^4 f)(x,y) + Kh^4 \tag{33.130b}$$
$$= \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta\Delta f - \frac{h^2}{12}2\partial_{xxyy}^4 f + Kh^4 \tag{33.130c}$$
$$= \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta\Delta f - \frac{h^2}{6}\partial_{xxyy}^4 f + Kh^4 \tag{33.130d}$$

où $K$ est une constante qui peut être majorée en terme des dérivées quatrièmes de $f$. En particulier la plus grande des normes supremum de ces dérivées.

Le même genre de calculs donnent

$$(\Delta'_h f)(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}4\Delta f + \frac{h^2}{4!}(4\partial_x^4 f + 24\partial_x^2\partial_y^2 f + 4\partial_y^2 f)\Big] + Kh^4. \tag{33.131}$$

Ça donne :

$$(\Delta'_h f) = \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta\Delta f + \frac{h^2}{3}\partial_{xxyy}^4 f + Kh^4 \tag{33.132}$$

avec redéfinition du $K$ ; nous ne le préciserons plus à chaque fois.

Nous avons donc le résultat proposé dans [340] :

$$a\Delta_h f + b\Delta'_h f = (a+b)\Delta f + (a+b)\frac{h^2}{12}\Delta^2 f + h^2\frac{1}{6}(a-2b)\partial_{xxyy}^4 f + Kh^4. \tag{33.133}$$

L'idée est d'appliquer ça à une fonction $u$ qui vérifie l'équation différentielle $-\Delta u = f$ (attention au clash de notation pour $f$). Le mieux est de supprimer le terme en $\partial_{xxyy} f$ en demandant $a-2b=0$. Nous avons donc à résoudre le système

$$\begin{cases} a+b=1 & \text{(33.134a)}\\ a-2b=0. & \text{(33.134b)}\end{cases}$$

Qui propose une décomposition $PLU$ pour résoudre ce système linéaire ? Quelle que soit la manière, la solution est

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}. \tag{33.135}$$

Nous allons donc étudier la discrétisation à neuf points

$$L_h = \frac{2}{3}\Delta_h + \frac{1}{3}\Delta'_h. \tag{33.136}$$

En faisant quelque additions nous trouvons que l'opération

$$(L_h u)(x_i,y_j) = \frac{1}{6h^2}\Big( -20u_{ij} + 4\big(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\big) + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}\Big) \tag{33.137}$$

vérifie

$$L_h f = \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta^2 f + Kh^4. \tag{33.138}$$

### 33.4.1 Travail avec le laplacien à 9 points

Nous allons écrire un schéma numérique pour l'équation différentielle $-\Delta u = f$ utilisant la discrétisation à 9 points du laplacien. Nous recopions ses propriétés fondamentales (33.136), (33.137), (33.138) :

$$L_h = \frac{2}{3}\Delta_h + \frac{1}{3}\Delta'_h, \tag{33.139}$$

et

$$(L_h u)(x_i, y_j) = \frac{1}{6h^2}\Big( -20u_{ij} + 4\big(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\big) + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}\Big), \tag{33.140}$$

et

$$L_h f = \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta^2 f + Kh^4. \tag{33.141}$$

Nous appliquons (33.141) à $u$ et nous isolons $\Delta u$ :

$$\Delta u = L_h u - \frac{h^2}{12}\Delta^2 u + Kh^4 = \frac{1}{6h^2}T_h u + \frac{h^2}{12}\Delta f + Kh^4 \tag{33.142}$$

où nous avons utilisé $\Delta^2 u = -\Delta f$ et avons noté

$$T_h u = -20u_{ij} + 4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}. \tag{33.143}$$

Nous imposons maintenant $\Delta u = -f$ en écrivant

$$\frac{1}{6h^2}T_h u = -f - \frac{h^2}{12}\Delta f + \alpha(h)h^4. \tag{33.144}$$

Une idée est de remplacer $\Delta f$ par son approximation en croix (33.122) :

$$T_h u = -6h^2 f - \frac{h^4}{2}(\Delta_h f + Kh^2) + \alpha(h)h^6 \tag{33.145}$$

Avec quelque calculs nous trouvons le schéma numérique suivant :

$$20u_{ij} - 4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1} \tag{33.146a}$$

$$= \frac{h^2}{2}(8f_{ij} + f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}) + \alpha(h)h^6. \tag{33.146b}$$

En oubliant le terme en $\alpha(h)h^6$, nous obtenons un système d'équations linéaires.

**Problèmes et choses à faire**

Il me semble que ce schéma donne une convergence d'ordre 6. C'est correct ?

# Chapitre 34

# Variables aléatoires et théorie des probabilités

## 34.1 Espace de probabilité

**Définition 34.1.**
*Une* ***mesure de probabilité*** *sur un espace mesurable*[1] $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une mesure positive telle que* $P(\Omega) = 1$. *Dans ce cas, le triple* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est un* ***espace de probabilité****.*

Un point $\omega \in \Omega$ est une **observation**, une partie mesurable $A \in \mathcal{A}$ est un **événement**. L'ensemble $A \cup B$ représente l'événement $A$ ou $B$ tandis que l'ensemble $A \cap B$ représente l'événement $A$ et $B$.

Si les $A_n$ sont des événements, nous avons défini en 13.87 limite supérieure et la limite inférieure de la suite $A_n$ par

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k \tag{34.1}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k \tag{34.2}$$

Si $\omega \in \liminf A_n$, alors $\omega$ réalise tous les $A_n$ sauf un nombre fini.

Nous avons

$$\limsup A_n = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \omega \in A_n \text{pour une infinité de } n\}. \tag{34.3}$$

**Théorème 34.2** (Borel-Cantelli)**.**
*Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \tag{34.4}$$

*alors* $P(\limsup A_n) = 0$.

*Démonstration.* La condition $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n) < \infty$ signifie que la fonction

$$\varphi = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_n} \tag{34.5}$$

est $P$-intégrable. Par conséquent, elle est finie presque partout (au sens de $P$), c'est à dire

$$P(\varphi = \infty) = 0. \tag{34.6}$$

Les points $\omega$ sur lesquels $\varphi(\omega) = \infty$ sont ceux tels que

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \infty, \tag{34.7}$$

1. Espace mesurable : 13.1, mesure positive : 13.23.

c'est à dire les $\omega$ qui appartiennent à une infinité d'ensembles $A_n$, ou encore les $\omega \in \limsup A_n$. Nous avons donc montré que

$$\{\omega \text{ tel que } \varphi(\omega) = \infty\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \omega \in A_n \text{pour une infinité de } n\} = \limsup A_n. \tag{34.8}$$

Or l'hypothèse signifie que la probabilité du membre de gauche est nulle. □

**Corollaire 34.3.**
*Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(\complement A_n) < \infty$, alors presque sûrement tous les $B_n$ sont réalisés à l'exception d'un nombre fini.*

## 34.2 Variables aléatoires

**Définition 34.4.**
*Une **variable aléatoire** est une application mesurable*

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)). \tag{34.9}$$

Nous convenons que $\mathbb{R}^1 = \bar{\mathbb{R}}$, c'est à dire que dans le cas où la variable aléatoire $X$ est réelle, nous acceptons les valeurs $\pm\infty$.

**Définition 34.5.**
*Une variable aléatoire réelle $X$ est **absolument continue** s'il existe une fonction positive et intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,*

$$P(X \in I) = \int_I f(t)dt. \tag{34.10}$$

*Nous disons alors que $f$ est la **densité** de $X$.*

Cela ne devrait pas être sans rappeler la définition 14.67.

### 34.2.1 Indépendance

La définition suivante vient de l'instructive motivation de [341]. La définition d'indépendance de deux événements se généralise à $n$ événements de la façon suivante.

**Définition 34.6.**
*Nous disons que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont **indépendants** si pour tout choix $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ nous avons*

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}). \tag{34.11}$$

*Les sous tribus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sont **indépendantes** si pour tout choix $A_i \in \mathcal{A}_i$, les événements $A_i$ sont indépendants.*

**Exemple 34.7**
Soit $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Soient $A = [0,a] \times [0,1]$ et $B = [0,1] \times [0,b]$. Nous avons $P(A) = a$ et $P(B) = b$ ainsi que $P(A \cup B) = ab$. △

**Lemme 34.8.**
*Les tribus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sont indépendantes si et seulement si*

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n) \tag{34.12}$$

*pour tout $A_i \in \mathcal{A}_i$.*

*Démonstration.* L'implication dans le sens direct découle immédiatement des définitions.

Nous supposons avoir un choix $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ avec $A_i \in \mathcal{A}_i$ et nous devons montrer que ces événements sont indépendants, c'est à dire que si $J \subset \{1,\dots,n\}$ alors les événements $(A_j)_{j\in J}$ sont indépendants. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que si $i \notin J$, $A_i = \Omega$. Alors nous avons

$$P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) = P\big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\big) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \prod_{j\in J} P(A_j) \tag{34.13}$$

parce que $P(A_i) = P(\Omega) = 1$ lorsque $i$ n'est pas dans $J$. □

Si $A$ est un événement, la **tribu engendrée** par $A$ est

$$\sigma(A) = \{\varnothing, A, \complement A, \Omega\}. \tag{34.14}$$

Soit $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ une variable aléatoire. Conformément à la définition 13.69, la **tribu engendrée** est

$$\mathcal{A}_X = \{X^{-1}(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^d)\}. \tag{34.15}$$

Cela est la plus petite tribu sous tribu de $\mathcal{A}$ pour laquelle $X$ est mesurable. Elle sera aussi (le plus) souvent notée $\sigma(X)$.

**Définition 34.9.**
*Nous disons que les variables aléatoires $X_k\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ sont **indépendantes** si les tribus $\mathcal{A}_{X_1}, \dots, \mathcal{A}_{X_n}$ le sont.*

**Remarque 34.10.**
Il n'a de sens de dire que $X_1$ et $X_2$ sont indépendants que si $X_1$ et $X_2$ sont des application dont l'espace de départ est identique.

Si nous voulons modéliser le jet de deux pièce indépendantes, le mauvais choix est de faire $\Omega = \{0,1\}$, y mettre la mesure d'équiprobabilité, et de considérer les deux variables aléatoires

$$X_i(\omega) = \begin{cases} f & \text{si } \omega = 0 \\ p & \text{si } \omega = 1. \end{cases} \tag{34.16}$$

Ces deux variables sont évidement pas indépendantes. Il faut poser $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\}$, y mettre la mesure d'équiprobabilité et poser

$$X_1(x,y) = \begin{cases} f & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases}, \tag{34.17}$$

$$X_2(x,y) = \begin{cases} f & \text{si } y = 0 \\ p & \text{si } y = 1 \end{cases}, \tag{34.18}$$

Ces variables aléatoires sont indépendantes. Par exemple

$$X_1^{-1}\{p\} = \{(1,0),(1,1)\} \tag{34.19a}$$
$$X_2^{-1}\{p\} = \{(0,1),(1,1)\} \tag{34.19b}$$

et on a bien

$$P\big(X_1^{-1}\{p\} \cap X_2^{-1}\{p\}\big) = P\{(1,1)\} = \frac{1}{4} \tag{34.20}$$

ainsi que

$$P\{X_p^{-1}(p)\} = \frac{1}{2} \tag{34.21a}$$

pour $i = 1$ et $i = 2$.

**Proposition 34.11.**
*Soient $(X_k : \Omega \to \mathbb{R}^{d_k})$ des variables aléatoires indépendantes.*

*(1) Si $B_k \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^{d_k})$. Alors*

$$P(X_k \in B_k \forall k \leqslant n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n). \tag{34.22}$$

*(2) Les événements $\{X_i \in B_i\}$ sont indépendants.*

*(3) Les tribus engendrées par des $X_i$ et d'autres sont indépendantes. Plus précisément, si $I$ et $J$ sont deux ensembles disjoints de $\mathbb{N}$ alors les tribus*

$$\sigma(\{X_i, i \in I\}) \tag{34.23}$$

*et*

$$\sigma(\{X_i, i \in J\}) \tag{34.24}$$

*sont indépendantes.*

*Démonstration.* Lorsque nous écrivons $X_i \in B_i$, nous parlons de l'événement

$$(X_i \in B_i) = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_i(\omega) \in B_i\} = X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}_{X_i}. \tag{34.25}$$

Vu que par hypothèse les tribus $(\mathcal{A}_i)$ sont indépendantes, le lemme 34.8 nous montre que

$$P\big(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in B_i\big) = \prod_i P(X_i \in B_i). \tag{34.26}$$

Il reste à voir que l'ensemble $X_i^{-1}(B_i)$ fait partie de la tribu $\mathcal{A}$ de départ. Cela est la définition du fait que l'application $X_i$ soit une variable aléatoire : elle doit être mesurable en tant qu'application

$$X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^d)). \tag{34.27}$$

Les affirmations (2) et (3) ne sont que des façons alternatives d'exprimer la même chose. □

**Lemme 34.12.**
*Les événements $(A_i)_{i=0,\dots,n}$ sont indépendants si et seulement si les événements obtenus en remplaçant certains des $A_i$ par $\complement A_i$ le sont.*

*Démonstration.* Sans perte de généralité, nous pouvons nous contenter de prouver que les événements $\complement A_0, A_1, \dots, A_n$ sont indépendants sous l'hypothèse que les événements $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont indépendants. Soit $I$ un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
P\big(\complement A_0 \bigcap_{i\in I} A_i\big) &= P\big(\bigcap_{i\in I} A_i \setminus \bigcap_{i\in I} A_i \cap A_0\big) && (34.28a)\\
&= P\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) - P\big(\bigcap_{i\in I} A_i \cap A_0\big) && (34.28b)\\
&= P\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)\big(1 - P(\complement A_0)\big) && (34.28c)\\
&= P\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) P(\complement A_0). && (34.28d)
\end{aligned}$$

□

**Proposition 34.13.**
*Les événements $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ sont indépendants si et seulement si les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_n}$ le sont.*

*Démonstration.* La tribu engendrée par la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_k}$ est

$$\mathcal{A}_{\mathbb{1}_{A_k}} = \{\varnothing, A_k, \complement A_k, \Omega\}. \tag{34.29}$$

En effet si $1 \in B$, alors $A_i \subset \mathbb{1}_{A_i}^{-1}(B)$, et si $0 \in B$, alors $\complement A_i \subset \mathbb{1}_{A_i}^{-1}(B)$. Les éléments 0 et 1 sont tous deux soit dans $B$, soit hors de $B$. Cela donne les 4 possibilités énumérées dans (34.29).

Supposons que les événements $(A_i)$ sont indépendants. Nous devons vérifier que les tribus le soient, c'est à dire que les événements $A_i$ et $\complement A_j$ sont indépendants. Cela est une conséquence du lemme 34.12. □

**Théorème 34.14** (Doob[159])**.**
*Soit $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ une variable aléatoire. Une fonction $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^p$ est une variable aléatoire $\mathcal{A}_X$-mesurable si et seulement s'il existe une fonction borélienne $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ telle que $Y = f(X)$.*

**Proposition 34.15.**
*Soient des variables aléatoires $X_k\colon \Omega \to \mathbb{R}^{d_k}$ des variables aléatoires indépendantes et des fonctions boréliennes $f_k\colon \mathbb{R}^{d_k} \to \mathbb{R}^{p_k}$. Alors les variables aléatoires $f_k(X_k)$ sont indépendantes.*

*Démonstration.* Le théorème 34.14 assure que les applications

$$f_k \circ X_k\colon \Omega \to \mathbb{R}^{d_k} \tag{34.30}$$

sont $\mathcal{A}_{X_k}$-mesurables. En particulier pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^{p_k}$, nous avons $X_k^{-1} \circ f_k^{-1}(B) \in \mathcal{A}_{X_k}$. Nous avons donc

$$\sigma(f_k \circ X_k) \subset \sigma(X_k), \tag{34.31}$$

et par conséquent les tribus $\sigma(f_k \circ X_k)$ sont indépendantes étant donné que les tribus $\sigma(X_k)$ le sont. □

**Lemme 34.16** (Lemme de regroupement)**.**
*Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathcal{A})_{i\in I}$ une famille de tribus indépendantes dans $\mathcal{A}$. Si $(M_j)_{j\in J}$ est une partition de $I$, alors les tribus*

$$\mathcal{B}_j = \sigma\Big(\bigcup_{i\in M_j} \mathcal{A}_i\Big) \tag{34.32}$$

*sont indépendantes.*

*Si les variables aléatoires $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ sont indépendantes, et si $f$ et $g$ sont des fonctions mesurables, alors les variables aléatoires $f(X_2, x_3, X_5)$ et $g(X_1, X_4)$ sont indépendantes.*

Une preuve a l'air d'être donnée dans [342].

### 34.2.2 Lois conjointes et indépendance

**Définition 34.17.**
*Deux événements $A$ et $B$ sont dits **indépendants** si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{34.33}$$

Si nous considérons $n$ variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$, la loi du $n$-uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ appelée la **loi conjointe** des lois $X_i$. Dans ce cas, les variables aléatoires $X_i$ elles-mêmes sont dites lois **marginales** de $X$.

**Proposition 34.18.**
*Les variables aléatoires $\{X_i\}$ sont indépendantes si et seulement si*

$$P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}. \tag{34.34}$$

**Définition 34.19.**
*Soient $\{X_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ des variables aléatoires réelles (pas spécialement indépendantes). La* ***densité conjointe*** *de $X_1,\dots,X_n$ est la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui satisfait*

*(1) $f(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0$ pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

*(2) $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$,*

*(3) pour tout $A_i \subset \mathbb{R}$ nous avons*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in A_i) = \int_{\prod_i A_i} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n. \tag{34.35}$$

**Proposition 34.20.**
*Si les variables aléatoires $X_1,\dots X_n$ sont indépendantes et ont des densités $f_{X_1},\dots,f_{X_n}$, alors la variable aléatoire conjointe $X = (X_1,\dots,X_n)$ a pour densité conjointe la fonction*

$$f_X(x_1,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_n}(x_n). \tag{34.36}$$

*Démonstration.* En partant de la définition de l'indépendance et de la fonction de densité conjointe, ainsi qu'en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{A_1\times\dots\times A_n} f_X(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n &= P(X_1\in A_1,\dots,X_n\in A_n)\\ &= P(X_1\in A_1)\dots P(X_n\in A_n)\\ &= \left(\int_{A_1} f_{X_1}(x_1)dx_1\right)\dots\left(\int_{A_n} f_{X_n}(x_n)dx_n\right)\\ &= \int_{A_1\times\dots\times A_n} f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_n}(x_n)dx_1\dots dx_n.\end{aligned} \tag{34.37}$$

La fonction $(x_1,\dots,x_n)\mapsto f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_n}(x_n)$ vérifie donc la condition (3) de la définition 34.19. La vérification des autres conditions est immédiate. □

La proposition suivante provient du fait que la mesure d'une loi conjointe est le produit des mesures lorsque les variables aléatoires sont indépendantes (proposition 34.18).

**Proposition 34.21** ([159])**.**
*Si les variables aléatoires réelles $X_1,\dots,X_n$ sont intégrables et indépendantes, alors leur produit est intégrable et l'espérance du produit est égal au produit des espérances :*

$$E(X_1\cdots X_n) = E(X_1)\dots E(X_n). \tag{34.38}$$

### 34.2.3 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes

Soient $X$ et $Y$, deux variables aléatoires réelles indépendantes. Nous voudrions étudier la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$. Nous commençons par calculer la fonction de répartition en utilisant le résultat de la proposition 34.20 :

$$F_{X+Y}(z) = P(X+Y\leqslant z) = \int_{x+y\leqslant z} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy \tag{34.39a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} dy f_X(x)f_Y(y) \tag{34.39b}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\right) f_X(x)dx \tag{34.39c}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} F_Y(z-x)f_X(x)dx. \tag{34.39d}$$

Pour calculer la fonction de densité de $S$, nous dérivons la fonction de répartition :

$$f_{X+Y}(z) = \frac{dF_{X+Y}}{dz}(z) \tag{34.40a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_Y(z-x) f_X(x) dx, \tag{34.40b}$$

ce qui nous amène à dire que la densité de la somme est le produit de convolution [2] des densités :

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(x-t) f_X(t) dt, \tag{34.41}$$

ou encore $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

Notez que nous avons passé sous le silence la difficulté d'inverser la dérivée et l'intégrale. Un exemple sera donné au point 34.5.8.

**Lemme 34.22.**
*Soient $X$ et $Y$, deux variables aléatoires indépendantes. Alors*

$$E(XY) = E(X)E(Y). \tag{34.42}$$

*Démonstration.* Par indépendance et par proposition 34.20, la fonction de densité conjointe de $X$ et $Y$ vaut $f_{X,Y} = f_X f_Y$. Par conséquent l'utilisation de Fubini sous la forme (13.682) entraine

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xy f_{X,Y}(x,y) dxdy = E(X)E(Y). \tag{34.43}$$

□

Nous dirons tout un tas de chose sur l'indépendance et la variance en 34.5.13, mais pour l'instant nous allons mentionner et démontrer déjà ceci :

**Lemme 34.23.**
*Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Alors*

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y). \tag{34.44}$$

*Démonstration.* Par définition, $\text{Var}(X+Y) = E\big([X+Y-E(X)-E(Y)]^2\big)$. En développant le carré et en utilisant le lemme 34.22,

$$\text{Var}(X+Y) = E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y). \tag{34.45}$$

□

**Exemple 34.24**
Deux variables aléatoires non indépendantes dont la covariance est nulle. Nous considérons la variable aléatoire

$$Z\colon \Omega \to \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\} \tag{34.46}$$

de loi uniforme. C'est à dire que $P\big(Z=z\big) = \frac{1}{4}$ pour tout $z$. Ensuite nous considérons les variables aléatoires $X = \texttt{proj}_1 \circ Z$ et $Y = \texttt{proj}_2 \circ Z$. Toute personne étant capable de compter jusqu'à 4 voit que

$$P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{4} \tag{34.47a}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{2}, \tag{34.47b}$$

2. Définition 24.38.

et les mêmes probabilités pour $Y$. De même $E(X) = E(Y) = 0$. Par conséquent

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) = 0 \tag{34.48}$$

parce que pour tout $\omega \in \Omega$ nous avons soit $X(\omega) = 0$ soit $Y(\omega) = 0$. Ces variables aléatoires $X$ et $Y$ ne sont donc pas corrélées.

Mais elles ne sont pas indépendantes pour autant, comme nous allons le voir pas plus tard qu'immédiatement. Nous avons

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = 0 \tag{34.49}$$

parce que $X$ et $Y$ ne peuvent pas être simultanément nulles, tandis que

$$P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{4}. \tag{34.50}$$

△

### 34.2.4 Espérance

Nous dirons que la variable aléatoire $X$ a un **moment d'ordre** $p$ si $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Si $X$ est **intégrable** (c'est à dire si $X \in L^1$), alors nous définissons l'**espérance** de $X$ par

$$E(X) = \int_\Omega X dP \in \mathbb{R}^d. \tag{34.51}$$

Si $E(X) = 0$ nous disons que la variable aléatoire est **centrée**. La variable aléatoire $X - E(X)$ est la variable aléatoire centrée associée à $X$.

Le **moment** d'ordre $p$ de la variable aléatoire $X$ est l'espérance

$$m_n(X) = E(X^n). \tag{34.52}$$

**Proposition 34.25.**
*Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires (pas spécialement indépendantes), nous avons*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \tag{34.53}$$

Nous donnons la preuve dans le cas de variables aléatoires indépendantes. Le cas plus général de variable aléatoires non indépendantes peut être trouvé dans [343].

*Démonstration.* Nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
E(X + Y) &= \int_{\mathbb{R}} x f_{X+Y}(x) dx && \text{(34.54a)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} x \int_{\mathbb{R}} f_Y(x - t) f_X(t) dt dx && \text{(34.54b)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} f_X(t) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x f_Y(x - t) dx}_{=E(Y)+t} \, dt && \text{(34.54c)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} f_X(t) \big(E(Y) + t\big) dt && \text{(34.54d)}\\
&= E(Y) + \int_{\mathbb{R}} t f_X(t) dt && \text{(34.54e)}\\
&= E(Y) + E(X) && \text{(34.54f)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la proposition 34.41 et le fait que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une densité vaut 1. □

Une application de l'inégalité de Hölder (proposition 24.22) est la suivante. Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires intégrables alors

$$E(XY) \leqslant E(X^2)^{1/2}E(Y^2)^{1/2}. \tag{34.55}$$

En effet

$$E(XY) \leqslant \|XY\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|X\|_{L^2(\Omega)}\|Y\|_{L^2(\Omega)}. \tag{34.56}$$

### 34.2.5 Variance

Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors nous définissons la **variance** de $X$ par

$$\operatorname{Var}(X) = E\big([X - E(X)]^2\big). \tag{34.57}$$

**Proposition 34.26.**
*La variance de la variable aléatoire $X$ peut être exprimée par la formule*

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{34.58}$$

*où $X^2 = X \cdot X$ et $E(X)^2 = E(X) \cdot E(X)$ sont des produits scalaires dans $\mathbb{R}^d$.*

*Démonstration.* De façon explicite, nous avons

$$E\big([X - E(X)]^2\big) = \int_\Omega \big(X(\omega) - E(X)\big) \cdot \big(X(\omega) - E(X)\big)dP(\omega) \tag{34.59}$$

où $E(X) \in \mathbb{R}^d$ est une constante. En développant le produit scalaire nous avons

$$\begin{aligned} E\big([X - E(X)]^2\big) &= E\big(X^2 - 2X \cdot E(X) + E(X)^2\big) && \text{(34.60a)}\\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 && \text{(34.60b)}\\ &= E(X^2) - E(X)^2. && \text{(34.60c)} \end{aligned}$$

□

Nous définissons l'**écart-type** de $X$ par

$$\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}. \tag{34.61}$$

En d'autres termes,

$$\sigma_X = \|X - E(X)\|_{L^2}. \tag{34.62}$$

On définit encore la **moyenne quadratique** de $X$ par

$$\|X\|_{L^2} = \big[E(X^2)\big]^{1/2}. \tag{34.63}$$

La variable aléatoire

$$\bar{V}_n = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 \tag{34.64}$$

est la **variance empirique** de l'échantillon $(X_i)$.

**Lemme 34.27.**
*Si $X$ est une variable aléatoire,*

*(1)* $\operatorname{Var}(ax) = a^2 \operatorname{Var}(X)$ *pour tout $a \in \mathbb{R}$ ;*

*(2) Si de plus $Y$ est une variable aléatoire indépendante de $X$, alors* $\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$.

*Démonstration.* Nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X+Y) &= E(X^2+Y^2+2XY) - \big(E(X)+E(Y)\big)^2 && (34.65a)\\ &= E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)-E(X)^2-E(Y)^2+2E(X)E(Y). && (34.65b)\end{aligned}$$

Étant donné que $X$ et $Y$ sont indépendantes nous avons $E(XY) = E(X)E(Y)$ par le lemme 34.22. □

Si les $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires on considère la **moyenne empirique**

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}. \tag{34.66}$$

### 34.2.6 Covariance

Soient $X$ et $Y$, deux variables aléatoires réelles. Leur **covariance** est définie par

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E\Big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big] \tag{34.67}$$

L'idée est que la covariance devient grande si $X$ et $Y$ s'écartent de leurs moyennes dans le même sens. Il existe une formule alternative :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{34.68}$$

En ce qui concerne les dimensions plus hautes, si $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ est un vecteur aléatoire de carré intégrable, nous définissons

$$\operatorname{Cov}(X) = E\Big[\big(X - E(X)\big) \otimes \big(X - E(X)\big)\Big] \tag{34.69}$$

où par $a \otimes b$ nous entendons la matrice $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$. Cela peut aussi être noté $a^t b$ si l'on fait bien attention à qui est un vecteur colonne et qui est un vecteur ligne.

**Proposition 34.28.**
*Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires non spécialement indépendantes, nous avons*

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y). \tag{34.70}$$

*Démonstration.* Il s'agit d'un calcul en partant de

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X+Y) &= E\big((X+Y)^2\big) - E(X+Y)^2\\ &= E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)\\ &\quad + \big(E(X)+E(Y)\big)^2 - 2E(X)^2 - 2E(X)E(Y)\\ &\quad - 2E(Y)E(X) - 2E(Y)^2.\end{aligned} \tag{34.71}$$

À partir d'ici il s'agit de recombiner tous les termes pour former la formule annoncée. □

Plus généralement nous avons la formule

$$\operatorname{Var}\Big(\sum_i X_i\Big) = \sum_i \operatorname{Var}(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j). \tag{34.72}$$

### 34.2.7 Probabilité conditionnelle : événements

**Proposition-définition 34.29.**
*Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $B \in \mathcal{A}$ avec $P(B) > 0$. Alors avec la formule*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{34.73}$$

*l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ est un espace probabilisé. Nous notons $P_B(A)$ le nombre $P(A|B)$ et nous le nommons* ***probabilité conditionnelle*** *de $A$ sachant $B$.*

*Démonstration.* On vérifie que $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ est un espace de probabilité parce que $P_B(\Omega) = 1$ et

$$P_B(\bigcup_i A_i) = \sum_i P_B(A_i) \tag{34.74}$$

si les $A_i$ sont deux à deux disjoints. □

Une conséquence immédiate de (34.73) est que si $A$ et $B$ sont des événements indépendants alors

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A). \tag{34.75}$$

La probabilité conditionnelle à $B$ est quelque chose qui ne tient compte que de ce qui se passe dans $B$. Si $K$ est un événement tel que $A \cap B = K \cap B$, alors

$$P(A|B) = P(K|B). \tag{34.76}$$

**Théorème 34.30.**
*Soient $(B_n)_{n\geqslant 1}$ une partition finie de $\Omega$ telle que $P(B_i) > 0$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 0$.*

*(1) Si $A$, $B$ et $C$ sont des événements, alors*

$$P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C). \tag{34.77}$$

*(2) Si $P(B) > 0$, alors $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.*

*(3) On a la* ***formule des probabilités totales*** *:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) = \sum_i P(A \cap B_i). \tag{34.78}$$

*(4) On a la* ***formule de Bayes*** *:*

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}. \tag{34.79}$$

*Démonstration.* (1) En développant le membre de droite,

$$\begin{aligned} P(A \cap B|C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= P(A \cap B|C). \end{aligned} \tag{34.80}$$

(2) C'est la définition de $P(A|B)$ et $P(B|A)$.

(3) Vu que les $B_i$ forment une partition, nous avons

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i). \tag{34.81}$$

(4) En utilisant les deux premiers points, nous trouvons

$$\begin{aligned} P(A|B_k)P(B_k) &= P(A \cap B_k) \\ &= P(B_k|A)P(A) \\ &= P(B_k|A) \sum_i P(A|B_i)P(B_i). \end{aligned} \tag{34.82}$$

□

### 34.2.8 Espérance conditionnelle

**Théorème-définition 34.31** (Définition de l'espérance conditionnelle[265])**.**
*Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire intégrable $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Pour chaque sous tribu $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, il existe une (presque partout) unique variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que*

*(1) $Y$ est $\mathcal{F}$-mesurable*

*(2) $Y$ est $P$-intégrable*

*(3) pour tout $B \in \mathcal{F}$,*

$$\int_B X dP = \int_B Y dP. \tag{34.83}$$

*Cette variable aléatoire sera notée $E(X|\mathcal{F})$ pour des raisons qui apparaîtront plus tard.*

*Démonstration.* Remarquons que prendre $Y = X$ ne fonctionne pas parce qu'en général si $\mathcal{O}$ est mesurable dans $\mathbb{R}$, alors $X^{-1}(\mathcal{O})$ est dans la tribu $\mathcal{A}$, mais n'est pas automatiquement dans la tribu $\mathcal{F}$. Il faudra donc un peu plus travailler.

**Unicité** Si $Y_1$ et $Y_2$ vérifient tous les deux les conditions, l'ensemble $\{Y_1 < Y_2\}$ est un élément de $\mathcal{F}$ et nous avons

$$\int_{\{Y_1<Y_2\}} X = \int_{Y_1<Y_2} Y_1 = \int_{Y_1<Y_2} Y_2. \tag{34.84}$$

En particulier nous avons $\int_{\{Y_1<Y_2\}}(Y_1 - Y_2) = 0$ et donc

$$(Y_1 - Y_2)\mathbb{1}_{Y_1-Y_2} = 0 \tag{34.85}$$

presque partout. Le corollaire 13.124 montre alors que $Y_1 - Y_2 \geqslant 0$ presque partout. De la même manière, l'ensemble $\{Y_2 < Y_1\}$ est dans $\mathcal{F}$ et nous trouvons que $Y_2 - Y_1 \geqslant 0$ presque partout. Par conséquent $Y_1 = Y_2$ presque partout.

**Existence dans le cas de carré intégrable** Nous supposons que $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et nous considérons $K$, le sous ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables. Le théorème des projections 23.6 nous indique que

$$L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) = K \oplus K^\perp \tag{34.86}$$

par la décomposition $X = \mathtt{proj}_K X + (X - \mathtt{proj}_K X)$. La variable aléatoire $Y = \mathtt{proj}_K X$ a les propriétés d'être $\mathcal{F}$-mesurable et $\langle Y - X, Z\rangle = 0$ pour tout $Z \in K$. Soit $A \in \mathcal{F}$, si nous considérons $Z = \mathbb{1}_A$, la dernière condition signifie que

$$\int_\Omega X\mathbb{1}_A = \int_\Omega Y\mathbb{1}_A, \tag{34.87}$$

ou encore

$$\int_A Y = \int_A X. \tag{34.88}$$

La variable aléatoire $Y = \mathtt{proj}_K X$ répond donc à la question dans le cas où $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

**Existence en général** Nous considérons maintenant que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Quitte à décomposer $X$ en deux fonctions positives $X_+$ et $X_-$ telles que $X = X_+ + X_-$, nous pouvons supposer que $X$ est positive. Par hypothèse $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ; pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous posons

$$X_n(\omega) = \min\{X(\omega), n\}. \tag{34.89}$$

Étant donné que la mesure $P$ est une mesure de probabilité, les constantes sont intégrables et $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. De plus la suite $(X_n)$ est croissante et

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega). \tag{34.90}$$

Si nous notons encore $K$ l'ensemble des variables aléatoires dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui sont $\mathcal{F}$-mesurables, pour chaque $n$ nous avons donc la variable aléatoire

$$Y_n = \mathtt{proj}_K X_n = E(X_n|\mathcal{F}) \tag{34.91}$$

qui est $\mathcal{F}$-mesurable et telle que

$$\int_A X_n = \int_A Y_n \tag{34.92}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}$. Nous voudrions prouver que la variable aléatoire $Y = \lim_n Y_n$ existe et est la solution au problème, c'est à dire est $E(X|\mathcal{F})$.

Commençons par prouver que $Y_n \geqslant 0$ presque partout. Pour cela nous remarquons que l'ensemble $\{Y_n < 0\}$ est mesurable et

$$0 \geqslant \int_{Y_n<0} Y_n = \int_{Y_n<0} X_n \geqslant 0. \tag{34.93}$$

La première inégalité est évidente et la dernière est due au fait que $X_n$ est positive. Par conséquent

$$\int_{Y_n<0} Y_n = 0 \tag{34.94}$$

et le lemme 13.124 conclut que $P(Y_n < 0) = 0$.

Soit $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire positive dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrons que $\mathtt{proj}_K Z$ est encore positive. Pour cela nous considérons l'ensemble $A = \{\mathtt{proj}_K Z < 0\}$ et les inégalités

$$0 \leqslant \int_A Z = \int_A \mathtt{proj}_K Z \leqslant 0, \tag{34.95}$$

ce qui montre que $\int_A \mathtt{proj}_K Z = 0$ et par conséquent que $P\{\mathtt{proj}_K(Z) < 0\} = 0$. Cela nous montre que la projection depuis $L^2$ conserve la positivité.

Étant donné que $X_{n-1} - X_n \geqslant 0$ nous avons aussi

$$Y_{n-1} - Y_n \geqslant 0 \tag{34.96}$$

La suite de fonctions

$$n \mapsto Y_n = E(X_n|\mathcal{F}) \tag{34.97}$$

est croissante et vérifie le théorème de la convergence monotone :

$$\int_A X = \lim_{n\to\infty} \int_A X_n = \lim_{n\to\infty} \int_A E(X_n|\mathcal{F}) = \int_A \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{F}) = \int_A Y. \tag{34.98}$$

Par conséquent $E(X|\mathcal{F})$ existe et

$$Y = \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{F}). \tag{34.99}$$

□

**34.32.**

Vu la définition 34.31 nous pourrions croire que la variable aléatoire $E(X|\mathcal{F}) = X$ fait l'affaire. Il n'en est rien parce que la variable aléatoire $X$ n'est pas spécialement $\mathcal{F}$-mesurable alors qu'il est requis que $E(X|\mathcal{F})$ le soit. Avec la tribu $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, nous n'avons en général pas que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ pour tout borélien $B$.

Par contre si $\sigma(X)$ est le tribu engendrée par la variable aléatoire $X$, alors $E\big(X|\sigma(X)\big) = X$.

**Définition 34.33.**

*Soit $Z$ une variable aléatoire. L'**espérance conditionnelle** «$X$ sachant $Z$» est la variable aléatoire*

$$E(X|Z) = E(X|\sigma(Z)) \tag{34.100}$$

*où $\sigma(Z)$ est la tribu engendrée par $Z$. Le membre de droite est une variable aléatoire définie en 34.31.*

**Définition 34.34.**
*Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement et $\mathcal{F}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Nous définissons $P(A|\mathcal{F})$ par*

$$P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}). \tag{34.101}$$

*Notons que cela est une variable aléatoire et non un réel. Le membre de droite est l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ par rapport à $\mathcal{F}$ définie en 34.31.*

*Et l'espérance conditionnelle d'un événement par rapport à une variable aléatoire est :*

$$E(A|X) = E\big(A|\sigma(A)\big). \tag{34.102}$$

**Proposition 34.35.**
*Soit une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ainsi qu'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et un événement $A$. Alors*

$$E\big(P(A|X)\big) = P(A). \tag{34.103}$$

*Démonstration.* Tout le point de la preuve est de remarquer que $E(\mathbb{1}_A) = E(\mathbb{1}_A|X)$.

**La formule** $E(\mathbb{1}_A) = E(\mathbb{1}_A|X)$ La notation $E(\mathbb{1}_A|X)$ est un raccourcis pour écrire la variable aléatoire $E\big(\mathbb{1}_A|\sigma(X)\big)$. Cette dernière est l'application $\Omega \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$\int_B E\big(\mathbb{1}_A|\sigma(X)\big) = \int_B \mathbb{1}_A \tag{34.104}$$

pour tout borélien $B$ de $\mathbb{R}^d$ tout en étant $\sigma(X)$-mesurable. Comme expliqué en 34.32, il est tentant de dire $E\big(\mathbb{1}_A|\sigma(X)\big) = \mathbb{1}_A$, mais ce n'est pas le cas parce qu'il n'y a aucune raisons que $\mathbb{1}_A$ soit une application $\sigma(X)$-mesurable. Au niveau des espérances, par contre, l'égalité tient :

$$E\big(E(\mathbb{1}_A|X)\big) = \int_\Omega E(\mathbb{1}_A|X) = \int_\Omega \mathbb{1}_A = E(\mathbb{1}_A) \tag{34.105}$$

où nous avons utilisé le fait que $\Omega$ lui-même soit $\sigma(X)$-mesurable.

**La preuve** Nous avons alors

$$P(A) = E(\mathbb{1}_A) = E\big(E(\mathbb{1}_A|X)\big), \tag{34.106}$$

alors que $E(\mathbb{1}_A|X) = P(A|X)$. En mettant l'un dans l'autre :

$$P(A) = E\big(P(A|X)\big). \tag{34.107}$$

□

**Proposition 34.36** (Transitivité de l'espérance conditionnelle)**.**
*Si $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}$ alors*

$$E\Big(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2\Big) = E(X|\mathcal{B}_2). \tag{34.108}$$

*Démonstration.* Si $B \in \mathcal{B}_2$, nous avons

$$\int_B E\big(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2\big)dP = \int_B E(X|\mathcal{B}_1)dP = \int_B dP. \tag{34.109}$$

La première égalité est la définition de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}_2$. La seconde égalité est celle de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}_1$ et le fait que $B \in \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$. Ce que nous avons prouvé est que

$$E\big(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2\big) \tag{34.110}$$

est une variable aléatoire $\mathcal{B}_2$-mesurable vérifiant la condition

$$\int_B E\big(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2\big) = \int_B E(X|\mathcal{B}_2) \tag{34.111}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}_2$. C'est donc $E(X|\mathcal{B}_2)$ par la partie unicité du théorème 34.31. □

**Proposition 34.37.**
*Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, soit $\mathcal{A}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et $X$, une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable et intégrable. Alors la variable aléatoire $E(X|\mathcal{A})$ du théorème 34.31 est l'unique (presque partout) variable aléatoire à être $\mathcal{A}$-mesurable telle que nous ayons*

$$E\big(E(X|\mathcal{A})Y\big) = E(XY). \tag{34.112}$$

*pour toute variable aléatoire $Y$ $\mathcal{A}$-mesurable.*

*Démonstration.* Supposons pour commencer que $Y$ soit une fonction simple positive, alors $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i}$ et nous avons

$$\int_\Omega E(X|Y) = \sum_i a_i \int_{E_i} E(X|\mathcal{A}) \tag{34.113a}$$

$$= \sum_i a_i \int_{E_i} X \tag{34.113b}$$

$$= \int_\Omega XY. \tag{34.113c}$$

Maintenant si $Y$ est mesurable et bornée, elle est limite croissante de fonctions étagées bornées (proposition 13.107) et le résultat tient par la convergence monotone, théorème 13.129.

Si $Y$ n'est pas positive, nous séparons $Y = Y_+ - Y_-$.

Pour l'unicité, soit $Z$ et $Z'$ deux variables aléatoires telles que pour toute variable aléatoire $Y$,

$$\int_\Omega ZY = \int_\Omega XY = \int_\Omega Z'Y. \tag{34.114}$$

Si nous prenons $Y = \mathbb{1}_{\{Z \neq Z'\}}$, nous avons

$$0 = \int_\Omega (Z - Z')\mathbb{1}_{Z\neq Z'} = \int_{Z\neq Z'} Z - Z', \tag{34.115}$$

d'où le fait que $P(Z \neq Z') = 0$. □

Si $X$ est une variable aléatoire dont la tribu engendrée est indépendante de la tribu $\mathcal{F}$, nous voudrions que la connaissance de $\mathcal{F}$ n'influence pas la connaissance de $X$, c'est à dire que

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X). \tag{34.116}$$

Ce que nous avons est même mieux. Nous avons le lemme suivant.

**Lemme 34.38** ([159])**.**
*Les tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes si et seulement si*

$$E(U|\mathcal{F}_1) = E(U) \tag{34.117}$$

*pour toute variable aléatoire $U$ étant $\mathcal{F}_1$-mesurable.*

Ici, par $E(U)$ nous entendons la variable aléatoire constante prenant la valeur numérique $E(U)$ en tout point de $\Omega$.

*Démonstration.* Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes, alors pour tout $B \in \mathcal{F}_2$ nous avons

$$\int_B U dP = E(U\mathbb{1}_B) \tag{34.118a}$$

$$= E(U)E(\mathbb{1}_B) \tag{34.118b}$$

$$= E(U)\int_\Omega \mathbb{1}_B dP \tag{34.118c}$$

$$= \int_B E(U) dP. \tag{34.118d}$$

Justifications.

— L'intégrale $\int_B U dP$ a un sens même si $B \in \mathcal{F}_2$ alors que $U$ est $\mathcal{F}_1$-mesurable. Le supremum (13.292) définissant l'intégrale est tout de même bien défini, en particulier, l'ensemble sur lequel on prend le supremum est non vide.
— Pour (34.118b), la variable aléatoire $U$ est $\mathcal{F}_1$-mesurable (donc la tribu engendrée par $U$ est dans $\mathcal{F}_1$) alors que $\mathbb{1}_B$ est $\mathcal{F}_2$-mesurable. Les tribus engendrées étant indépendantes, les variables aléatoires le sont et nous pouvons décomposer l'espérance.

Ce que montre le calcul (34.118) est que $E(U)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_2$-mesurable (parce que constante) dont l'intégrale sur chaque élément de $\mathcal{F}_2$ vaut l'intégrale de $U$. Par la partie unicité du théorème 34.31, nous déduisons que $E(U) = E(U|\mathcal{F}_2)$. □

**Corollaire 34.39.**
*Si $X$ est une variable aléatoire et si $\mathcal{F}$ est une tribu, alors*

$$E\big(E(X|\mathcal{F})\big) = E(X). \tag{34.119}$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la définition (34.83) à $B = \Omega$ :

$$E\big(E(X|\mathcal{F})\big) = \int_\Omega E(X|\mathcal{F})(\omega) dP(\omega) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = E(X). \tag{34.120}$$

□

**Exemple 34.40**
Soient $X_1$, $X_2$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ avec probabilité $1/2$ et indépendantes. Nous considérons $S = X_1 + X_2$. La situation est modélisée par l'espace

$$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \tag{34.121}$$

et les variables aléatoires

$$X_i(\omega_1,\omega_2) = \omega_i \tag{34.122a}$$
$$S(\omega_1,\omega_2) = \omega_1 + \omega_2. \tag{34.122b}$$

Pour vérifier que de cette manière nous avons bien que $X_1$ est indépendante de $X_2$, nous commençons par voir les tribus associées. Un ouvert de $\mathbb{R}$ soit contient 0 et 1, soit contient un seul des deux soit n'en contient aucun des deux. En appliquant $X_1^{-1}$ à chacune de ces quatre situations nous voyons que la tribu $\sigma(X_1)$ est

$$\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1) = \big\{\{(0,0),(0,1)\},\{(1,0),(1,1)\},\Omega,\varnothing\}. \tag{34.123}$$

De la même façon nous avons

$$\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1) = \big\{\{(0,0),(1,0)\},\{(0,1),(1,1)\},\Omega,\varnothing\}. \tag{34.124}$$

Nous posons

$$A_0 = \{(0,0),(0,1)\} \tag{34.125a}$$
$$A_1 = \{(1,0),(1,1)\} \tag{34.125b}$$
$$B_0 = \{(0,0),(1,0)\} \tag{34.125c}$$
$$B_1 = \{(0,1),(1,1)\}. \tag{34.125d}$$

Étant donné que $A_i \cap B_j = (i,j)$, nous avons toujours que $P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{4} = P(A_i)P(B_j)$. L'indépendance est donc assurée.

Calculons l'espérance conditionnelle $E(S|\mathcal{F}_1)$. Une fonction $\mathcal{F}_1$-mesurable doit être constante sur $A_0$ et $A_1$, donc l'espérance conditionnelle est une fonction constante sur $A_0$ et $A_1$ dont l'intégrale sur ces ensembles est égale à l'intégrale de $S$. Nous avons en particulier

$$\int_{A_0} E(S|\mathcal{F}_1) = \int_{A_0} S, \tag{34.126}$$

c'est à dire

$$E(S|\mathcal{F}_1)(0,0) + E(S|\mathcal{F}_1)(0,1) = S(0,0) + S(0,1) = 1. \tag{34.127}$$

Nous en concluons que $E(S|\mathcal{F}_1)(0,0) = E(S|\mathcal{F}_1)(0,1) = \frac{1}{2}$. Cela correspond à l'intuition que si on est au point $(0,1)$ ou au point $(0,0)$ en ne sachant que $X_1$, nous ne savons que le premier zéro, et donc l'espérance de la somme est $\frac{1}{2}$.

Un calcul très similaire montre que

$$E(S|\mathcal{F}_1)(1,0) = E(S|\mathcal{F}_1)(1,1) = \frac{3}{2}. \tag{34.128}$$

Cela correspond au fait qu'en ces points, nous ne savons que le fait que le premier tirage a donné 1, et donc que l'espérance est $\frac{3}{2}$.

Complétons ce tour d'horizon en mentionnant que la tribu engendrée par $X_1$ et $X_2$ est la tribu des parties de $\Omega$, de telle façon que l'espérance conditionnelle de $S$ sachant $X_1$ et $X_2$ est égale à $S$. △

**Proposition 34.41** ([159])**.**
*Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X, Y$ deux variables aléatoires sur $\Omega$ réelles. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Nous supposons que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et que $XZ \in L^1(\Omega, P)$. Alors*

$$E(ZX|\mathcal{B}) = ZE(X|\mathcal{B}) \tag{34.129}$$

*presque sûrement.*

*Démonstration.* Nous commençons par prouver que

$$\int_\Omega ZE(X|\mathcal{B}) = \int_\Omega ZX. \tag{34.130}$$

Si $Z = \mathbb{1}_B$ pour un ensemble $B \in \mathcal{B}$, alors cette égalité est vraie par définition de l'espérance conditionnelle[3]. Donc cette égalité est correcte tant que $Z$ est une variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable et étagée. Nous considérons alors, grâce au lemme 13.104, une suite $Z_n$ de variables aléatoires étagées et $\mathcal{B}$-mesurables avec $|Z_n| < Z$. Pour chaque $n$ nous avons donc

$$\int_\Omega Z_n X = \int_\Omega ZE(X|\mathcal{B}). \tag{34.131}$$

Notre idée est de passer à la limite. Vu que $Z$ et $Z_n$ sont bornées (et donc intégrables sur $\Omega$), pour chaque $n$ nous avons $|Z_n X| \leqslant M|X|$ où $M$ majore $Z$ et donc tous les $Z_n$ de façon uniforme vis-à-vis de $n$. Tout cela pour dire que le théorème de la convergence dominée fonctionne et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega Z_n X = \int_\Omega ZX. \tag{34.132}$$

D'autre part vu que $X \in L^1$ et que $\Omega \in \mathcal{B}$ nous avons l'égalité $\int_\Omega E(X|\mathcal{B}) = \int_\Omega X$, ce qui prouve que $|E(X|\mathcal{B})|$ est intégrable. Cela nous permet d'utiliser encore la convergence dominée avec l'inégalité $|Z_n E(X|\mathcal{B})| \leqslant |E(X|\mathcal{B})|$ pour écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega Z_n E(X|\mathcal{B}) = \int_\Omega ZE(X|\mathcal{B}). \tag{34.133}$$

En passant à la limite des deux côtés de (34.131) nous avons donc

$$\int_\Omega ZE(X|\mathcal{B}) = \int_\Omega ZX. \tag{34.134}$$

L'égalité (34.130) est prouvée.

3. Théorème 34.31.

Nous passons maintenant à la preuve de l'égalité demandée : $E(EX|\mathcal{B}) = ZE(X|\mathcal{B})$. Pour cela il faut montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}$ nous avons

$$\int_B ZE(X|\mathcal{B}) = \int_B ZX. \tag{34.135}$$

Cela n'est rien d'autre que l'égalité (34.130) que nous venons de prouver avec $Z\mathbb{1}_B$ au lieu de $Z$. □

**Proposition 34.42.**
*Soit une variable aléatoire réelle $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour toute variable aléatoire $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, il existe une fonction borélienne $\mathcal{A}_Y$-mesurable $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que*

$$E(X|Y) = h \circ Y. \tag{34.136}$$

*Démonstration.* Nous utilisons le résultat de Doob (théorème 34.14). Par définition $E(X|Y)$ est une variable aléatoire réelle $\mathcal{A}_Y$-mesurable, et il existe une fonction borélienne $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $E(X|Y) = f \circ Y$. □

Cette fonction $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nous permet de définir

$$E(X|Z = z) = h(z). \tag{34.137}$$

Cela est l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une valeur donnée d'une autre variable aléatoire.

### 34.2.9 Probabilité conditionnelle : tribu

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

**Lemme 34.43.**
*Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de $\Omega$ en éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints tels que $P(B_i) \neq 0$. Soit $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par les $B_i$. Une variable aléatoire réelle est $\mathcal{F}$-mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque $B_i$.*

**Proposition 34.44.**
*Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de $\Omega$ en éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints tels que $P(B_i) \neq 0$. Soit $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par les $B_i$. Soit une variable aléatoire $X$. Alors nous avons :*

$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left( \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \right) \mathbb{1}_{B_i}. \tag{34.138}$$

*Démonstration.* Si $X$ est une variable aléatoire, alors la variable aléatoire $E(X|\mathcal{F})$ définie en 34.31 est une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable et elle est donc constante sur les ensembles $B_i$ par le lemme 34.43 :

$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \mathbb{1}_{B_i}. \tag{34.139}$$

Étant donné que, par construction, $B_i$ est $\mathcal{F}$-mesurable, nous avons

$$\int_{B_i} X dP = \int_{B_i} E(X|\mathcal{F}) = \sum_j a_j \int_{B_i} \mathbb{1}_{B_j} = \sum_j a_j \delta_{ij} P(B_j) = a_i P(B_i). \tag{34.140}$$

Par conséquent

$$a_i = \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \tag{34.141}$$

et

$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left( \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \right) \mathbb{1}_{B_i}, \tag{34.142}$$

ce qu'il fallait. □

Notons que si $B \in \mathcal{A}$ alors la tribu engendrée par $B$ est aussi celle engendrée par la partition $\{B, \complement B\}$ de $\Omega$. Cette circonstance nous permet d'aller plus loin.

**Proposition 34.45.**
*Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et un événement $B \in \mathcal{A}$ avec sa tribu engendrée $\mathcal{F} = \sigma(B)$. Alors*

$$E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}) = P(A|B)\mathbb{1}_B + P(A|\complement B)\mathbb{1}_{\complement B}. \tag{34.143}$$

*Démonstration.* Nous allons particulariser la formule (34.138). Si $B \in \mathcal{A}$ nous considérons la partition $\{B, \complement B\}$ de $\Omega$ et la tribu engendrée

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, B, \complement B, \Omega\}. \tag{34.144}$$

La formule (34.138) devient

$$E(X|\mathcal{F}) = \left(\frac{1}{P(B)}\int_B X dP\right)\mathbb{1}_B + \left(\frac{1}{P(\complement B)}\int_{\complement B} X dP\right)\mathbb{1}_{\complement B}. \tag{34.145}$$

Si nous considérons $A \in \mathcal{A}$, nous écrivons cette égalité avec $X = \mathbb{1}_A$ pour obtenir

$$E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\mathbb{1}_B + \frac{P(A \cap \complement B)}{P(\complement B)}\mathbb{1}_{\complement B} = P(A|B)\mathbb{1}_B + P(A|\complement B)\mathbb{1}_{\complement B} \tag{34.146}$$

parce que nous avons reconnu la probabilité conditionnelle $P(A|B)$ de la définition 34.29. □

**Remarque 34.46.**
Les nombres $P\big(A|\sigma(B)\big) = P\big(\mathbb{1}_A|\sigma(B)\big)$ n'est pas la probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$.

Il nous reste à définir la probabilité conditionnelle d'un événement relativement à une variable aléatoire.

**Définition 34.47.**
*Si la variable aléatoire $X$ est à valeurs discrètes, nous disons que $P(A|X)$ est la variable aléatoire de valeur*

$$P(A|X)(\omega) = P(A|X = X(\omega)). \tag{34.147}$$

Dans le cas d'une variable aléatoire à valeurs continues, cette définition ne fonctionne pas parce que la condition $X = X(\omega)$ est souvent de probabilité nulle, tandis que c'est toujours une mauvaise idée de conditionner par rapport à un événement de probabilité nulle. C'est la base du paradoxe de Borel. La bonne définition du conditionnement de l'événement $A$ par rapport à la variable aléatoire $X$ est

**Définition 34.48.**
*Si $A$ est un événement et $X$ une variable aléatoire à valeurs continues dans $\mathbb{R}$, nous définissons*

$$P(A|X) = P(A|\sigma(X)) = E\big(\mathbb{1}_A|\sigma(X)\big). \tag{34.148}$$

*La première égalité est une notation. La seconde est la définition.*

Cette définition s'appuie également sur la définition 34.31.

**Proposition 34.49.**
*Si $X$ est une variable aléatoire et si $A$ est un événement, alors*

$$E\big(P(A|X)\big) = P(A). \tag{34.149}$$

*Démonstration.* Nous commençons par le cas discret, c'est à dire $X\colon \Omega \to \mathbb{N}$. Nous notons $p_k = P(X = k)$. En décomposant l'intégrale sur $\Omega$ par rapport à l'union disjointe

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = k\}, \tag{34.150}$$

nous obtenons

$$E\big(P(A|X)\big) = \int_\Omega P(A|X)(\omega)dP(\omega) \tag{34.151a}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} P(A|X = X(\omega))dP(\omega) \tag{34.151b}$$
$$= \sum_k \int_{A_k} \frac{P(A \cap X = k)}{P(X = k)} dP(\omega) \qquad \text{dans } A_k,\ X(\omega) = k \tag{34.151c}$$
$$= \sum_k \frac{1}{p_k} P(A \cap X = k) \underbrace{\int_{A_k} 1 dP(\omega)}_{=P(A_k)=p_k} \tag{34.151d}$$
$$= \sum_k P(A \cap X = k) \tag{34.151e}$$
$$= P(A). \tag{34.151f}$$

Nous devons maintenant prouver la propriété dans le cas où $X$ prend des valeurs continues. Pour cela il suffit d'appliquer le corollaire 34.39 :

$$E\big(E(\mathbb{1}_A|\sigma(A))\big) = E(\mathbb{1}_A) = P(A). \tag{34.152}$$

□

### 34.2.10 Variables de Rademacher indépendantes

Une variable aléatoire de Rademacher est une variable aléatoire qui prend les valeurs 1 et $-1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$. Nous pouvons en décrire une explicitement de la façon suivante. L'espace probabilité est à deux éléments : $\Omega = \{a, b\}$ avec la mesure $P(\{a\}) = P(\{b\}) = \frac{1}{2}$. La variable aléatoire est alors l'application $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par $X(a) = 1$ et $X(b) = -1$.

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires de Rademacher indépendantes. Cela donne $\Omega = \{a, b\}^2$ et

$$\begin{array}{llll} X(a,a) = 1 & X(a,b) = 1 & X(b,a) = -1 & X(b,b) = -1 \\ Y(a,a) = 1 & Y(a,b) = -1 & Y(b,a) = 1 & Y(b,b) = -1 \end{array} \tag{34.153}$$

**Remarque 34.50.**
Si une variable aléatoire d'un certain type est donnée par une application $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, pour construire des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, il faut considérer les variables aléatoires sur (au moins) le produit $\Omega \times \Omega$ munie de la mesure produit.

**Tribu du produit $XY$** Quelle est la tribu de la variable aléatoire produit $XY$ ? Le produit $XY$ peut prendre les valeurs 1 et $-1$. Nous avons

$$(XY)^{-1}(1) = \{(a,a),(b,b)\}(XY)^{-1}(-1) \quad = \{(a,b),(b,a)\} \tag{34.154}$$

La tribu est donc

$$\sigma(XY) = \{\Omega, \varnothing, A, B\} \tag{34.155}$$

avec $A = \{(a,a),(b,b)\}$ et $B = \{(a,b),(b,a)\}$.

**Calcul de $E(X|XY)$** La définition de l'espérance à calculer est le théorème 34.31. Pour chaque élément $B$ de $\sigma(XY)$ nous avons besoin de $\int_B X = \int_B E(X|XY)$. Nous notons $V = E(X|XY)$ pour alléger la notation. Nous avons

$$4\int_A V = V(a,a) + V(b,b) \tag{34.156}$$

et

$$4\int_A X = X(a,a) + X(1,1) = 0. \tag{34.157}$$

Pourquoi le facteur 4 ? Parce que sur $\Omega$ nous avons la mesure produit de celle que dont nous avions parlé sur $\{a,b\}$. C'est la mesure d'équiprobabilité et donc chaque singleton a mesure $1/4$. Pour plus de détails, il y a le théorème 13.160.

Nous en déduisons $V(a,a)+V(b,b)=0$. Mais pour tout $t\in\mathbb{R}$ nous avons $V^{-1}(t)\in\sigma(XY)$ parce que la contrainte est que $V$ soit $XY$-mesurable. En particulier

$$V^{-1}\big(V(a,a)\big) \tag{34.158}$$

est un mesurable qui contient $(a,a)$. C'est donc soit $\Omega$, soit $\{(a,a),(b,b)\}$. Dans les deux cas nous avons $V(a,a)=V(b,b)$ et nous en déduisons $V(a,a)=V(b,b)=0$.

En faisant de même avec $\int_B V=V(a,b)+V(b,a)$ nous déduisons $V(a,b)=V(b,a)=0$ et au final nous avons

$$E(X|XY)=0. \tag{34.159}$$

Cette égalité signifie $E(X|XY)(\omega)=0$ pour tout $\omega\in\Omega$.

**Calcul de $E(X|X+Y)$** Il ne faudrait pas croire que, seulement parce que $X$ a une espérance nulle, nous trouverons une espérance nulle quel que soit le conditionnement. Juste pour le plaisir, nous calculons $E(X|X+Y)$.

La variable aléatoire $X+Y$ peut prendre trois valeurs : $-2$, 0 et 2. La tribu engendrée par $X+Y$ doit en particulier contenir $A=\{(a,a)\}$, $B=\{(b,b)\}$ et $C=\{(a,b),(b,a)\}$.

Nous notons $V=E\big(X|\sigma(X+Y)\big)$. Vu que

$$\int_A V=\int_A V, \tag{34.160}$$

nous avons $V(a,a)=X(a,a)=1$. Même chose pour $B$ qui donne $V(b,b)=X(b,b)=-1$. En ce qui concerne l'intégrale sur $C$ nous avons

$$V(a,b)+V(b,a)=X(a,b)+X(b,a)=0. \tag{34.161}$$

Par ailleurs l'ensemble $V^{-1}\big(V(a,b)\big)$ est un ensemble mesurable qui doit au moins contenir $(a,b)$. Vu la tribu que nous avons, cela doit également contenir $(b,a)$, de telle sorte que $V(a,b)=V(b,a)$. La relation (34.161) nous permet alors de conclure que $V(a,b)=V(b,a)=0$.

Quoi qu'il en soit, l'espérance conditionnelle $E(XY|X+Y)$ n'est pas nulle.

**Calcul de $E(XY|\sigma(XY))$** . Celle-là, elle est facile par 34.32 : c'est $XY$.

Nous aurions pu croire que si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors

$$E(XY|\mathcal{A})=E(X|\mathcal{A})E(Y|\mathcal{A}). \tag{34.162}$$

L'exemple que nous venons de faire montre qu'il n'en est rien.

**Exemple 34.51**([344])
Un autre exemple, peut-être plus simple, pour contredire l'équation (34.162). Soient $X$ et $Y$ des expériences indépendantes de pile ou face non truquées. Les résultats sont représentés par 0 et 1. Nous notons $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par l'événement «les résultats des deux lancers sont différents» ; c'est à dire la tribu engendrée par l'événement $A=(1,0),(1,0)$. La variable aléatoire $X$ et la tribu $\mathcal{A}$ sont indépendants (définition 34.6), donc, donc $E(X|\mathcal{A})=E(X)=1/2$. Pareil pour Y. En revanche, le produit $XY$ est nul sur $A$ donc $E(XY|\mathcal{A})$ aussi. Ça ne peut donc être égal à la constante $1/4=(1/2)^2$. △

### 34.2.11 Un petit paradoxe

Attention : ce qui est écrit ici est ma réflexion personnelle sur le sujet. Merci de me dire si je me trompe.

Soit une famille dont vous savez seulement qu'il y a exactement deux enfants. Trois questions :

(1) Vous frappez, une fille ouvre la porte et dit «Bonjour, je suis l'aînée». Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

(2) Vous frappez, une fille ouvre la porte et dit «Bonjour». Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

(3) Vous demandez aux parents s'il y a au moins une fille, ils répondent «oui». Vous demandez si l'autre est une fille, quelle est la probabilité qu'ils répondent «oui» ?

Dans les trois cas l'intuition dit que la probabilité est 1/2. Il semble que de plus la (2) et la (3) soient les mêmes parce que l'on sait qu'il y a une fille et on se demande quelle est la probabilité qu'il y ait deux filles.

Nous allons voir ça de plus près.

#### 34.2.11.1 «Bonjour, je suis l'aînée»

**Résolution** Si nous notons $X_0$ et $X_1$ les variables aléatoires donnant le sexe des deux enfants, ce sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec $P(X_i = f) = \frac{1}{2}$. La formule (34.73) de la probabilité conditionnelle ainsi que l'indépendance donnent :

$$P(X_1 = f | X_2 = f) = \frac{P(X_1 = f, X_2 = f)}{P(X_2 = f)}. \tag{34.163}$$

Le numérateur vaut $\frac{1}{4}$ et le dénominateur vaut $\frac{1}{2}$ ; le résultat vaut $\frac{1}{2}$. Fin de l'histoire.

**Simulation** Voici un petit programme qui simule la situation. Il retourne clairement 1/2.

```
#! /usr/bin/python3
# -*- coding: utf8 -*-

"""
Vous frappez à la porte d'une famille qui a deux enfants. Une ↩
   fille ouvre la porte et vous dit "Je suis l'aînée".
Quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?
"""


import random

def famille():
    """
    return a pair of 'f' and 'g'.
    """
    a=[random.choice( ['g','f'] )]
    a.append(random.choice( ['g','f'] ))
    return a

def toctoc():
    """
    - Create a family with two children.
    - Pick the second one, the elder.
```

```
    - if it is a 'g', return None.
    - if it is a 'f', return the other one.
    """
    F=famille()
    if F[1] != 'f':
        return None
    else :
        if F[0]=='f':
            return 1
        else :
            return 0

N_girl_opens=0
N_girl_other=0
for k in range(1,10000):
    res=toctoc()
    if res is not None:
        N_girl_opens = N_girl_opens+1
        N_girl_other = N_girl_other + res

proba=N_girl_other/N_girl_opens
print(proba)        # ~0.5, intuitively correct.
```

tex/sage/simul_famille_aine.py

#### 34.2.11.2 «Bonjour»

Nous savons maintenant qu'un des enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ? Naïvement on croirait que la probabilité est également $\frac{1}{2}$. Un raisonnement moins naïf montre le contraire. Et nous allons voir qu'un raisonnement encore moins naïf montre que la probabilité est bien $\frac{1}{2}$.

**Premier raisonnement** Voici le raisonnement qui est, à mon avis, faux. Vu que l'enfant qui ouvre la porte est une fille, la famille a une des compositions suivantes : $fg$, $ff$ ou $gf$. Le cas où une fille ouvre la porte *et* que l'autre est également une fille est seulement le cas $ff$ dont la probabilité est $\frac{1}{3}$. Pour justifier cela nous considérons le couple de variables aléatoires $(X_1, X_2)$ et le conditionnement $A = \{X_1 = f\} \cup \{X_2 = f\}$ : évidemment $P(A) = \frac{3}{4}$. Nous calculons facilement la loi du couple $(X_1, X_2)$ conditionné à $A$ :

$$P(X_1 = f, X_2 = f|A) = \frac{P(\{X_1 = f, X_2 = f\} \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}; \tag{34.164}$$

de même,

$$P(X_1 = g, X_2 = f|A) = \frac{1}{3} \tag{34.165a}$$

$$P(X_1 = f, X_2 = g|A) = \frac{1}{3} \tag{34.165b}$$

$$P(X_1 = g, X_2 = g|A) = 0 \tag{34.165c}$$

Donc sachant $A$, la probabilité que la famille soit constituée de deux filles est $\frac{1}{3}$.

**Simulation** Pour en avoir le cœur net, nous avons écrit ce programme :

```python
#! /usr/bin/python3
# -*- coding: utf8 -*-

"""
Vous frappez à la porte d'une famille qui a deux enfants. Une fille ouvre la porte.
Quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?
"""


import random

def famille():
    """
    return a pair of 'f' and 'g'
    """
    a=[random.choice( ['g','f'] )]
    a.append(random.choice( ['g','f'] ))
    return a

def toctoc():
    """
    - Create a family with two children.
    - Choose one (the one who opens the door)
    - if it is a 'g', return None.
    - if it is a 'f', return the other one.
    """
    F=famille()
    s=random.choice([0,1])
    if F[s] != 'f':
        return None
    else :
        t=(s+1)%2
        if F[t]=='f':
            return 1
        else :
            return 0

N_girl_opens=0
N_girl_other=0
for k in range(1,10000):
    res=toctoc()
    if res is not None:
        N_girl_opens = N_girl_opens+1
        N_girl_other = N_girl_other + res

proba=N_girl_other/N_girl_opens
print(proba)        # ~0.5, intuitively correct.
```

tex/sage/simul_famille_simple.py

Le faisant tourner, la réponse est sans appel : la fréquence observée est beaucoup plus proche de 0.5 que de 0.33 ou 0.66.

**La vraie réponse** Nous considérons les variables aléatoires $X_0, X_1 : \Omega_E \to \{f, g\}$ avec probabilité $\frac{1}{2}$. De plus nous considérons une nouvelle variable aléatoire qui donne le numéro de l'enfant qui ouvre la porte :

$$\sigma : \Omega_C \to \{0, 1\}. \tag{34.166}$$

Nous devons calculer

$$P\big(X_{1-\sigma} = f | X_\sigma = f\big) = \frac{P\big(X_{1-\sigma} = f, X_\sigma = f\big)}{P(X_\sigma = f)}. \tag{34.167}$$

L'univers de toute cette expérience est, donnée en triples pour les valeurs $(X_1, X_2, \sigma)$ :

(1) $g, g, 0$ (3) $g, f, 0$ (5) $f, g, 0$ (7) $f, f, 0$
(2) $g, g, 1$ (4) $g, f, 1$ (6) $f, g, 1$ (8) $f, f, 1$.

Cela fait 8 cas en tout. Nous avons

$$\{X_\sigma = f\} = \{(g, f, 1), (f, g, 0), (f, f, 0), (f, f, 1)\}. \tag{34.168}$$

et

$$\{X_{1-\sigma} = f\} \cap \{X_\sigma = f\} = \{(f, f, 0), (f, f, 1)\}. \tag{34.169}$$

Donc

$$P\big(X_{1-\sigma} = f, X_\sigma = f\big) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \tag{34.170}$$

et

$$P(X_\sigma = f) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \tag{34.171}$$

Au final,

$$P\big(X_{1-\sigma} = f | X_\sigma = f\big) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \tag{34.172}$$

#### 34.2.11.3 Le parent qui répond aux questions

Nous avons une famille de deux enfants dont nous savons qu'au moins un des deux est une fille. Quelle est la probabilité que la famille contienne deux filles ? Cela est a priori la même question que celle où une fille ouvre la porte sans dire si elle est l'aînée ou non.

**Simulation** Commençons par la simulation :

```
#! /usr/bin/python3
# -*- coding: utf8 -*-

"""
Vous savez qu'une famille a deux enfants.
Vous demandez à un parent si il y a une fille.
Réponse : Oui.
Question : quelle est la probabilité que ce soient deux filles ?
"""


import random

def famille():
    """
    return a pair of 'f' and 'g'.
```

```
    """
    a=[random.choice( ['g','f'] )]
    a.append(random.choice( ['g','f'] ))
    return a

def toctoc():
    """
    - Create a family with two children.
    - If 'gg', there are no girls -> return None
    - If 'gf', there is a girl but the other is a boy -> 0
    - If 'fg', there is a girl but the other is a boy -> 0
    - If 'ff', there is a girl and the other is a girl -> 1
    """
    F=famille()
    if F==['g','g'] :
        return None
    if F==['g','f']:
        return 0
    if F==['f','g']:
        return 0
    if F==['f','f']:
        return 1

N_at_least_one_girl=0
N_two_girls=0
for k in range(1,10000):
    res=toctoc()
    if res is not None:
        N_at_least_one_girl=N_at_least_one_girl+1
        N_two_girls=N_two_girls+res

proba=N_two_girls/N_at_least_one_girl
print(proba)        # ~0.333. Beware !
```

tex/sage/simul_famille_une_fille.py

Et là, bing, la réponse est clairement plutôt 0.33 que 0.5.

**Résolution** Nous avons les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ qui valent 0 ou 1 suivant que l'enfant soit une fille ou un garçon ; ce sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Nous définissons la variable aléatoire somme

$$S = X_1 + X_2 \tag{34.173}$$

qui compte le nombre de filles. La question est de calculer

$$P(S = 2|S \geqslant 1) = \frac{P(S = 2 \cap S \geqslant 1)}{P(S \geqslant 1)} = \frac{P(S = 2)}{P(S \geqslant 1)}. \tag{34.174}$$

L'événement $S = 2$ est réduit au singleton $\{ff\}$ et sa probabilité est $\frac{1}{4}$. Au contraire l'événement $S \geqslant 1$ est l'ensemble $\{fg, gf, ff\}$ et sa probabilité est $\frac{3}{4}$. Nous avons donc

$$P(S = 2|S \geqslant 1) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}. \tag{34.175}$$

Et là, la réponse est 1/3 et non 1/2 comme d'aucuns auraient pu le croire.

**Précision** Notons que l'événement $S \geqslant 1$ n'est pas le même que l'événement $X_\sigma = f$. En effet

$$S \geqslant 1 = \{(ff,1),(ff,2),(fg,1),(fg,2),(gf,1),(gf,2)\} \tag{34.176}$$

tandis que

$$\{X_\sigma = f\} = \{(ff,1),(ff,2),(fg,1),(gf,2)\}. \tag{34.177}$$

#### 34.2.11.4 À propos des simulations

Si vous lisez ces lignes avec l'intention de passer l'agrégation en utilisant Sage à l'épreuve de modélisation, vous devez être capable de refaire les trois simulations. Notez de plus que les simulations ici sont données avec python3 alors que Sage utilise Python2. Je ne vous dit pas si ça change quelque chose.

Allez oui, je vous dit. Si vous changez dans `simul_famille_une_fille.py` la première ligne pour utiliser python2 au lieu de python3, le résultat affiché sera `0` et non `0.333`. La raison est que dans Python2, l'opérateur `/` entre deux entiers est une **division entière**. Autrement dit : le résultat 0.33 est arrondi à zéro.

Solution : forcer python à interpréter le `/` comme une vraie division. Pour Sage, ça donne ceci comme début de programme :

```
1 #! /usr/bin/sage
2 # -*- coding: utf8 -*-
3
4 from __future__ import division
```

tex/frido/codeSnip_3.py

Importez toujours `division` de `__future__` .

Ah oui, et dernière remarque : pour autant que je le sache, le jour de l'oral, vous n'aurez que Sage en mode notebook. Je ne sais pas si l'import fonctionne aussi bien.

Sinon vous pouvez forcer la division dans les `float` de la façon suivante : `a/float(b)`.

### 34.2.12 Inégalité de Jensen

**Proposition 34.52** (Inégalité de Jensen)**.**
*Soit $g$ une fonction convexe*[4] *sur $\mathbb{R}$ et une variable aléatoire $Y \in L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$ telle que $g\circ Y$ soit également $L^1$. Alors*

$$g\big(E(Y|\mathcal{F})\big) \leqslant E\big((g\circ Y)|\mathcal{F}\big). \tag{34.178}$$

*Démonstration.* La convexité de $g$ et la proposition 18.86 nous donnent deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n x + b_n). \tag{34.179}$$

Nous avons alors

$$a_n E(Y|\mathcal{F}) \overset{p.s.}{=} E\big(a_n Y + b_n|\mathcal{F}\big) \leqslant E(g\circ Y|\mathcal{F}). \tag{34.180}$$

L'inégalité est due au fait que $g\circ Y$ est le supremum sur les $n$ de $a_nY+b_n$. Pour chaque $n$, l'inégalité (34.180) est fausse sur un ensemble de mesure nulle $R_n \subset \Omega$. L'union

$$R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \tag{34.181}$$

est encore de mesure nulle. Sur $\Omega\backslash R$, nous avons

$$a_n E(Y|\mathcal{F}) + b_n \leqslant E(g\circ Y|\mathcal{F}). \tag{34.182}$$

4. Définition 18.74.

Vu que cela est vrai presque partout et pour tout $n$ nous passons a supremum et nous avons encore presque partout l'inégalité

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\big(a_nE(Y|\mathcal{F})+b_n\big)\leqslant E(g\circ Y|\mathcal{F}). \tag{34.183}$$

□

Si nous ne nous intéressons pas à $E(Y|\mathcal{F})$ mais seulement à $E(Y)$, alors une démonstration plus simple est donnée sur Wikipédia[345].

### 34.2.13 Fonction de répartition

**Définition 34.53.**
*Si $X$ est une variable aléatoire réelle, nous définissons sa* ***fonction de répartition*** *par*

$$\begin{aligned}F_X\colon\mathbb{R}&\to[0,1]\\ F_X(x)&=P(X\leqslant x).\end{aligned} \tag{34.184}$$

**Remarque 34.54.**
La fonction de répartition est discontinue en $a$ si $P(X=a)>0$. En particulier nous ne pouvons pas dire

$$P(X\geqslant a)=1-F_X(a). \tag{34.185}$$

### 34.2.14 Fonction caractéristique

**Définition 34.55.**
*La* ***fonction caractéristique*** *de la variable aléatoire $X\colon\Omega\to\mathbb{R}$ est la fonction réelle définie par*

$$\Phi_X(t)=E(e^{itX}). \tag{34.186}$$

Une autre façon d'écrire la définition est

$$\Phi_X(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itX}dP_X(x), \tag{34.187}$$

ou encore, si $X$ a une densité $f_X$,

$$\Phi_X(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}f_X(x)dx \tag{34.188}$$

Nous reconnaissons la transformée de Fourier :

$$\Phi_X(t)=\hat{f}_X(-t/2\pi). \tag{34.189}$$

La proposition suivante se déduit en utilisant le théorème de dérivation sous l'intégrale 14.68.

**Proposition 34.56.**
*Soit $X$ une variable aléatoire qui accepte un moment d'ordre $r\geqslant 1$. Alors la fonction caractéristique $\Phi_X$ est $r$ fois continument dérivable et*

$$\Phi_X^{(r)}(t)=E\big((iX)^re^{itX}\big). \tag{34.190}$$

*Démonstration.* Nous étudions la fonction

$$\Phi(t)=\int_{\Omega}e^{itX(\omega)}dP(\omega). \tag{34.191}$$

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}\times\Omega&\to\mathbb{R}\\ (t,\omega)&\mapsto e^{itX(\omega)}.\end{aligned} \tag{34.192}$$

et nous regardons si ce contexte vérifie les hypothèses du théorème 14.68.

(1) Étant donné que $X$ est mesurable, $f$ sera mesurable.

(2) La fonction $t \mapsto e^{itX(\omega)}$ est absolument continue pour chaque $\omega$.

(3) Note : par rapport aux notations du théorème 14.68, nous avons ici $A = \mathbb{R}$. Prenons donc un intervalle (compact) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et calculons

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, \omega) = iX(\omega)e^{itX}, \tag{34.193}$$

et

$$\int_a^b \int_\Omega \left| iX(\omega)e^{itX(\omega)} \right| d\omega\, dt = \int_a^b \int_\Omega |X(\omega)| d\omega\, dt. \tag{34.194}$$

Par hypothèse $X$ accepte un moment d'ordre 1, de sorte que l'intégrale par rapport à $\omega$ converge vers un nombre qui ne dépend pas de $t$. L'intégrale sur $t$ ne pose alors aucun problèmes.

Par conséquent nous pouvons effectuer la première dérivation :

$$\Phi'(t) = \frac{d\Phi}{dt}(t) = \int_\Omega iX(\omega)e^{itX(\omega)} d\omega = E(iXe^{itX}) \tag{34.195}$$

et la fonction $\Phi'$ est absolument continue. Ce dernier point est important parce que c'est lui qui permet de faire la récurrence et passer à l'ordre deux.

Le résultat ressort alors en dérivant successivement l'expression (34.193). □

**Exemple 34.57**
Sachant la fonction caractéristique de $X$, nous pouvons calculer les moments. Par exemple

$$E(X^2) = \Phi''_X(0). \tag{34.196}$$

△

**Théorème 34.58.**
*Si $\Phi_X = \Phi_Y$, alors $P_X = P_Y$.*

Notons que cela n'implique pas que $X = Y$. En effet $X$ et $Y$ peuvent même être définis sur des espaces probabilisés différents.

Dans le cas d'une variable aléatoire vectorielle, nous définissons $\Phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi_X(v) = E\big(e^{i\langle v, X\rangle}\big) \tag{34.197}$$

### 34.2.15 Fonction génératrice des moments, transformée de Laplace

Soit $X$ une variable aléatoire. Sa **transformée de Laplace** ou **fonction génératrice des moments** est la fonction

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \tag{34.198}$$

pour chaque $t$ tel que cette espérance existe.

**Théorème 34.59** ([346])**.**
*Soit $X$ une variable aléatoire réelle et*

$$I_X = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } E(e^{tX}) \text{ existe}\}. \tag{34.199}$$

*La fonction*

$$\begin{aligned} M_X : I_X &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto E(e^{tX}) \end{aligned} \tag{34.200}$$

*est la **transformée de Laplace** de $X$.*

*(1) $I_X$ est un intervalle contenant 0.*

*(2) Si $I_X$ n'est pas réduit à $\{0\}$ alors $M_X$ se développe en série entière*

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n. \tag{34.201}$$

*(3) Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors $I_{X+Y} = I_X \cap I_Y$ et*

$$M_{X+Y} = M_X M_Y \tag{34.202}$$

*sur $I_{X+Y}$.*

*Démonstration.* Le fait que 0 soit dans $I_X$ est évident : $E(1) = 1$. Pour montrer que $I_X$ est un intervalle nous prenons $z \in I_X$ et $0 < s < z$ ou $z < s < 0$, puis nous montrons que $s \in I_X$. Il faut remarquer que dans tous les cas,

$$e^{sX} \leqslant 1 + e^{zX}. \tag{34.203}$$

En effet soit $sX$ et $zX$ sont tous deux à gauche de zéro et alors ils sont tous deux plus petit que 1 ; soit ils sont tous deux à droite de 0 et alors $e^{zX} > e^{sX}$ par croissance de l'exponentielle. Nous avons donc dans tous les cas que

$$E(e^{sX}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{sX} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_X(x)(1 + e^{zx}) = 1 + E(e^{zX}). \tag{34.204}$$

Soit maintenant $a > 0$ tel que $[-a, a] \in I_X$. Étant donné que $e^{a|X|} < e^{aX} e^{-aX}$, l'espérance $E(e^{a|X|})$ existe toujours pour $|t|$. Nous avons

$$\left| M_X(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{E(X^n)}{n!} t^n \right| = \left| E\Big( e^{tX} - \sum_{n=0}^{N} \frac{X^n}{n!} t^n \Big) \right| \tag{34.205a}$$

$$= \left| E\Big( \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{X^n}{n!} t^n \Big) \right| \tag{34.205b}$$

$$\leqslant E\left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX|^n}{n!} \right). \tag{34.205c}$$

Maintenant le but est de prendre la limite $N \to \infty$ en inversant la limite et l'espérance par le théorème de la convergence dominée (13.134). L'intégrale à traiter est

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX(\omega)|^n}{n!} dP(\omega). \tag{34.206}$$

L'intégrante est uniformément borné (en $N$) par $e^{tX(\omega)}$, qui est intégrable par hypothèse (choix de $t$). Du coup

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX(\omega)|^n}{n!} dP(\omega) = E\left( \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX|^n}{n!} \right) = 0. \tag{34.207}$$

□

### 34.2.16 Loi d'une variable aléatoire

La **loi** de la variable aléatoire $X$, notée $P_X$ est la mesure image de $P$ par $X$, c'est à dire

$$P_X(B) = P(X \in B) \tag{34.208}$$

pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^d$. Note :

$$P(X \in B) = P\big(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in B\}\big) = P\big(X^{-1}(B)\big). \tag{34.209}$$

En particulier $P_X$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ parce que

$$P_X(\mathbb{R}^d) = P(\Omega) = 1. \tag{34.210}$$

Si $Q$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, nous notons $X \sim Q$ si $P_X = Q$. Nous disons alors que «$X$ suit la loi $Q$».

La proposition suivante permet de calculer en pratique les intégrales qui définissent par exemple l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

**Proposition 34.60** (Théorème de transfert[347])**.**
*Si $X$ est une variable aléatoire, alors*

$$E(f \circ X) = \int_\Omega f\big(X(\omega)\big)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dP_X(x) \tag{34.211}$$

*dès que $f\colon \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ est telle qu'une des deux intégrales existe. En particulier, ça marche si $f$ est borélienne.*

En utilisant cette proposition nous trouvons une formule pratique pour l'espérance d'une variable aléatoire réelle :

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} xdP_X(x), \tag{34.212}$$

en vertu de la proposition 34.60 appliquée à la fonction $f(x) = x$.

**Proposition 34.61.**
*Une variable aléatoire réelle $X$ est intégrable si et seulement si $P(x = \pm\infty) = 0$ et*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|dP_X(x) < \infty. \tag{34.213}$$

Le lien entre la densité $f_X$ de la variable aléatoire $X$ et sa loi est

$$P_X(A) = \int_A f_X(x)dx \tag{34.214}$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$. Le lien entre la mesure de Lebesgue et celle de la loi de $X$ est alors donné par

$$dP_X(x) = f_X(x)dx. \tag{34.215}$$

En particulier l'espérance de $X$ peut être calculée à partir de sa densité via la formule

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xdP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx. \tag{34.216}$$

### 34.2.17 Changement de variables

**Théorème 34.62.**
*Soit $\mathcal{O}$, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{O}'$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ ainsi qu'un difféomorphisme $C^1$ $\varphi\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$. Soit $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire prenant presque sûrement ses valeurs dans $\mathcal{O}$. Si nous supposons que $X$ a la densité $f_X$, alors la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$ accepte la densité $f_Y\colon \mathcal{O}' \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$f_Y(v) = f_X\big(\varphi^{-1}(v)\big)|J_{\varphi^{-1}}(v)|. \tag{34.217}$$

*Démonstration.* Nous devons vérifier la relation

$$P(Y \in B) = \int_B f_Y(v)dv \tag{34.218}$$

pour tout borélien $B \subset \mathcal{O}'$. Nous avons

$$\begin{aligned} P(Y \in B) &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_B(v) dP_Y(v) && (34.219a)\\ &= E(\mathbb{1}_B \circ Y) && (34.219b)\\ &= E\big((\mathbb{1}_B \circ \varphi) \circ X\big) && (34.219c)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbb{1}_B \circ \varphi)(u) dP_X(u) && (34.219d)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbb{1}_B \circ \varphi)(u) f_X(u) du. && (34.219e) \end{aligned}$$

À ce niveau, nous utilisons la formule de changement de variables du théorème 13.224. Nous trouvons alors

$$P(Y \in B) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_B\big(\varphi^{-1}(v)\big) f_X\big(\varphi^{-1}(v)\big) |J_{\varphi^{-1}}(v)| dv. \tag{34.220}$$

□

## 34.3 Convergence

Soient $X_i$ des variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nous disons que $X_i$ converge **presque sûrement** vers la variable aléatoire $X$ et nous notons

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \tag{34.221}$$

si

$$P\big(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \to X(\omega)\}\big) = 1 \tag{34.222}$$

où la convergence $X_n(\omega) \to X(\omega)$ est la convergence usuelle dans $\mathbb{R}$.

**Lemme 34.63.**
*Nous avons $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si et seulement s'il existe un événement $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) = 1$ et tel que $X_n(\omega) \to X(\omega)$ pour tout $\omega \in A$.*

**Lemme 34.64.**
*Si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, alors*

$$X \wedge n \xrightarrow{p.s.} X \tag{34.223}$$

*Démonstration.* Si $\omega \in \{X = \infty\}$ alors $(X \wedge n)(\omega) = n$ et d'accord. Si par contre $\omega \in \{X < \infty\}$ alors il existe $N$ tel que si $n \geqslant N$ alors $n \geqslant T(\omega)$ et pour ces grandes valeurs de $n$ nous avons $(T \wedge n)(\omega) = T(\omega)$. □

**Définition 34.65** ([348])**.**
*Nous disons que les variables aléatoires réelles $X_n$ convergent **en probabilité** vers la variable aléatoire $X$ si pour tout $\eta > 0$, on a*

$$P\big(|X_n - X| \geqslant \eta\big) \to 0, \tag{34.224}$$

*et on note*

$$X_n \xrightarrow{P} X. \tag{34.225}$$

**Définition 34.66** (Convergence en loi)**.**
*Nous disons que $X_n$ converge vers $X$ **en loi** vers la variable aléatoire $X$ et nous notons*

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \tag{34.226}$$

*si pour toute fonction continue et bornée $g$ nous avons*

$$E\big(g(X_n)\big) \to E\big(g(X)\big) = \int g dP_X. \tag{34.227}$$

**Proposition 34.67.**
*Deux autres caractérisations de la convergence en loi.*

(1) *Nous avons* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ *si et seulement si*

$$\Phi_{X_n}(v) \to \Phi_X(v) \tag{34.228}$$

*pour tout* $v \in \mathbb{R}^d$. *Ici* $\Phi_X$ *est la fonction caractéristique de* $X$.

(2) *Dans la définition de la convergence en loi nous pouvons indifféremment utiliser les fonctions continues et bornées, les fonctions continues à support compact ou les fonctions bornées uniformément continues.*

**Proposition 34.68.**
*Les types de convergence sont reliées par les implications suivantes :*

$$\textit{presque sûre} \;\Rightarrow\; \textit{en probabilité} \;\Rightarrow\; \textit{en loi.} \tag{34.229}$$

La convergence en loi n'implique pas la convergence en probabilité, et par conséquent pas non plus la convergence presque certaine.

Dans le cas particulier $d = 1$ nous avons quelques critères supplémentaires.

**Proposition 34.69.**
*Supposons que les variables aléatoires* $X_n$ *soient réelles, et notons* $F_n$ *la fonction de répartition de* $X_n$. *Si* $F_n(x) \to F(x)$ *pour tout* $x$ *dans l'ensemble des points de continuité de* $F$, *alors* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

**Proposition 34.70.**
*Si les* $X_n$ *sont des variables aléatoires réelles positives, et si* $X$ *est une variable aléatoire positive, alors* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ *si les transformées de Laplace des fonctions de répartition convergent ponctuellement, c'est à dire si*

$$E\big(e^{-\alpha X_n}\big) \to E\big(e^{-\alpha X}\big) \tag{34.230}$$

*pour tout* $\alpha \geqslant 0$.

**Proposition 34.71.**
*Si les* $X_n$ *et* $X$ *sont des variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans* $\{x_0, x_1, \ldots\}$ *alors* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ *si et seulement si*

$$P(X_n = x_k) \to P(X = x_k) \tag{34.231}$$

*pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

**Proposition 34.72** ([341])**.**
*Soient* $X_n$ *et* $X$ *des variables aléatoires réelles. Nous avons*

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \tag{34.232}$$

*si et seulement si pour tout* $t$ *où* $F_X$ *est continue,*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t). \tag{34.233}$$

**Proposition 34.73** ([341])**.**
*Soit* $X_n$ *une suite de variables aléatoires* $\Omega \to \mathbb{R}^d$ *et* $a \in \mathbb{R}^d$. *Si* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a$, *alors*

$$X_n \xrightarrow{P} a. \tag{34.234}$$

*Démonstration.* Quitte à passer aux composantes, nous pouvons supposer que $d = 1$. Soit $\eta > 0$ ; nous savons que l'inégalité $|x| > a$ a pour solution $x > a$ ou $x < -a$. Dans notre cas,

$$\begin{aligned}
P\big(|X_n - a| > \eta\big) &= P(X_n - a > \eta) + P(X_n - a < -\eta) && \text{(34.235a)}\\
&= P(X_n > \eta + a) + P(X < a - \eta) && \text{(34.235b)}\\
&= 1 - P(X_n \leqslant \eta + a) + P(X_n \leqslant a - \eta) - P(X_n = a - \eta) && \text{(34.235c)}\\
&\leqslant 1 - F_{X_n}(\eta + a) + F_{X_n}(a - \eta) && \text{(34.235d)}
\end{aligned}$$

où la majoration est l'oubli du terme $P(X_n = a-\eta)$, lequel est positif ou nul et $F_{X_n}$ est la fonction de répartition de $X_n$, définition 34.53. Nous allons utiliser la proposition 34.72. La fonction de répartition de la variable aléatoire constante $X = a$ est donnée par

$$F_a(t) = P(a \leqslant t) = \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t-a). \tag{34.236}$$

Par conséquent, la convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a$ nous montre que

$$F_{X_n}(t) \to \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t-a) \tag{34.237}$$

pour tout $t \neq a$ parce que $t = 0$ est un point de discontinuité de $\mathbb{1}_{[0,\infty[}$. Nous avons par conséquent

$$P\big(|X_n - a| > \eta\big) = 1 - \mathbb{1}_{[0,\infty[}(\eta) + \mathbb{1}_{[0,\infty[}(-\eta) = 1 - 1 + 0 = 0 \tag{34.238}$$

parce que $\eta > 0$. □

Le lemme de Slutsky sera utilisé en combinaison avec la proposition 34.75 pour calculer des intervalles de confiance, voir par exemple ce qui se passe autour de l'équation (35.126).

**Lemme 34.74** (Slutsky[349])**.**
*Soient $X_n$ et $Y_n$ des suites de variables aléatoires réelles telles que*

$$\begin{aligned} X_n &\xrightarrow{\mathscr{L}} X \\ Y_n &\xrightarrow{P} a \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{34.239}$$

*Alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X, a)$.*

*Démonstration.* Étant donné que $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a$, nous avons $Y_n \xrightarrow{P} a$ par la proposition 34.73. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ; nous devons prouver que

$$E\big(f(X_n, Y_n)\big) \to E\big(f(X, a)\big). \tag{34.240}$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous avons

$$E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X, a)\|\big) \leqslant E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\big) + E\big(\|f(X_n, a) - f(X, a)\|\big). \tag{34.241}$$

La fonction $g(t) = f(t, a)$ étant continue et bornée, la convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ donne

$$E\big(\|f(X_n, a) - f(X, a)\|\big) \to 0. \tag{34.242}$$

Étudions à présent le premier terme du membre de droite de (34.241). Pour tout $\eta > 0$ et toute variables aléatoires $Z$ et $Z'$ nous avons

$$E(Z) = E(Z\mathbb{1}_{|Z'|<\eta}) + E(Z\mathbb{1}_{|Z'|\geqslant\eta}). \tag{34.243}$$

Nous décomposons donc le premier terme de (34.241) en

$$\begin{aligned} E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\big) = {} & E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\mathbb{1}_{|Y_n-a|<\eta}\big) \\ & + E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\mathbb{1}_{|Y_n-a|\geqslant\eta}\big). \end{aligned} \tag{34.244}$$

Choisissons maintenant une valeur de $\eta$ telle que

$$|(x, y) - (x', y')| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| \leqslant \epsilon. \tag{34.245}$$

Un tel $\eta$ existe par l'uniforme continuité de $f$. Dans le premier terme, $|Y_n - a| < \eta$, par conséquent

$$\|(X_n, Y_n) - (X_n, a)\| = |Y_n - a| < \eta \tag{34.246}$$

et donc

$$\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\| \leqslant \epsilon. \tag{34.247}$$

Le premier terme devient donc

$$E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\mathbb{1}_{|Y_n-a|<\eta}\big) \leqslant \epsilon E(\mathbb{1}_{|Y_n-a|<\eta}) \leqslant \epsilon \tag{34.248}$$

parce que $E(\mathbb{1}_A) = P(A) \leqslant 1$. Pour le second terme de (34.244) nous effectuons la majoration

$$\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\| \leqslant 2\|f\|_\infty \tag{34.249}$$

tandis que la convergence $Y_n \xrightarrow{P} a$ entraine

$$P\big(|Y_n - a| \geqslant \eta\big). \tag{34.250}$$

□

**Proposition 34.75** ([350])**.**
*Soient $X_i$ des variables aléatoires telles que*

$$X_i \xrightarrow{\mathscr{L}} X \tag{34.251}$$

*et $h$, une fonction mesurable sur l'espace d'arrivée de $X_i$. Soit $C$ l'ensemble des points de continuité de $h$ au sens*

$$C = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } h \text{ est continue en } X_i(\omega)\}. \tag{34.252}$$

*Alors si $P(X \in C) = 1$, nous avons*

$$h(X_i) \xrightarrow{\mathscr{L}} h(X). \tag{34.253}$$

Une conséquence de cette proposition couplée au lemme de Slutsky est le résultats suivant, qui est donné sous le nom de théorème de Slutsky sur wikipédia.

**Corollaire 34.76.**
*En reprenant les notations du lemme de Slutsky, si*

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \tag{34.254a}$$

$$Y_n \xrightarrow{P} a, \tag{34.254b}$$

*alors*

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X + a \tag{34.255a}$$

$$X_nY_n \xrightarrow{\mathscr{L}} aX \tag{34.255b}$$

$$Y_n^{-1}X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a^{-1}X \tag{34.255c}$$

(34.255d)

*pourvu que $a$ soit inversible.*

**Lemme 34.77** (Borel-Cantelli)**.**
*Soit $(A_n)$ une suite d'événements (avec $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n$).*

*(1) Si $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$ converge, alors*

$$P(A_n \text{ i.s.}) = 0. \tag{34.256}$$

*(2) Si la somme $\sum_n P(A_n)$ diverge, et si de plus les $A_i$ sont indépendants, alors*

$$P(A_n \text{ i.s.}) = 1. \tag{34.257}$$

La notation $P(A_n \text{ i.s.})$ signifie «infiniment souvent», c'est à dire

$$P(A_n \text{ i.s.}) = P\big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant N} A_k\big) = P(\limsup A_n) \tag{34.258}$$

Une façon de paraphraser le lemme de Borel-Cantelli est que nous avons l'alternative

$$P(\limsup A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{n\geqslant 0} P(A_n) < \infty \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{34.259}$$

**Proposition 34.78.**
*Soit $X_n$, une suite de variables aléatoires et $X$ une variable aléatoires. Si*

$$\sum_n P\big(\|X_n - X\| > \eta\big) < \infty \tag{34.260}$$

*pour tout $\epsilon$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.*

*Démonstration.* Fixons $\epsilon$ et considérons les événements $A_n = \|X_n - X\| > \epsilon$. L'hypothèse dit que

$$\sum_n P(A_{n,\epsilon}) < \infty \tag{34.261}$$

et le lemme de Borel-Cantelli implique que

$$P(\limsup \|X_n - X\| > \epsilon) = 0. \tag{34.262}$$

Un élément $\omega$ est dans $\limsup A_n$ s'il est contenu dans tous les $A_n$, par conséquent, pour chaque $\epsilon$ nous avons l'inclusion

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \to X(\omega)\} \subset \complement \limsup A_n. \tag{34.263}$$

Nous pouvons aller plus loin et écrire

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \to X(\omega)\} = \complement\{\omega \in \Omega \text{ tel que } \|X_n - X\| > \epsilon, \forall \epsilon > 0\}. \tag{34.264}$$

Or la probabilité de l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } \|X_n - X\| > \epsilon\} \tag{34.265}$$

est 0 pour chaque $\epsilon$, et par conséquent la probabilité du membre de droite de (34.264) est 1. □

**Exemple 34.79**
Considérons une suite de 0 et de 1 dans laquelle le 1 arrive avec une probabilité $p$ et le 0 avec une probabilité $1 - p$. Une telle suite est modélisée par une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes de paramètre $p$.

Question : une telle suite contient elle une infinité de 1 ? Considérons les événements indépendants $A_n = \{X_n = 1\}$. Nous avons

$$\sum_n P(A_n) = \sum_n P(X_n = 1) = \sum_n p = \infty. \tag{34.266}$$

Par Borel-Cantelli et son expression (34.259), nous avons alors

$$P(\limsup A_n) = 1. \tag{34.267}$$

Donc une infinité d'événements $A_n$ se produisent, et nous avons bien une infinité de 1 dans la suite.

Remarque : dans ce raisonnement nous pouvons considérer une probabilité non constante $p_n$ tant que la série $\sum_n p_n$ diverge. △

**Exemple 34.80**
À propos de maximum. La fonction $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par $h(x_1, \dots, x_d) = \max_i\{x_i\}$ est une fonction continue. Nous voudrions prouver que si on a une famille (finie en $i = 1, \dots, l$) de suites (en $n$) variables aléatoires $X_n^{(i)} \xrightarrow{p.s.} a$ convergeant toutes vers la même limite $a$, alors

$$M_n = \max_i\{X_n^{(i)}\} \xrightarrow{p.s.} a. \tag{34.268}$$

D'abord si nous avons $l$ suite numériques $(x_n^{(i)})$, alors la suite

$$M_n = \max_i x_n^{(i)} \tag{34.269}$$

converge vers la même limite. En effet si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre $N_i$ l'entier tel que $|x_n^{(i)} - a| \leqslant \epsilon$ pour tout $n > N_i$. Et ensuite on prend $N > \max\{N_i\}$.

Si maintenant au lieu de suites numériques, nous avons des variables aléatoires, le résultat reste valable. Nous cherchons à prouver que

$$P\Big(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } \max\{X_n^{(i)}(\omega)\} \to a\}\Big) = 1. \tag{34.270}$$

Par ce que nous venons de dire sur les suites numériques, un élément $\omega$ n'est pas dans cet ensemble seulement s'il y a un $\infty$ pour lequel $X_n^{(i)}$ ne converge pas vers $a$. Or cela, pour chaque $i$ est un événement de probabilité zéro.

Les $\omega$ qui ne fonctionneront pas dans l'équation (34.270) sont ceux de la réunion d'un ensemble fini d'ensembles de probabilité nulle. C'est donc de probabilité nulle. △

## 34.4 Loi des grands nombres, théorème central limite

### 34.4.1 Loi des grands nombres

**Lemme 34.81** (Inégalité de Markov[351])**.**
*Soit une variable aléatoire $X \in L^p$ et $\epsilon > 0$. Nous avons*

$$P(|X| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{1}{\epsilon^r} E(|X|^r). \tag{34.271}$$

*Démonstration.* Nous avons

$$E(|X|^r) \geqslant \int_{|X|\geqslant\epsilon} X(\omega) dP(\omega) \geqslant \epsilon^r \int_{|X|\geqslant\epsilon} dP = \epsilon^r P(|X| \geqslant \epsilon). \tag{34.272}$$

□

**Corollaire 34.82** ([351])**.**
*Soit $\phi$, une fonction croissante et positive ou nulle sur l'intervalle $I$. Soit aussi une variable aléatoire $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $P(Y \in I) = 1$. Alors pour tout $b \in I$ tel que $\phi(b) > 0$ nous avons*

$$P(Y \geqslant b) \leqslant \frac{E\big[\phi(Y)\big]}{\phi(b)}. \tag{34.273}$$

**Théorème 34.83** (Loi forte des grands nombres)**.**
*Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires réelles*

*(1) indépendantes et identiquement distribuées,*

*(2) intégrables (c'est à dire dans $L^1$),*

*alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} E(X_1). \tag{34.274}$$

Note : étant donné que les variables aléatoires sont identiquement distribuées, nous avons évidemment $E(X_1) = E(X_2) = \ldots$

**Problèmes et choses à faire**

Est-ce que les variables aléatoires doivent vraiment être réelles ?

**Corollaire 34.84.**
*Si les variables aléatoires réelles $X_n$ sont*

*(1) indépendantes et identiquement distribuées,*

*(2) dans $L^2$*

*alors*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} E(X_1). \tag{34.275}$$

*Démonstration.* Nous voulons prouver que pour tout $\eta > 0$,

$$P\big(|\bar{X}_n - E(X_1)| > \eta\big) \to 0. \tag{34.276}$$

Remarquons d'abord que les variables aléatoires $X_n$ étant identiquement distribuées, $E(\bar{X}_n) = E(X_1)$ parce que $E(X_i) = E(X_1)$ pour tout $i$. L'inégalité de Markov avec $r = 2$ nous donne

$$P\big(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| > \eta\big) \leqslant \frac{1}{\eta^2} E\big(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)|^2\big) \tag{34.277}$$

où nous reconnaissons $E\big(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)|^2\big) = \operatorname{Var}(\bar{X}_n)$. Par la proposition 34.27 nous avons $\operatorname{Var}(\bar{X}_n) = \operatorname{Var}(X_1)/n$ et par conséquent

$$P\big(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| > \frac{1}{n\eta^2} \operatorname{Var}(X_1), \tag{34.278}$$

qui tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. □

**Proposition 34.85.**
*Soient $X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $X_n \geqslant 0$. Nous acceptons $E(X_1) = \infty$, c'est à dire que nous relaxons la condition $X_n \in L^1$ par rapport à la loi des grands nombres.*

*Alors*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} E(X_1) \in [0, \infty]. \tag{34.279}$$

*Démonstration.* Si $E(X_1) < \infty$, nous sommes dans le cas de la loi des grands nombres. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ nous considérons la suite de variables aléatoires

$$X_n^{(N)} = \min(X_n, N). \tag{34.280}$$

Nous avons évidement $\bar{X}_n^{(N)} \leqslant \bar{X}_n$. Les variables aléatoires $X_n^{(N)}$ étant bornées par $N$, elles vérifient la loi des grands nombres pour chaque $N$ séparément. Par conséquent nous avons pour chaque $N$ la limite

$$\bar{X}_n^{(N)} \to E(X_1^{(N)}) \tag{34.281}$$

Nous supposons que $E(X_1) = \infty$, par conséquent $\lim_{N\to\infty} E(X_1^{(N)}) = \infty$. Soit $\eta > 0$ et choisissons $N$ de telle manière à avoir

$$E(X_1^{(N)}) > \eta + 1. \tag{34.282}$$

La limite (34.281) nous permet de trouver $n_0$ tel que pour tout $n > n_0$ nous ayons $\bar{X}_n^{(N)} > \eta$. Au final,

$$\eta < \bar{X}_n^{(N)} \leqslant \bar{X}_n, \tag{34.283}$$

ce qui montre que $\bar{X}_n \to \infty$. □

**Exemple 34.86**
La loi des grands nombres justifie la pratique courante d'approximer une grandeur physique par la moyenne empirique d'un grand nombre de mesures. △

**Exemple 34.87**
Citons ici le dernier paragraphe de *Le mystère de Marie Roget* par Edgar Allan Poe, traduit par Charles Baudelaire [5].

> Rien, par exemple, n'est plus difficile que de convaincre le lecteur non spécialiste que, si un joueur de dés a amené les six deux fois coup sur coup, ce fait est une raison suffisante de parier gros que le troisième coup ne ramènera pas les six. Une opinion de ce genre est généralement rejetée tout d'abord par l'intelligence. On ne comprend pas comment les deux coups déjà joués, et qui sont maintenant complètement enfouis dans le Passé, peuvent avoir de l'influence sur le coup qui n'existe que dans le Futur. La chance pour amener les six semble être précisément ce qu'elle était à n'importe quel moment, c'est-à-dire soumise seulement à l'influence de tous les coups divers que peuvent amener les dés. Et c'est là une réflexion qui semble si parfaitement évidente, que tout effort pour la controverser est plus souvent accueilli par un sourire moqueur que par une condescendance attentive.

Dans le cours de la nouvelle, Edgar Poe cite et utilise la théorie des probabilités avec une justesse inaccoutumée dans la littérature. Mais dans ce paragraphe final, Poe montre de façon la plus formelle qu'il n'a *rien* compris à la loi des grands nombres. △

### 34.4.2 Théorème central limite

**Lemme 34.88.**
*Soit $z_n \to z$ une suite convergente dans $\mathbb{C}$. Alors*

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \to e^z. \tag{34.284}$$

**Théorème 34.89.**
*Si les variables aléatoires $X_n$ sont*

*(1) indépendantes et identiquement distribuées de loi parente $X$,*

*(2) $X_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{A})$,*

*alors nous notons $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ et nous avons*

$$\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1). \tag{34.285}$$

*Démonstration.* Nous allons écrire la démonstration dans le cas de variables aléatoires réelles. La proposition 34.67 dit que la suite $X_n$ converge en loi vers $X$ si et seulement si les fonctions caractéristiques convergent ponctuellement. Nous devons donc prouver, pour chaque [6] $t \in \mathbb{R}$, que

$$\Phi_{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \to \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t). \tag{34.286}$$

5. Disponible sur `https://fr.wikisource.org/wiki/Le_Mystère_de_Marie_Roget`
6. Chuck Norris peut *vraiment* le faire pour *chaque* $t \in \mathbb{R}$

Supposons dans un premier temps que $E(X_i) = 0$ et $\sigma(X_i) = 1$. Dans ce cas nous considérons la fonction

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = E\big(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k}\big) \tag{34.287a}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E\big(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_1}\big) \tag{34.287b}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \tag{34.287c}$$

$$= \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n. \tag{34.287d}$$

Cette quantité est a priori complexe ; nous ne pouvons donc pas immédiatement passer au logarithme. Nous pouvons par contre utiliser un développement en puissances de $t$ en nous servant de la proposition 34.56 et de l'hypothèse comme quoi $X_1 \in L^2$ :

$$\Phi_{X_1}(t) = \Phi_{X_1}(0) + \Phi'_{X_1}(0)t + \Phi''_{X_1}(0)\frac{t^2}{2} + \alpha(t)t^2 \tag{34.288}$$

où $\alpha$ est une fonction qui a la propriété $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$.

En utilisant les hypothèses et la formule de dérivation de la fonction caractéristique,

$$\Phi_{X_1}(0) = 1 \tag{34.289a}$$

$$\Phi'_{X_1}(0) = E\big((iX)\big) = 0 \tag{34.289b}$$

$$\Phi''_{X_1}(0) = E(-X^2) = -\operatorname{Var}(X_1) = -1. \tag{34.289c}$$

Nous avons donc

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n}}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{t^2}{n}\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}_{\in\mathbb{C}}, \tag{34.290}$$

de telle sorte que, en considérant une valeur fixée de $t$,

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{\frac{t^2}{2} + \beta_n}{n}\right)^n \tag{34.291}$$

où $\beta_n = t^2\alpha(t/\sqrt{n})$. Nous avons bien entendu $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$.

Nous pouvons appliquer le lemme 34.88 pour obtenir la limite

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = e^{-t^2/2}. \tag{34.292}$$

La convergence (34.286) est par conséquent prouvée dans le cas où $E(X_i) = 0$ et $\operatorname{Var}(X_i) = 1$.

Considérons maintenant des variables aléatoires avec $E(X_i) = m$ et $\operatorname{Var}(X_i) = \sigma^2$. Elles peuvent être écrites sous la forme

$$X_i = \sigma X_i + m \tag{34.293}$$

où $X'_i$ est d'espérance nulle et de variance un. Nous avons alors

$$S_n = \sigma\sum_{i=1}^{n} X'_i + nm, \tag{34.294}$$

et

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S'_n}{\sqrt{n}} \tag{34.295}$$

où $S'_n = \sum_i X'_i$. L'étude de la variable aléatoire

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \tag{34.296}$$

revient donc à celle de $S'_n/\sqrt{n}$ qui vient d'être effectuée. □

**34.90.**
À propos du théorème central limite 34.89. Si pour une certaine variable aléatoire $X$ on a $E(X) = m$, alors nous n'avons pas forcément $P(X = m + a) = P(X = m - a)$. Est-ce que le théorème central limite permet cependant d'affirmer que dans un certaine mesure nous avons

$$P(\bar{X}_n = m + a) = P(\bar{X}_n = m - a) \tag{34.297}$$

lorsque $n$ est grand ?

Tel quelle, l'équation (34.297) est en général fausse pour chaque $n$ parce qu'il existe des distributions non symétriques. Mais bien entendu les deux membres tendent vers zéro pour $n \to \infty$. Mais cela n'est pas lié à la symétrie de la distribution gaussienne. C'est seulement le fait que la gaussienne n'a pas de masses ponctuelles.

Par contre, il y a effectivement une assurance de symétrie pour $\bar{X}_n$ lorsque $n \to \infty$. Le fait est que $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ où $X$ est une gaussienne. La fonction de répartition de $X$ est continue partout et la proposition 34.72 nous dit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(t). \tag{34.298}$$

Vu que le nombre $P\big(\bar{X}_n \in B(m + a, \delta)\big)$ peut être exprimé avec des sommes et différences $F_{X_n}$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\bar{X}_n \in B(m + a, \delta)\big) = P\big(X \in B(m + a, \delta)\big). \tag{34.299}$$

Par symétrie de la gaussienne le membre de droite est égal à $P\big(X \in B(m - a, \delta)\big)$ et nous avons bien

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\bar{X}_n \in B(m + a, \delta)\big) = \lim_{n\to\infty} P\big(\bar{X}_n \in B(m - a, \delta)\big). \tag{34.300}$$

**Remarque 34.91.**
Le théorème central limite s'applique quelle que soit la distribution des variables aléatoires $X_i$ (dans les limites de hypothèses) ; en particulier il ne dit rien sur la moyenne des $X_i$. Il dit seulement que l'écart de la moyenne «mesurée» à la moyenne «théorique» est une variable aléatoire gaussienne si on a mesuré assez de fois.

Autrement dit, si la durée d'attente à la poste est de 5 minutes, et si j'y vais 2000 fois, alors la probabilité que ma moyenne d'attente soit de 4 minutes est la même que la probabilité qu'elle soit de 6 minutes [7].

**Problèmes et choses à faire**

La remarque 34.91 est une interprétation personnelle. J'aimerais avoir l'avis de quelqu'un de plus compétent.

**Remarque 34.92.**
Nous pouvons obtenir la limite (34.292) d'une façon alternative. Nous considérons la détermination du logarithme complexe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ ; cela est une fonction analytique (théorème 25.59) vérifiant l'équation

$$e^{\ln(z)} = z \tag{34.301}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ et le développement

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}. \tag{34.302}$$

En particulier, $\ln(1 + z) = z + z\alpha(z)$ où $\lim_{z\to 0} \alpha(z) = 0$. Nous reprenons à l'équation (34.291) en

7. Et en l'occurrence, cette probabilité est nulle parce qu'on est en train de parler de variable aléatoire continue, mais vous voyez l'idée.

fixant $t$. Nous avons

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \exp\left[\ln\left(\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t)\right)\right] \tag{34.303a}$$

$$= \exp\left[n\ln\left(1+\frac{-\frac{t^2}{2}-\beta_n}{n}\right)\right] \tag{34.303b}$$

$$= \exp\left[-\frac{t^2}{2}-\beta_n+\big(-\frac{t^2}{2}-\beta_n\big)\alpha\left(\frac{-\frac{t^2}{2}-\beta_n}{n}\right)\right]. \tag{34.303c}$$

À la limite $n\to 0$ nous tombons sur $e^{-t^2/2}$.

**Remarque 34.93.**
Étant donné que la variable aléatoire

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \tag{34.304}$$

converge en loi vers $\mathscr{N}(0,1)$, nous avons la convergence des fonctions de répartition partout où la fonction de répartition de la normale est continue [8] (donc sur tout $\mathbb{R}$). En particulier,

$$\left|P\left(\frac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\right|\to 0. \tag{34.305}$$

Nous avons la borne de **Berry-Esséen** qui donne une estimation de la vitesse de convergence : si $X\in L^3$, alors il existe une constante $C$, indépendante de $x$, des $X_i$ et de $n$ telle que

$$\left|P\left(\frac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\right|\leqslant\frac{X\mu_3}{\sigma^3\sqrt{n}} \tag{34.306}$$

où $\mu_3 = E\big(|X_1-m|^3\big)$ est le moment d'ordre 3 de $X$. La chose à retenir est que la convergence est à la vitesse de $1/\sqrt{n}$.

En dimension $d>1$, nous avons encore un théorème central limite.

**Théorème 34.94.**
*Si $d>1$, et si nous avons des variables aléatoires $X_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ avec*

*(1) les $X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées*

*(2) les $X_n$ sont dans $L^2$.*

*Alors nous notons $X_1=(X_1^{(1)},\dots,X_1^{(d)})$. Nous avons*

$$\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathscr{L}}\mathscr{N}(0,\Sigma) \tag{34.307}$$

*où $\Sigma$ est ma matrice de covariance du vecteur aléatoire $X_1$ :*

$$\Sigma=\big(\operatorname{Cov}(X_1^{(1),\dots,X_1^{(d)}})\big)_{i,j=1,\dots,d}. \tag{34.308}$$

### 34.4.3 Marche aléatoire

Nous considérons un mobile qui se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$. À chaque pas de temps, nous supposons qu'il va faire un pas à gauche avec une probabilité $p$ et un pas à droite avec une probabilité $(1-p)$. Nous nous demandons quel est le mouvement du mobile sur le long terme.

La position $S_n$ du mobile à l'instant $n$ est donnée par

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{34.309}$$

8. Proposition 34.72.

où $X_i$ est le pas effectué à l'instant $i$. Ce sont des variables de Bernoulli indépendantes avec

$$X_i \overset{\mathscr{L}}{=} p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1 \tag{34.310}$$

c'est à dire

$$P(X_i = -1) = p \tag{34.311a}$$
$$P(X_i = 1) = 1 - p. \tag{34.311b}$$

Ces variables vérifient les hypothèses de la loi des grands nombres :

(1) elles sont indépendantes et identiquement distribuées,

(2) elles sont intégrables.

Pour le second point, le calcul est

$$\int_\Omega |X_i| dP = \int_{\mathbb{R}} |x| dP_X = \int_{\mathbb{R}} |x|(p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1) = |1-p| + |p| = 1. \tag{34.312}$$

Nous avons par conséquent

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} E(X_1) = (1-2p) \tag{34.313}$$

et

$$\frac{S_n}{n} \to (1-2p). \tag{34.314}$$

Si $p \neq 1/2$ nous pouvons conclure que

(1) si $p > 1/2$, alors $S_n \xrightarrow{p.s.} -\infty$

(2) si $p < 1/2$, alors $S_n \xrightarrow{p.s.} \infty$.

De plus nous connaissons la vitesse de divergence : elle est linéaire. Le mobile suit essentiellement l'équation $p(n) = (1-2p)n$.

**Remarque 34.95.**
Cela ne traite pas le cas $p = 1/2$. Dans ce cas, nous pouvons simplement dire que $S_n = o(n)$.

## 34.5 Les lois usuelles

### 34.5.1 Loi de Bernoulli

Une expérience de Bernoulli consiste à tirer au hasard un 0 ou un 1 avec une probabilité $p$ de tomber sur 1 et $1-p$ de tomber sur zéro. Il s'agit donc d'une expérience qui réussit ou qui rate.

Le cas typique est une urne avec des boules indiscernables blanches ou noires. La probabilité $p$ est la proportion de blanches dans l'urne (avec remise entre les tirages). Dans ce cas, nous avons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\Omega$ représente l'ensemble des boules, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de $\Omega$ et $P$ est l'équiprobabilité sur $\Omega$. Une variable aléatoire est une application

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\to \{0,1\} \\ \omega &\mapsto \text{couleur de la boule } \omega. \end{aligned} \tag{34.315}$$

Nous notons $\mathscr{B}(1,p)$ la loi de Bernoulli. Elle a une expression très simple :

$$\mathscr{B}(0,1)\big(\{1\}\big) = p \tag{34.316a}$$
$$\mathscr{B}(0,1)\big(\{0\}\big) = 1-p \tag{34.316b}$$

Une variable aléatoire réelle est de **Bernoulli** de paramètre $p$ $(0 < p < 1)$ si

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R} \tag{34.317}$$

avec $P(x = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. En tant que mesure sur $\mathbb{R}$, nous avons

$$P_X = p\delta_1 + (1 - p)\delta_0. \tag{34.318}$$

Une fonction $h$ qui réalise le supremum de la formule (13.292) est par exemple une fonction en escalier qui vaut en $x$ le plus petit entier plus grand ou égal à $x$. L'espérance d'une loi de Bernoulli est alors

$$E(x) = p. \tag{34.319}$$

Étant donné que la variable aléatoire $X$ prend seulement les valeurs 0 et 1, nous avons pour tout ensemble mesurable $B$

$$P_{X^2}(B) = P(X^2 \in B) = P(X \in B), \tag{34.320}$$

et par conséquent $P_{X^2} = P_X$ et $E(X^2) = E(X)$. Nous trouvons donc la variance

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p). \tag{34.321}$$

### 34.5.2 Loi binomiale

Une expérience binomiale consiste à répéter $n$ expériences de Bernoulli de paramètre $p$ et de compter le nombre de réussites. Une telle expérience peut être réalisée selon la procédure suivante.

Soit une urne contenant $N$ boules dont une proportion $p$ de 1 et $1 - p$ de 0. Une expérience binomiale de paramètres $n$ et $p$ consistera à prendre $n$ boules *avec remise* et à compter le nombre de 1 obtenus.

En termes d'espaces probabilisé, nous avons $\Omega$ qui est l'ensemble des tuple de taille $n$ à valeurs dans $\{0, 1\}$, la tribu $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de $\Omega$, et la probabilité $P$ est l'équiprobabilité :

$$P(\omega) = \frac{1}{N^n} \tag{34.322}$$

si il y a $N$ boules dans l'urne. Nous construisons alors la variable aléatoire

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \tag{34.323}$$

où $\omega$ est une suite de taille $n$ de 0 et de 1.

Calculons $P(X = k)$. Il s'agit de considérer tous les sous-ensembles de taille $n$ de $\Omega$ contenant exactement $k$ fois 1. Il y a $\binom{n}{k}$ manière de décider lesquelles des $n$ boules seront blanches. Ensuite, chaque boule blanche peut être choisie parmi les $m$ boules disponibles, et chaque boule noire peut être choisie parmi les $(N - m)$ disponibles. Nous avons donc

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{m^k (N - m)^{n-k}}{N^k}. \tag{34.324}$$

En effet la mesure de probabilité sur $\Omega$ est la mesure de comptage renormalisée par le cardinal de $\Omega$ qui vaut $N^m$. Étant donné que $p = m/N$, nous transformons facilement (34.324) en

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \tag{34.325}$$

Une variable aléatoire de loi binomiale étant une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, l'espérance [9] et la variance [10] s'obtiennent en sommant les espérances et variances termes à terme :

$$E(X) = np \tag{34.326}$$

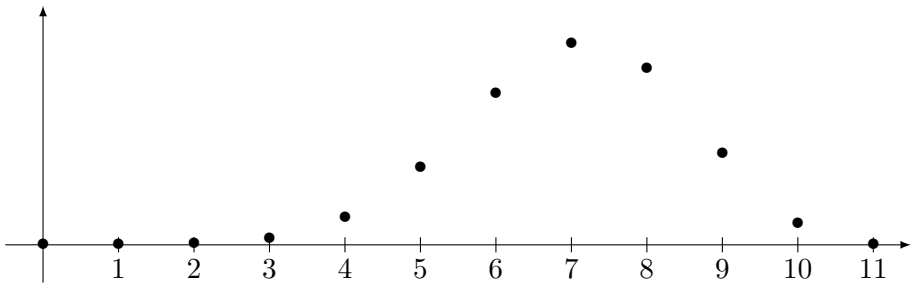
et

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = np(1 - p) \tag{34.327}$$

en vertu de (34.321).

La loi binomiale lorsque $p = 0.7$ et $n = 10$.

9. Valable même sans indépendance, proposition 34.25
10. Lemme 34.23.




### 34.5.3 Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathscr{M}(n;k;p_1,\dots,p_k)$ consiste à effectuer $n$ épreuves d'une démarche aléatoire qui peut avoir $k$ issues différentes avec probabilités $p_1,\dots,p_k$. Les variables aléatoires multinomiales sont $N_i$ avec les contraintes

$$\sum_{i=1}^{k} N_i = n \tag{34.328a}$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{34.328b}$$

La fonction de probabilité multinomiale est

$$P(N_1 = n_1,\dots,N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!} p_1^{n_1}\dots p_k^k. \tag{34.329}$$

Chacune des $N_i$ est une binomiale de probabilité $p_i$.

### 34.5.4 Loi géométrique

Soit $(X_n)$ une suite indépendante et identiquement distribuée de lois de Bernoulli de paramètre $p$. Alors la variable aléatoire

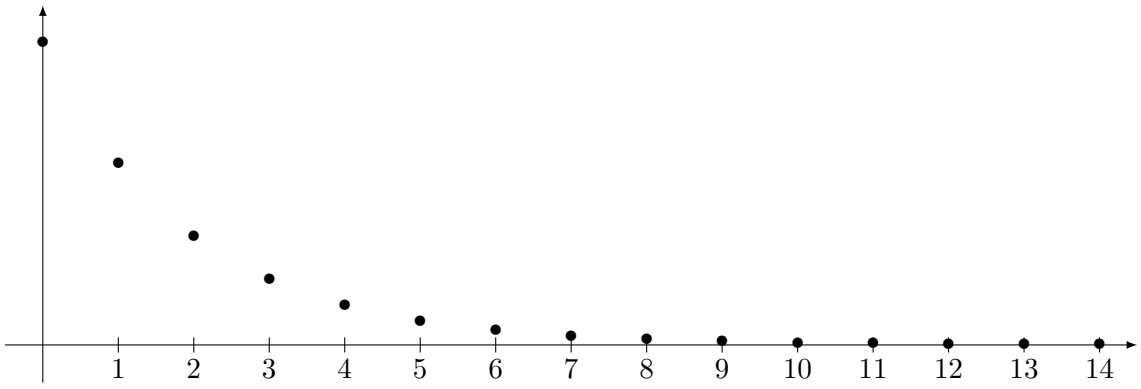
$$Z = \inf\{n \geqslant 1 \text{ tel que } X_n = 1\} \tag{34.330}$$

est une loi géométrique de paramètre $p$.

La loi géométrique compte donc le nombre d'expériences de Bernoulli à effectuer avant que le premier succès soit au rendez-vous. Nous avons

$$P(Z = k) = P(X_k = 1)P(X_1,\dots,X_{k-1} = 0) = p(1-p)^{k-1} \tag{34.331}$$

La loi géométrique de paramètre $p = 0.2$.




Note : si $p$ est trop grand, on ne voit vite plus rien parce que la probabilité d'attendre longtemps est vite très faible.

### 34.5.5 Loi de Poisson

Une variable aléatoire $Z$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda$, notée $\mathscr{P}(\lambda)$ si

$$P(Z = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{34.332}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

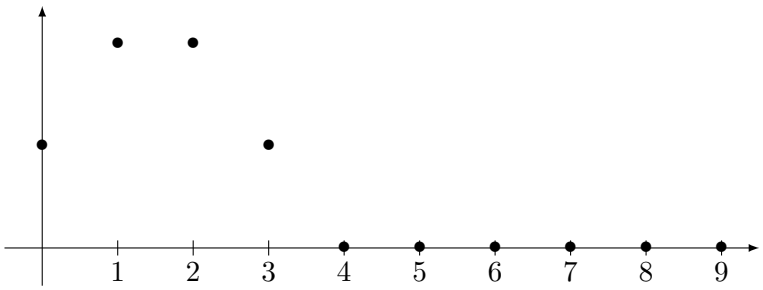
La loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent.

Si un événement se produit en moyenne $p$ fois par seconde, la probabilité d'observer l'événement $k$ fois durant $n$ secondes est donnée par $P(Z = k)$ où $Z$ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = pn$.

**Théorème 34.96** (wikipedia)**.**
*L'espérance et la variance d'une variable aléatoire de Poisson sont $\lambda$ :*

$$E(X) = \lambda \tag{34.333a}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \lambda. \tag{34.333b}$$

La loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.




### 34.5.6 Loi exponentielle

La loi de exponentielle représente le temps qu'il faut attendre pour qu'une particule se désintègre si elle a en permanence une probabilité[11] $\lambda dt$ de se désintégrer entre $t$ et $t + dt$. L'espérance est donc $1/\lambda$.

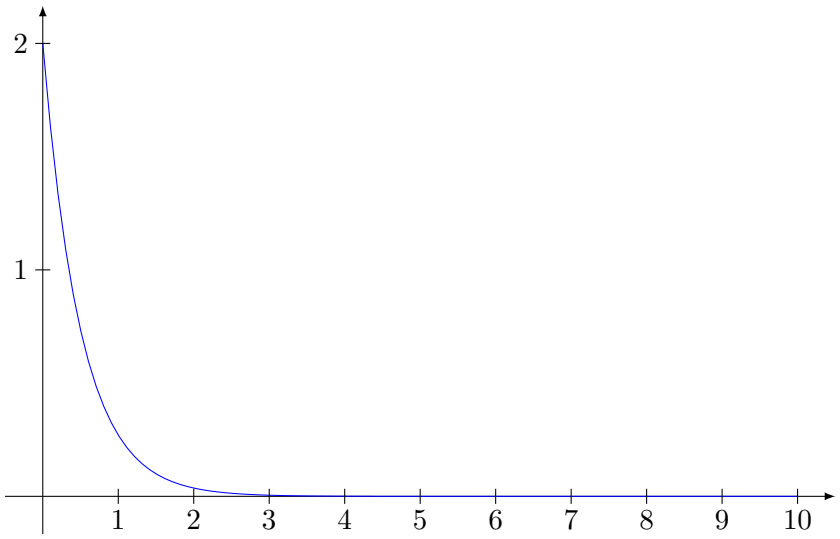
Il se passe donc en moyenne $\lambda$ événements par seconde. La proposition 34.103 nous montrera que le nombre d'événements se produisant en une seconde suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

Plus formellement, la loi exponentielle de paramètre $\lambda$, notée $\mathscr{E}(\lambda)$ est la loi de densité

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{34.334}$$

Densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

11. Étant donné que $\lambda$ n'est pas limité à 1, en réalité ce n'est pas une probabilité. Je suis preneur d'une bonne interprétation physique de ce paramètre.




**Proposition 34.97.**
*Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors la fonction de répartition de $X$ est donnée par*

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geqslant 0 \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{34.335}$$

*La fonction caractéristique est donnée par*

$$E(e^{itX}) = \frac{\lambda}{\lambda - it}. \tag{34.336}$$

*L'espérance et la variance sont données par*

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned} \tag{34.337}$$

*Démonstration.* Pour la fonction caractéristique,

$$E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) dx \tag{34.338a}$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{x(-\lambda+it)} dx \tag{34.338b}$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[ \frac{e^{x(-\lambda+it)}}{it-\lambda} \right]_{x=0}^{x=A} \tag{34.338c}$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{e^{A(it-\lambda)}}{it-\lambda} - \frac{1}{it-\lambda}. \tag{34.338d}$$

Le premier terme est nul parce que si on prend la norme,

$$\left| \frac{e^{A(-\lambda+it)}}{-\lambda+it} \right| = \frac{e^{-\lambda A}}{|it-\lambda|} \to 0. \tag{34.339}$$

En ce qui concerne l'espérance nous faisons le calcul suivant :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^+} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \tag{34.340}$$

Pour la variance, nous utilisons la formule (34.58). Nous avons

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} = \frac{2}{\lambda^2}. \tag{34.341}$$

Donc $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. □

La loi exponentielle est une loi **sans mémoire** en ce sens que

$$P(X > x + y|X > y) = P(X > x). \tag{34.342}$$

En effet nous utilisons la règle de la probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{34.343}$$

Ici,

$$P(X > x + y|X > y) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)} = e^{-\lambda x}. \tag{34.344}$$

La proposition suivante montre que la loi exponentielle est à peu près la seule à être sans mémoire. D'où son importance dans l'étude des machines dont les pièces ne subissent pas d'usure.

**Proposition 34.98.**
*Soit $X$, une variable aléatoire admettant une densité continue $f$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Si elle est sans mémoire, alors elle est exponentielle.*

*Démonstration.* Nous posons $\varphi(x) = P(X \geqslant x)$. Cela est la fonction de répartition de $X$ (à part que cette dernière est $1 - \varphi(x)$ mais c'est pas grave), et est donnée par

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt. \tag{34.345}$$

Cette dernière intégrale vérifie les hypothèses du théorème 34.98, de telle sorte que $\varphi$ soit une fonction dérivable et $\varphi'(x) = f(x)$.

D'autre part en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle la propriété de ne pas avoir de mémoire donne

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{34.346}$$

et de plus $\varphi(0) = 0$. Calculons la dérivée de $\varphi$ :

$$\varphi'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\varphi(x + \epsilon) - \varphi(x)}{\epsilon} = \varphi(x) \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\varphi(\epsilon) - 1}{\epsilon} = \varphi(x)\varphi'(0). \tag{34.347}$$

Donc $\varphi$ vérifie l'équation différentielle de l'exponentielle.

□

**Exemple 34.99**
Une machine a une durée de vie représentée par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Soit $T_y$ la variable aléatoire qui représente la temps de vie restant sachant que la machine a déjà vécu un temps $y$. Nous voulons trouver la fonction de répartition de $T_y$. Nous avons

$$P(T_y > x) = P(X > x + y|X > y) = P(X > x) = e^{-\lambda x}. \tag{34.348}$$

Dans ce cas, la loi de $T_y$ ne dépend pas de $y$. Cela signifie que la machine ne vieilli pas et surtout que le modèle n'est pas réaliste. △

**Proposition 34.100.**
*Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{E}(\mu)$ sont indépendantes, alors*

*(1)* $P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$
*(2)* $P(X > Y) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$
*(3)* $P(X = Y) = 0$
*(4)* $\min(X, Y) \sim \mathscr{E}(\lambda + \mu)$.

*De plus les variables aléatoires exponentielles ont une propriété d'absence de mémoire :*

$$P(X > t + s|X > s) = P(X > t) = e^{-\lambda t}. \tag{34.349}$$

*Démonstration.* Étant donné que $X$ et $Y$ sont indépendantes, la densité conjointe est le produit des densités (34.20). Nous avons donc

$$P(X > Y) = \int_D \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dxdy \tag{34.350}$$

où $D$ est le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x, y > 0, x > y\}$. Nous avons donc

$$P(X > Y) = \lambda\mu \int_0^\infty dx \int_0^x dy e^{-\lambda x} e^{-\mu y} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{34.351}$$

```
sage: var('a,b')
(a, b)
sage: f(x,y)=exp(-a*x)*exp(-b*y)
sage: assume(a>0)
sage: assume(b>0)
sage: a*b*f.integrate(y,0,x).integrate(x,0,oo)
(x, y) |--> a*b/(a^2 + a*b)
```

Pour trouver la loi de $\min(X, Y)$, nous écrivons

$$\begin{aligned}
P\big(\min(X, Y) > t\big) &= P(X > t, Y > t) && && (34.352a)\\
&= P(X > t)P(Y > t) && \text{par indépendance} && (34.352b)\\
&= \big(1 - F_X(t)\big)\big(1 - F_Y(t)\big) && && (34.352c)\\
&= e^{-(\lambda+\mu)t} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t) && && (34.352d)\\
&= 1 - F_Z(t) && && (34.352e)
\end{aligned}$$

où $Z \sim \mathscr{E}(\lambda + \mu)$. □

### 34.5.7 Approximation de la binomiale par une Poisson

**Proposition 34.101.**
*Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires avec $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ telle que $np_n$ converge vers une constante $\lambda > 0$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{P}(\lambda)$.*

*Démonstration.* Commençons par écrire la loi binomiale sous une forme plus adaptée au passage à la limite :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n_k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1 - p)^{n-k}. \tag{34.353}$$

Le produit au numérateur contient $k$ termes dans lesquels nous mettons $n$ en évidence. Nous trouvons

$$P(X = k) = \frac{(np)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} p^k (n - p)^{n-k}. \tag{34.354}$$

Lorsque nous passons à la limite, tous les facteurs du type $1-l/n$ tendent vers 1 ainsi que $(1-p_n)^{-k}$. Les facteurs dont la limite n'est pas 1 sont donc

$$P(X_n = k) \simeq \frac{(np_n)^k}{k!}(1 - p_n)^k. \tag{34.355}$$

Nous avons

$$\lim_{n\to\infty}(1 - p_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n = e^{-\lambda}. \tag{34.356}$$

La thèse est alors obtenue en remettant les morceaux ensemble. □

**Exemple 34.102**
Considérons un serveur informatique qui reçoit des requêtes. Toutes les $10^{-3}$ s il reçoit une requête avec une probabilité $p = 0.05$. La variable aléatoire qui consiste à donner le nombre de requêtes effectivement effectuées en une seconde suit une loi binomiale $\mathscr{P}(1000, p)$.

Déterminons la probabilité que le serveur reçoive 20 requêtes en une seconde. Nous approximons $\mathscr{B}(1000, 0.05)$ par $\mathscr{P}(50)$, et la réponse est

$$e^{-50}\frac{50^{20}}{20!} \simeq 7 \cdot 10^{-7}. \tag{34.357}$$

△

### 34.5.8 Loi de Poisson et loi exponentielle

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda$. En utilisant le produit de convolution, nous pouvons trouver la fonction de densité de la somme (voir point 34.2.3). Commençons avec deux variables aléatoires $X$ et $Y$. Les densités sont

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{[x\geqslant 0]}\lambda e^{-\lambda x} \tag{34.358a}$$
$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{[y\geqslant 0]}\lambda e^{-\lambda y}, \tag{34.358b}$$

et la densité conjointe est alors

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-t\geqslant 0]}\lambda e^{-\lambda(x-t)}\mathbb{1}_{[t\geqslant 0]}\lambda e^{-\lambda t}dt \tag{34.359a}$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda x}\int_0^x 1\,dt \tag{34.359b}$$
$$= x\lambda^2 e^{-\lambda x}. \tag{34.359c}$$

Par récurrence si $S = X_1 + \cdots + X_n$ nous trouvons

$$f_S(x) = x^{n-1}\lambda^n e^{-\lambda x}. \tag{34.360}$$

**Proposition 34.103** ([352])**.**
*Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Nous considérons la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$ nous considérons*

$$N_t = \max\{n \geqslant 1 \text{ tel que } \sum_{i=1}^n T_i \leqslant t\}. \tag{34.361}$$

*Alors $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.*

*Démonstration.* Ce que nous devons calculer est

$$P(N_t = k) = P(S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}). \tag{34.362}$$

Nous introduisons la variable aléatoire $V_{n=1} = (X_1, \dots, X_{n+1})$ ainsi que l'ensemble

$$A_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } x_1 + \cdots + x_n \leqslant t \leqslant x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}\}. \tag{34.363}$$

Le problème est donc de calculer

$$P(S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}) = P(V_{n+1} \in A_{n+1}^+) = \int_{A_{n+1}^+} f_{n+1}(x)dx \tag{34.364}$$

où $A_{n+1}^+$ est la partie de $A_{n+1}$ dans laquelle $x_i \geqslant 0$ pour tout $i$ et $f_{n+1}$ est la fonction de densité conjointe des variables aléatoires $X_i$. Nous effectuons le changement de variables

$$s_k = \sum_{i \leqslant k} x_i \tag{34.365a}$$

$$x_k = s_k - s_{k-1} \tag{34.365b}$$

dont le déterminant vaut 1. D'autre part par indépendance des variables aléatoires $X_i$, la fonction de partition jointe $f_{n+1}$ s'exprime sous la forme

$$f_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_{n+1}}(x_{n+1}) \tag{34.366a}$$

$$= \lambda^{n+1} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_{n+1})} \tag{34.366b}$$

$$= \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}}. \tag{34.366c}$$

En ce qui concerne les bornes de l'intégrale dans les variables $s_i$, nous voulons que tous les $x_i$ soient positifs, par conséquent $s_1 \geqslant 0$ et ensuite l'équation $x_k = s_k - s_{k-1}$ demande $s_k \geqslant s_{k-1}$. Les bornes sont donc données par l'ensemble

$$0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \dots \leqslant s_n \leqslant t \leqslant s_{n+1}, \tag{34.367}$$

c'est à dire $B_n \times ]t, \infty[$ où

$$B_n = \{(s_1, \dots, s_n) \text{ tel que } 0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \dots \leqslant s_n \leqslant t\}. \tag{34.368}$$

Le théorème de Fubini nous permet de décomposer l'intégrale :

$$P(S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}) = \int_{B_n \times ]t,\infty[} \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}} ds_1 \dots ds_{n+1} \tag{34.369a}$$

$$= \lambda^{n+1} \left( \int_{B_n} ds_1 \dots ds_n \right) \underbrace{\left( \int_t^\infty e^{-\lambda s_{n+1}} ds_{n+1} \right)}_{= \lambda^{-1} e^{-\lambda t}} \tag{34.369b}$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda t} \operatorname{Vol}(B_n) \tag{34.369c}$$

où $\operatorname{Vol}(B_n)$ est le volume de $B_n$ qui reste à calculer. L'ensemble $C^n = [0,t]^n$ se décompose en cellules disjointes (à ensemble de mesure nulle près) de la forme

$$C_\sigma = \{0 \leqslant s_{\sigma(1)} \leqslant s_{\sigma(2)} \leqslant \dots \leqslant s_{\sigma(n)} \leqslant t\} \tag{34.370}$$

pour chaque permutation $\sigma \in S_n$. Il y a exactement $n!$ telles cellules dans $C^n$. Par conséquent

$$t^n = \operatorname{Vol}(C^n) = n! \operatorname{Vol}(C_\sigma) = n! \operatorname{Vol}(B_n) \tag{34.371}$$

et $\operatorname{Vol}(B_n) = \frac{t^n}{n!}$. Finalement nous avons

$$P(n_t = n) = P(S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(\lambda t)}. \tag{34.372}$$

□

### 34.5.9 Loi normale

La loi normale de paramètres $m$ et $\sigma > 0$, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la loi donnée par la densité

$$\gamma_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-m}{\sigma} \right)^2 \right]. \tag{34.373}$$

**Proposition 34.104.**
*Si la variable aléatoire réelle $X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors nous avons $E(X)=m$ et* $\text{Var}(X)=\sigma^2$.

*Démonstration.* L'espérance d'une variable aléatoire se calcule à partir de la formule (34.216) :

$$E(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]dx \tag{34.374a}$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma\int_{\mathbb{R}}(\sigma u+m)e^{-u^2/2} \tag{34.374b}$$

où nous avons effectué le changement de variable $u=(x-m)/\sigma$. Nous utilisons ensuite l'intégrale remarquable

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}du=\sqrt{2\pi}. \tag{34.375}$$

En ce qui concerne la variance, nous avons le même genre de calculs. □

La **loi normale réduite** est la densité

$$\gamma(x)=\gamma_{0,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}. \tag{34.376}$$

La variable aléatoire $X$ suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire $Z=\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

**Proposition 34.105.**
*La fonction caractéristique de la distribution normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est*

$$\Phi_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(t)=\exp\left(itm-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right). \tag{34.377}$$

*Démonstration.* En suivant la formule (34.188), l'intégrale à calculer est

$$\Phi_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx. \tag{34.378}$$

Nous reconnaissons une transformée de Fourier. Afin de la calculer sans encombres, nous passons par les fonctions intermédiaires suivantes :

$$\begin{aligned}g(x)&=e^{-\frac{1}{2}x^2}\\ h(x)&=g\left(\frac{x}{\sigma}\right)\\ k(x)&=h(x-m).\end{aligned} \tag{34.379}$$

La fonction caractéristique que nous cherchons est $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\hat{k}(t)$. Les formules liées à la transformée de Fourier nous donnent

$$\hat{k}(t)=\hat{h}(t)e^{itm} \tag{34.380a}$$

$$\hat{h}(t)=\sigma\hat{g}(\sigma t) \tag{34.380b}$$

$$\hat{g}(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\sqrt{2\pi}e^{-t^2/2}. \tag{34.380c}$$

Attention : l'intégrale à calculer est une transformée de Fourier *inverse*, d'où la formule (34.380a) qui a un signe de différence avec la formule usuelle. En recombinant toutes ces expressions nous trouvons

$$\Phi_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}=e^{-\sigma^2t^2/2}e^{itm}, \tag{34.381}$$

ce qu'il nous fallait. □

**Exemple 34.106**
Une espérance qui sert de temps en temps est celle de $X = e^{\beta Z}$ lorsque $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Elle se calcule en remarquant que $x^2 - 2\beta x = (x-\beta)^2 - \beta^2$, donc

$$E(e^{\beta Z}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}e^{-x^2/2}dx \tag{34.382a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-\beta)^2}e^{\beta^2/2} \tag{34.382b}$$
$$= \frac{e^{\beta^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{e^{-y^2/2}} dy \tag{34.382c}$$
$$= e^{\beta^2/2}. \tag{34.382d}$$

△

### 34.5.10 Vecteurs gaussiens

Source : [159, 353].

**Définition 34.107.**
*Un vecteur aléatoire $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ est un **vecteur gaussien** si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont des variables aléatoires normales. En d'autres termes, $X$ est un vecteur gaussien si pour tout vecteur $u$, la variable aléatoire $u \cdot X$ est gaussienne.*

Le vecteur moyenne d'un vecteur gaussien est $E(X) = \big(E(X_1), \dots, E(X_n)\big)$ et sa matrice de **variance-covariance** est la matrice

$$K_X = \mathrm{Var}(X) = E\Big[\big(X - E(X)\big) \otimes \big(X - E(X)\big)\Big] \tag{34.383}$$

où l'opération $\otimes$ est celle introduite dans la section 9.19. Cela n'est rien d'autre que la matrice de covariance de la variable aléatoire $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$.

**Lemme 34.108.**
*Si les variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes, alors le vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien.*

*Démonstration.* Nous devons montrer que si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, alors $X+Y$ est encore gaussienne. L'indépendance nous assure les égalités suivantes pour la fonction caractéristique :

$$\Phi_{X+Y}(t) = E\big(e^{it(X-Y)}\big) = E\big(e^{itX}\big)E\big(e^{itY}\big). \tag{34.384}$$

Dans le cas où $X$ et $Y$ sont gaussiens nous trouvons

$$\Phi_{X+Y}(t) = \exp\left(im_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right)\exp\left(im_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(i(m_1+m_2)t - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}\right). \tag{34.385}$$

Étant donné que la loi d'une variable aléatoire est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (théorème 34.58), nous déduisons que $X+Y$ est une normale de moyenne $m_1+m_2$ et de variance $\sigma = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. □

**Proposition 34.109.**
*La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien est donnée par*

$$\Phi_X(u) = \exp\left(iu \cdot E(X) - \frac{1}{2}u \cdot K_X u\right) \tag{34.386}$$

*où $K_X$ est la matrice de covariance de $X$.*

*Démonstration.* Nous considérons la variable aléatoire réelle gaussienne $u \cdot X$. Son espérance $m = E(u \cdot X) = u \cdot E(X)$. Nous commençons par établir la formule suivante :

$$u^t K_X u = u \cdot K_X u = E\Big[\big([X - E(X)] \cdot u\big)^2\Big]. \tag{34.387}$$

Utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\sum_{kl} E(A_{kl})u_k u_l = \sum_{kl} E(A_{kl}u_k u_l), \tag{34.388}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
K_X(u,u) &= E\Big([X - E(X)] \otimes [X - E(X)]\Big)(u,u) && \text{(34.389a)}\\
&= E\Big(\big([X - E(X)] \otimes [X - E(X)]\big)(u,u)\Big) && \text{(34.389b)}\\
&= E\Big(\big([X - E(X)] \cdot u\big)\big([X - E(X)] \cdot u\big)\Big) && \text{(34.389c)}\\
&= E\left(\big([X - E(X)] \cdot u\big)^2\right). && \text{(34.389d)}
\end{aligned}$$

Par la linéarité du produit scalaire et de l'espérance,

$$[X - E(X)] \cdot u = u \cdot X - E(u \cdot X), \tag{34.390}$$

ce qui nous ramène à la variable aléatoire $u \cdot X$. Nous avons alors

$$K_X(u,u) = E\left[\big([X - E(X)] \cdot u\big)^2\right] = \mathrm{Var}(u \cdot X). \tag{34.391a}$$

Nous avons donc obtenu une forme pour la variance de la variable aléatoire $u \cdot X$. Étant donné que $u \cdot X$ est gaussienne de moyenne $m = u \cdot E(X)$ et de variance $\sigma^2 = K_X(u,u)$, nous avons

$$\Phi_{u \cdot X}(t) = \exp\big(itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\big). \tag{34.392}$$

Par ailleurs nous avons $\Phi_X(u) = \Phi_{u \cdot X}(1)$ parce que

$$\Phi_X(u) = E\big(e^{iu \cdot X}\big) = \Phi_{u \cdot X}(1). \tag{34.393}$$

En utilisant la forme (34.392) pour $\Phi_{u \cdot X}$ nous trouvons

$$\Phi_X(u) = \Phi_{u \cdot X}(1) = \exp\big(im - \frac{1}{2}\sigma^2\big) = \exp\Big(iE(u \cdot X) - \frac{1}{2}u \cdot KXu\Big). \tag{34.394}$$

□

**Théorème 34.110.**
*Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$, un vecteur gaussien. Les composantes sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.*

*Démonstration.* Nous savons que les variables aléatoires indépendantes sont non corrélées. Nous devons donc surtout prouver le contraire. Le fait que les variables aléatoires $X_i$ soient non corrélées signifie que la matrice de covariance est

$$K_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_d^2 \end{pmatrix} \tag{34.395}$$

où $\sigma_k^2 = \text{Var}(X_k)$. Notons $m_k = E(X_k)$. Si $u \in \mathbb{R}^d$, nous avons en vertu de la proposition 34.109 que

$$\Phi_X(u) = \exp\Big(i(u_1m_1 + \cdots + u_dm_d) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2u_1^2 + \cdots + \sigma_d^2u_d^2)\Big) \tag{34.396a}$$
$$= \exp\big(iu_1m_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2u_1^2\big)\ldots\exp\big(iu_dm_d - \frac{1}{2}\sigma_d^2u_d^2\big) \tag{34.396b}$$
$$= \Phi_{X_1}(u_1)\ldots\Phi_{X_d}(u_d). \tag{34.396c}$$

Les variables aléatoires $X_i$ sont donc indépendantes parce que la fonction caractéristique se factorise. □

**Exemple 34.111**
Nous donnons à présent un exemple de deux variables aléatoires gaussiennes qui ne forment pas un vecteur gaussien. Pour ce faire nous devons chercher des variables aléatoires non indépendantes. Soit $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\epsilon$ une variable aléatoire (indépendante de $Y$) donnée par $P(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}$, $P(\epsilon = 1) = \frac{1}{2}$. Nous considérons le vecteur $(Y, \epsilon Y)$.

D'abord montrons que $\epsilon Y$ est une variable aléatoire gaussienne. Soit $A$ un borélien de $\mathbb{R}$. Nous avons

$$P(\epsilon Y \in A) = P(\epsilon = -1, Y \in A) + P(\epsilon = -1, -Y \in A). \tag{34.397}$$

Par indépendance et par symétrie de $Y$ [12] nous trouvons

$$P(\epsilon Y \in A) = P(\epsilon = 1)P(Y \in A) + P(\epsilon = -1)P(-Y \in A) \tag{34.398a}$$
$$= \frac{1}{2}P(Y \in A) + \frac{1}{2}P(-Y \in A) \tag{34.398b}$$
$$= P(Y \in A). \tag{34.398c}$$

Nous avons donc $Y \sim \epsilon Y$, et donc $\epsilon Y$ est gaussienne.

En ce qui concerne la covariance, nous savons que $E(Y) = E(\epsilon) = 0$, donc

$$\text{Cov}(Y, \epsilon Y) = E(Y \cdot \epsilon Y) = E(\epsilon Y^2) = E(\epsilon)E(Y^2) = 0. \tag{34.399}$$

Note : $E(Y^2) = 1$.

Les variables aléatoires $Y$ et $\epsilon Y$ ne sont pas indépendantes. En effet si elles l'étaient, $Y$ serait aussi indépendante de $(\epsilon Y)^2 = Y^2$, alors que $Y$ et $Y^2$ ne sont pas indépendantes. Donc $X = (Y, \epsilon Y)$ n'est pas un vecteur gaussien. △

**Théorème 34.112** ([159])**.**
*Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et $K \in \mathbb{M}(d, \mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive. Alors il existe un vecteur gaussien de moyenne $m$ et de matrice de covariance $K$.*

*Démonstration.* Nous effectuons la preuve avec $m = 0$. Nous choisissons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^r, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^r))$ où $r$ est le rang de $K$ muni de la probabilité de densité

$$\gamma(u) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \exp\big(-\frac{1}{2}\|u\|^2\big). \tag{34.400}$$

Nous considérons la variable aléatoire

$$\begin{aligned} Y_0 \colon \Omega &\to \mathbb{R}^r \\ u &\mapsto u. \end{aligned} \tag{34.401}$$

C'est une variable aléatoire gaussienne de loi $P_{Y_0} = \gamma\lambda_d$ où $\lambda_d$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Sa densité (34.400) s'écrit comme le produit de $r$ gaussiennes indépendantes ; sa matrice de covariance est donc $\mathbb{1}_{r\times r}$.

12. C'est à dire que $P(Y \in A) = P(Y \in -A) = P(-Y \in A)$.

Étant donné que $K$ est symétrique et positive, il existe une matrice $d \times r$ telle que $K = AA^t$. Pour voir cela, remarquons qu'il existe une matrice $d \times d$ qui fait le travail. En effet $K$ se diagonalise par une orthogonale (théorème 9.165) :

$$K = ADA^t = A\sqrt{D}\sqrt{D}A^t \tag{34.402}$$

où $D$ est une matrice diagonale contenant $d-r$ zéros et $\sqrt{D}$ est la matrice que l'on imagine. Donc la matrice $L = A\sqrt{D}$ est une matrice telle que $LL^t = K$. Maintenant, étant donné que les $d-r$ dernières lignes de $D$ sont vides, les $d-r$ dernières lignes de $L$ n'ont pas d'importance et peuvent être choisies nulles, voire même ne pas exister. La matrice $A \in \mathbb{M}_{d\times r,\mathbb{R}}$ qui réalise $AA^t = K$ est la «troncature» de $L$ à ses $r$ premières lignes.

Nous considérons la variable aléatoire $Y = AY_0 \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$. Étant donné que $AY_0$ est une transformation linéaire d'un vecteur gaussien, c'est un vecteur gaussien. Nous avons encore $m(Y) = 0$ et

$$\text{Var}(Y) = E(Y \otimes Y) = E\big((AY_0) \otimes (AY_0)\big) = AE(Y_0 \otimes Y_0)A^t = AA^t = K \tag{34.403}$$

parce que $E(Y_0 \otimes Y_0) = \mathbb{1}$. Nous avons utilisé les formules de la section 9.19, et en particulier la formule (9.621). □

Lorsqu'une matrice symétrique et positive $K$ est donné, nous avons créé un vecteur gaussien de covariance $K$ en créant $X = AY$ où $Y$ est le vecteur gaussien «le plus simple» et où $A$ est donné par $AA^t = K$. La proposition suivante montre l'inverse : un vecteur gaussien $X$ peut se réduire au vecteur gaussien «le plus simple» en utilisant la transformation $Y = A^{-1}X$ où $A$ est encore donnée par $AA^t = K$. Ce résultat nous permettra de voir les vecteurs gaussiens généraux comme des «changements de coordonnées» par rapport au vecteur gaussien simple $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ avec $Y_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.

**Proposition 34.113.**
*Soit $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ le vecteur gaussien formé des variables aléatoires indépendantes $Y_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit $K$ une matrice symétrique et positive et la matrice $A$ telle que $AA^t = K$. Alors le vecteur $X = AY$ est gaussien de covariance $K$.*

*Démonstration.* Nous montrons que la covariance de $X = AY$ est donnée par $K$. Nous avons

$$\begin{aligned}
K_X &= E\big([X - E(X)] \otimes [X - E(X)]\big) && \text{(34.404a)}\\
&= E\big(A(Y - E(Y)) \otimes A(Y - E(Y))\big) && \text{(34.404b)}\\
&= E\Big(A\big([Y - E(Y)] \otimes [Y - E(Y)]\big)A^t\Big) && \text{(34.404c)}\\
&= E(AA^t) && \text{(34.404d)}\\
&= K_X. && \text{(34.404e)}
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le lemme 9.268 ainsi que le fait que

$$[Y - E(Y)] \otimes [Y - E(Y)] = K_Y = \mathbb{1}. \tag{34.405}$$

Notons que $E(Y) = 0$, mais cela ne joue pas ici. □

**Théorème 34.114.**
*Un vecteur gaussien $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si sa matrice de covariance est inversible. Dans ce cas nous avons la densité*

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{|\det(K_X)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}[X - E(X)] \cdot K_X^{-1}[X - E(X)]\right). \tag{34.406}$$

*Démonstration.* Nous supposons que $E(X) = 0$. En utilisant la proposition 34.113, nous posons $X = AY$ où $Y$ est un vecteur gaussien $Y \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{1})$ et $AA^t = K_X$. Si $K$ n'est pas inversible, alors

$A$ n'est pas inversible non plus. Notons $r < d$ le rang de $A$. Étant donné que $X = AY$, la variable aléatoire $X$ prend presque sûrement ses valeurs dans l'image de $A$, c'est à dire dans un sous-espace de dimension $r < d$ de $\mathbb{R}^d$. Ce sous-espace est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, mais de mesure 1 pour la mesure $P_X$. La mesure $P_X$ ne peut donc pas avoir de densité par rapport à celle de Lebesgue.

Supposons maintenant que $K_X$ soit inversible. La matrice $A$ l'est aussi. Nous anticipons l'utilisation du théorème de changement de variable 13.224. Ici le changement de variable sera la transformation linéaire $A$ dont le jacobien vaut

$$|\det(A^{-1})| = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{\sqrt{|\det K_X|}}. \tag{34.407}$$

Soit $\gamma$ la densité de $Y$. Nous posons

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{|\det K_X|}}\gamma(A^{-1}X) \tag{34.408}$$

où $\gamma$ est le produit des densités de $d$ gaussiennes usuelles $\mathcal{N}(0,1)$. Nous allons d'abord montrer que cette formule est bien la fonction (34.406) et ensuite que $X$ admet $f_X$ comme densité. Nous avons

$$\gamma(A^{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|A^{-1}x\|^2\right), \tag{34.409}$$

et

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}x\|^2 &= \langle A^{-1}x, A^{-1}x\rangle && \text{(34.410a)}\\
&= \langle (A^{-1})^t A^{-1}x, x\rangle && \text{(34.410b)}\\
&= \langle (AA^t)^{-1}x, x\rangle && \text{(34.410c)}\\
&= x \cdot K_X^{-1}x, && \text{(34.410d)}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien la formule (34.406). Nous vérifions maintenant que $f_X$ est bien une densité pour $X$. Soit $B$ un borélien de $\mathbb{R}^d$. Nous avons d'abord

$$P(X \in B) = P(AY \in B) = P(Y \in A^{-1}B). \tag{34.411}$$

Ici nous avons utilisé le fait que $A$ était bijectif. Nous avons ensuite

$$P(X \in B) = \int_{A^{-1}B} \gamma(t)dy = \int_B \gamma\big(A^{-1}x\big)|J_{A^{-1}}(x)|dx = \int_B f_X(x)dx. \tag{34.412}$$

C'est ici que nous avons utilisé le théorème de changement de variable 13.224. □

### 34.5.11 Variable aléatoire de Rademacher

Une variable aléatoire **de Rademacher** est une variable aléatoire de loi

$$\epsilon \sim \delta_0 - \delta_1, \tag{34.413}$$

sur l'ensemble $\Omega = \{0, 1\}$. C'est la variable aléatoire qui prend valeur 1 ou $-1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Parmi les propriétés évidentes de cette variable aléatoire nous avons $E(\epsilon) = 0$ et $E(\epsilon^2) = 1$.

**Proposition 34.115** (Inégalité de Khintchine[2])**.**
*Soient $r_1, \dots, r_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de Rademacher et une combinaison linéaire*

$$X = \sum_{i=1}^n a_i r_i \tag{34.414}$$

*avec $a_i \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\|X\|_2 \leqslant \sqrt{e}E\big(|X|\big). \tag{34.415}$$

*Démonstration.* Pour rappel la définition est que

$$\|X\|_2 = \sqrt{E\big(|X|^2\big)}. \tag{34.416}$$

Vu que c'est de la quantité $E\big(|X|\big)$ que nous voulons parler, nous notons l'inégalité

$$E\big(|X|\big) = \int_\Omega \big|X(\omega)\big|dP(\omega) \geqslant \Big|\int_\Omega X(\omega)dP(\omega)\Big| = \big|E(X)\big|. \tag{34.417}$$

Nous supposons que $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$ ; sinon nous multiplions les $a_j$ parce qu'il faut pour l'avoir et ce facteur sortira des deux côtés de (34.415).

Nous allons passer par la variable aléatoire intermédiaire

$$Y = \prod_{j=1}^n (1 + ia_j r_j) \tag{34.418}$$

et pour presque tout $\omega \in \Omega$ nous avons

$$\begin{aligned}
|Y(\omega)| &= \prod_{j=1}^n |1 + ia_j r_j(\omega)| && (34.419a)\\
&= \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2 \underbrace{r_j(\omega)^2}_{=1}} && (34.419b)\\
&= \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2} && (34.419c)\\
&\leqslant \prod_{j=1}^n \sqrt{e^{a_j^2}} && (34.419d)\\
&= \sqrt{\prod_{j=1}^n e^{a_j^2}} && (34.419e)\\
&= \sqrt{e^{\sum a_j^2}} && (34.419f)\\
&= \sqrt{e}. && (34.419g)
\end{aligned}$$

Donc $\|Y\|_\infty \leqslant \sqrt{e}$ où $\|.\|_\infty$ est la norme supremum sur $\Omega$. Cela nous permet de donner une première inégalité à propos de $E(|X|)$. D'abord

$$\big|E(XY)\big| = \Big|\int_\Omega X(\omega)Y(\omega)dP(\omega)\Big| \leqslant \int_\Omega \big|X(\omega)\big|\|Y\|_\infty dP(\omega) = \|Y\|_\infty E\big(|X|\big), \tag{34.420}$$

ensuite en remplaçant $\|Y\|_\infty$ par la majoration que nous venons de donner de $|Y(\omega)|$,

$$\sqrt{e}E\big(|X|\big) \geqslant \big|E(XY)\big|. \tag{34.421}$$

Il nous reste à prouver que $\big|E(XY)\big| \geqslant \|X\|_2$.

Pour ce faire nous commençons par noter que pour chaque $j$ nous avons $E(r_j) = 0$ et $E(ia_j r_j^2) = ia_j$ ; en utilisant l'indépendance des $r_j$ et le lemme 34.22 nous avons alors

$$\begin{aligned}
E(r_j Y) &= E\Big(r_j(1 + ia_j r_j)\prod_{k\neq j}(1 + ia_k r_k)\Big) && (34.422a)\\
&= E\big(r_j(1 + ia_j r_j)\big)\prod_{k\neq j} E(1 + ia_k r_k) && (34.422b)\\
&= ia_j \prod_{k\neq j}\big(1 + ia_k E(r_k)\big) && (34.422c)\\
&= ia_j. && (34.422d)
\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la proposition 34.25 dans le cas non indépendant,

$$E(XY) = \sum_{j=1}^{n} a_j E(r_j Y) = \sum_j a_j i a_j = i \sum_j a_j^2 = i. \tag{34.423}$$

Nous pouvons compléter l'équation (34.421) en

$$\sqrt{e} E\big(|X|\big) \geqslant \big|E(XY)\big| = 1, \tag{34.424}$$

et nous nous empressons de montrer que $\|X\|_2 = 1$. En effet $\|X\|_2 = \sqrt{E(|X|^2)}$ alors que

$$\begin{aligned}
\|X\|_2^2 &= E\big((\sum_i a_i r_i)^2\big) && \text{(34.425a)}\\
&= E\Big(\sum_k a_k^2 r_k^2 + 2\sum_{i\neq j} a_i a_j r_i r_j\Big) && \text{(34.425b)}\\
&= \sum_k a_k^2 + 2\sum_{i\neq j} a_i a_j E(r_i r_j) && \text{(34.425c)}\\
&= 1 && \text{(34.425d)}
\end{aligned}$$

□

### 34.5.12 Loi de Student

**Définition 34.116.**
*La loi $\chi^2$ à $d$ degrés de liberté est la loi de la variable aléatoire $Y_1^2 + \cdots + y_n^2$ si les $(Y_i)$ sont des variable aléatoires normales indépendantes centrées et réduites.*

*La loi de **Student** à $d$ degrés de liberté est la loi de la variable aléatoire*

$$\frac{X}{\sqrt{K/d}} \tag{34.426}$$

*où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $K \sim \chi^2(d)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Cette loi est notée $\mathscr{T}(d)$*

Nous avons une illustration de la densité de la loi $\chi^2(10)$ à la figure 34.1.

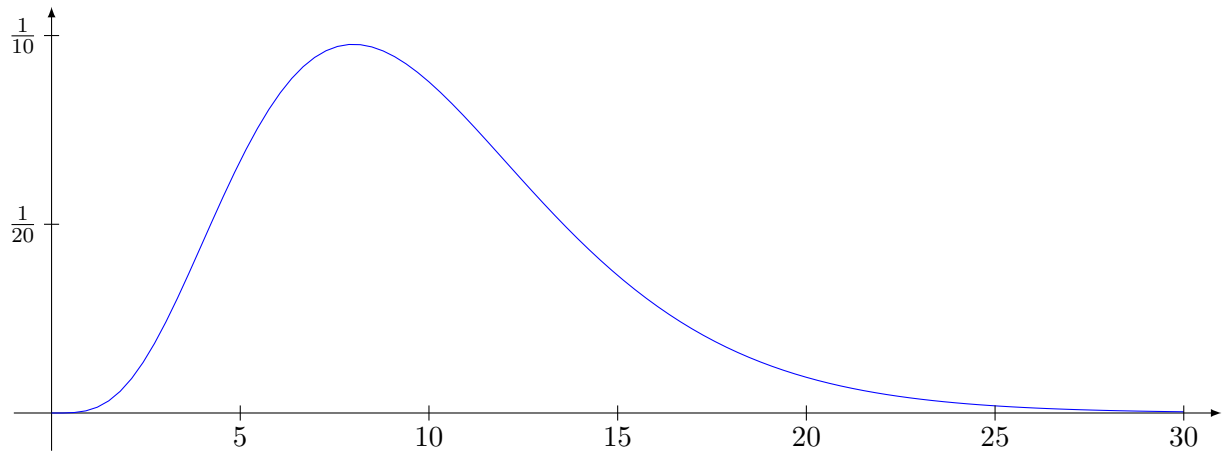



FIGURE 34.1 – La densité de $\chi^2(10)$.

L'importance de cette loi sera dans le théorème de Cochrane 35.15.

### 34.5.13 Indépendance, covariance et variance de somme

Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires réelles, nous avons défini la covariance par (34.67) :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big] \tag{34.427}$$

Une clef est le lemme 34.22 qui dit que lorsque $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. Nous avons les liens suivants.

(1) Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

(2) La réciproque n'est pas vraie par l'exemple 34.24.

(3) Si $Z$ est un vecteur gaussien, les composantes $Z_i$ sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariance est diagonale, c'est à dire que les $Z_i$ sont deux à deux non corrélés ; c'est le théorème 34.110.

(4) En ce qui concerne la variance d'une somme,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y). \tag{34.428}$$

Donc lorsque $X$ et $Y$ ne sont pas corrélées, la variance est sympa avec la somme. En particulier lorsqu'elles sont indépendantes, mais pas seulement.

## 34.6 Estimation des grands écarts

Si $S_n$ est une somme de variables aléatoires de Bernoulli $X_i$ indépendantes de probabilité $p$, l'espérance de $S_n/n$ est $p$, et nous voudrions savoir quelle est la probabilité d'avoir un taux de succès un peu plus important :

$$P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\big). \tag{34.429}$$

La loi des grands nombres nous permet de dire que ça ne va pas être très grand. En effet si nous posons

$$Y_i = X_i - p - \epsilon \tag{34.430}$$

et

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{S_n}{n} - p - \epsilon, \tag{34.431}$$

la loi des grands nombres (théorème 34.83) nous indique que

$$Z_n \xrightarrow{p.s.} E(Y_1) = -\epsilon. \tag{34.432}$$

La proposition 34.68 sur le lien entre les types de convergence nous donne immédiatement la convergence en loi. C'est à dire que pour tout $\eta > 0$,

$$P\Big(|Z_n+\epsilon| \geqslant \eta\Big) \to 0. \tag{34.433}$$

En prenant $\eta = \frac{\epsilon}{2}$,

$$P(Z_n = 0) \leqslant P\big(|Z_n+\epsilon| \geqslant \frac{\epsilon}{2}\big) \to 0. \tag{34.434}$$

Tout cela montre que

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\big) = 0. \tag{34.435}$$

Autrement dit, la probabilité de tomber à une distance fixée de la moyenne tend vers zéro lorsque le nombre d'essais augmente. Rien d'étonnant.

Le théorème suivant nous indique la vitesse de convergence. Elle est exponentielle et le coefficient est donné en fonction de $p$ et de $\epsilon$.

**Théorème 34.117** ([2]).
*Soient des variables aléatoires $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ et*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{B}(n,p). \tag{34.436}$$

*Pour $\epsilon \in ]0, 1-p[$, nous définissons*

$$h_+(\epsilon) = (p+\epsilon)\ln\left(\frac{p+\epsilon}{p}\right) + (1-p-\epsilon)\ln\left(\frac{1-p-\epsilon}{1-p}\right). \tag{34.437}$$

*Alors*

*(1) $h_+(\epsilon) > 0$.*

*(2) Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons*

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\right) \leqslant e^{-nh_+(\epsilon)}. \tag{34.438}$$

*(3) L'estimation* (34.438) *est optimale au sens que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\big)\right) = -h_+(\epsilon). \tag{34.439}$$

*Démonstration.* Pour tout $t \geqslant 0$ nous avons :

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\right) &= P\big(S_n \geqslant np+n\epsilon\big) && \text{(34.440a)}\\
&\leqslant E\Big(e^{t(S_n-np-n\epsilon)}\Big) && \text{(34.440b)}\\
&= e^{-nt(p+\epsilon)}E\left(e^{tS_n}\right) && \text{(34.440c)}\\
&= e^{-nt(p+\epsilon)}\sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}P(S_n=k) && \text{(34.440d)}\\
&= e^{-nt(p+\epsilon)}\sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} && \text{(34.440e)}\\
&= e^{-nt(p+\epsilon)}\big((1-p)+pe^t\big)^n && \text{(34.440f)}\\
&= \exp\Big(-n\big(t(p+\epsilon)-\ln(1-p+pe^t)\big)\Big). && \text{(34.440g)}
\end{aligned}$$

Justifications :

— L'inégalité (34.440b) est l'inégalité de Markov (corollaire 34.82) avec $\phi(x) = e^{tx}$.

— La ligne (34.440d) est une utilisation du théorème de transfert 34.60.

Nous posons maintenant

$$h = \sup_{t>0}\big(t(p+\epsilon)-\ln(1-p+pe^t)\big). \tag{34.441}$$

Pour cette valeur de $h$ nous avons

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\right) \leqslant e^{-nh}. \tag{34.442}$$

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}
g\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}\\
t &\mapsto t(p+\epsilon)-\ln(1-p+pe^t).
\end{aligned} \tag{34.443}$$

Elle vérifie $g(0) = 0$ et

$$g'(t) = (p + \epsilon) - \frac{pe^t}{1 - p + pe^t} \tag{34.444a}$$

$$g'(0) = (p + \epsilon) - \frac{p}{1 - p + p} = \epsilon > 0. \tag{34.444b}$$

Par conséquent sur un voisinage de $t = 0$ la fonction $g$ est strictement croissante et nous concluons que $g$ prend (au moins) quelques valeurs strictement positives. Du coup nous avons

$$h = \|g\|_\infty > 0. \tag{34.445}$$

Nous cherchons maintenant pour quelle valeur de $t$ est réalisé le maximum de $g$. D'abord résoudre $g'(t) = 0$ donne

$$t_0 = \ln\left(\frac{(p + \epsilon)(1 - p)}{p(1 - p - \epsilon)}\right) \tag{34.446}$$

Vu que $g'(t) \to p + \epsilon - 1 < 0$, nous avons $\lim_{t\to\infty} g(t) = -\infty$ et donc le $t_0$ trouvé est bien un maximum et non un minimum.

Il est maintenant loisible de calculer une valeur pour $h$ : il suffit de calculer $g(t_0)$. La calcul n'est pas très compliqué et donne

$$h = g(t_0) = (p + \epsilon) \ln\left(\frac{p + \epsilon}{p}\right) + (p + \epsilon - 1) \ln\left(\frac{1 - p}{1 - p - \epsilon}\right), \tag{34.447}$$

ce qui est bien $h = h_+(\epsilon)$. Cela démontre les points (1) et (2).

Nous montrons à présent l'aspect optimal de l'estimation. Nous savons déjà que

$$\frac{1}{n} \ln\left(P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p + \epsilon\big)\right) \leqslant h_+(\epsilon). \tag{34.448}$$

Nous posons $k_n = \lceil n(p + \epsilon) \rceil$. Vu que $p + \epsilon < 1$ et que $S_n \leqslant n$, nous avons

$$P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p + \epsilon\big) = P\big(S_n \geqslant n(p + \epsilon)\big) \geqslant P(S_n = k_n) = \binom{n}{k_n} p^{k_n} (1 - p)^{n - k_n}. \tag{34.449}$$

C'est maintenant que nous utilisons la formule de Stirling (lemme 10.40) pour chacune des factorielles intervenant dans le coefficient binomial. Nous trouvons :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p + \epsilon\right) \geqslant P(S_n = k_n) = \clubsuit = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\alpha(n) p^{k_n} (1 - p)^{n - k_n}}{\left(\frac{k_n}{e}\right)^{k_n} \sqrt{2\pi k_n}\alpha(k_n) \left(\frac{n - k_n}{e}\right)^{n - k_n} \sqrt{2\pi(n - k_n)}}. \tag{34.450}$$

Nous savons que $k_n = n(p + \epsilon) + \sigma(n)$ avec $\sigma$ borné par 1. Par conséquent $n - k_n \to \infty$ et nous pouvons regrouper les coefficients en $\alpha$ en

$$\beta(n) = \frac{\alpha(n)}{\alpha(k_n)\alpha(n - k_n)} \to 1. \tag{34.451}$$

Nous remarquons aussi que les $e$ se simplifient. Nous récrivons $\clubsuit$ sous la forme

$$\clubsuit = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k_n(n - k_n)}} \beta(n)}_{=A(n)} \frac{n^n p^{k_n} (1 - p)^{n - k_n}}{k_n^{k_n} (n - k_n)^{n - k_n}} \tag{34.452a}$$

$$= A(n) n^n \left(\frac{p}{k_n}\right)^{k_n} \left(\frac{1 - p}{n - k_n}\right)^{n - k_n} \tag{34.452b}$$

$$= A(n) \left(\frac{np}{k_n}\right)^{k_n} \left(\frac{n(1 - p)}{n - k_n}\right)^{n - k_n}. \tag{34.452c}$$

Nous passons au logarithme et nous étudions $\frac{1}{n}\ln\big(P(S_n=k_n)\big)$. Nous avons les termes suivants à étudier :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\ln\big(P(S_n=k_n)\big) &= -\frac{1}{2n}\ln(2\pi)+\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n}{k_n(n-k_n)}\right)\\ &\quad + k_n\ln\left(\frac{np}{k_n}\right)+(n-k_n)\ln\left(\frac{n(1-p)}{n-k_n}\right)+\frac{1}{n}\ln\big(\alpha(n)\big).\end{aligned} \tag{34.453}$$

Nous étudions terme à terme la limite de cela lorsque $n\to\infty$.

(1) Le terme $\frac{1}{2n}\ln(2\pi)$ ne pose pas de problèmes. Il tend vers zéro.

(2) Si nous remplaçons $k_n$ par $n(p+\epsilon)+\sigma(n)$ nous voyons que ce qui est dans le logarithme est majoré par $\frac{1}{P(n)}$ pour un certain polynôme $P$. Ce terme est dans le cas $\frac{\ln(P(n))}{n}$ qui tend vers zéro lorsque $n\to\infty$.

(3) Pour ce terme nous remplaçons $k_n$ par $n(p+\epsilon)+k_n-n(p+\epsilon)$. Nous devons alors étudier la limite de

$$(p+\epsilon)\ln\left(\frac{np}{k_n}\right)+\frac{k_n-n(p+\epsilon)}{n}\ln\left(\frac{np}{k_n}\right). \tag{34.454}$$

Ce qui est dans les logarithmes est encadré de la façon suivante :

$$\frac{n(p+\epsilon)}{np}\leqslant\frac{k_n}{np}\leqslant\frac{n(p+\epsilon)+1}{np}. \tag{34.455}$$

Donc la limite de $k_n/np$ est $(p+\epsilon)/p$. Les logarithmes restent bornés. Pour le second terme de (34.454), le numérateur du coefficient est borné par 1. Donc le second terme tend vers zéro et le tout tend vers

$$(p+\epsilon)\ln\left(\frac{p}{p+\epsilon}\right). \tag{34.456}$$

(4) Nous devons enfin étudier le dernier terme. La combinaison $\frac{n-k_n}{n}$ s'étudie de la façon suivante :

$$\frac{n-k_n}{n}=\frac{n-n(p+\epsilon)+n(p+\epsilon)-k_n}{n}=\frac{n(1-p-\epsilon)+n(p+\epsilon)-k_n}{n}\to 1-p-\epsilon \tag{34.457}$$

parce que $n(p+\epsilon)-k_n$ est borné par 1. Sachant cela, notre terme a pour limite

$$\frac{n-k_n}{n}\ln\left(\frac{n(1-p)}{n-k_n}\right)\to(1-p-\epsilon)\ln\left(\frac{1-p}{1-p-\epsilon}\right). \tag{34.458}$$

En remettant tous les morceaux bouts à bout,

$$\frac{1}{n}P(S_n=k_n)\to(1+\epsilon)\ln\left(\frac{p}{p+/e}\right)+(1-p-\epsilon)\ln\left(\frac{1-p}{1-p-\epsilon}\right)=-h_+(\epsilon). \tag{34.459}$$

Étant donné que nous avions déjà prouvé que $P\big(\frac{S_n}{n}\geqslant p+\epsilon\big)\geqslant P(S_n=k_n)$, nous avons

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\Big(P(\frac{S_n}{n}\geqslant p+\epsilon)\Big)\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}P(S_n=k_n)=-h_+(\epsilon). \tag{34.460}$$

En combinant avec (34.448) nous trouvons que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\Big(P\big(\frac{S_n}{n}\geqslant p+\epsilon\big)\Big)=h_+(\epsilon). \tag{34.461}$$

Pour cette dernière déduction nous utilisons le fait que si $(a_n)$ est une suite telle que $a_n\leqslant l$ et $\liminf_{n\to\infty}a_n=l$, alors $(a_n)$ admet une limite qui vaut $l$. □

## 34.7 Simulations de réalisations de variables aléatoires

Le générateur de base que possède un système informatique est un générateur de nombres pseudo-aléatoires de nombres entiers entre 0 et $m-1$ généré par une suite du type

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \mod m. \tag{34.462}$$

### 34.7.1 Générateur uniforme

#### 34.7.1.1 Première méthode

Une première façon de générer une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$ est de diviser par $m-1$ la suite de $x_n$. En effet nous avons la proposition suivante.

**Proposition 34.118.**
*Si $(Y_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{0,\dots,n-1\}$. Alors*

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{U}[0,1]. \tag{34.463}$$

*Démonstration.* Nous prouvons la convergence en loi en passant par la fonction de répartition et la proposition 34.69. La fonction de répartition de la densité $\mathscr{U}[0,1]$ est

$$F_X(x) = x\mathbb{1}|_{[0,1]}. \tag{34.464}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire (discrète) $X_n = \frac{Y_n}{n}$ est

$$P(\frac{Y_n}{n} \leqslant x) = P(Y_n \leqslant nx) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \tag{34.465}$$

où $\lfloor a \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $a$. Nous avons évidemment

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x, \tag{34.466}$$

ce qui montre la convergence des fonctions de répartitions et donc la convergence en loi qui nous intéresse. □

#### 34.7.1.2 Seconde méthode

Soit $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $Y_n \sim \mathscr{U}\{0,\dots,m-1\}$. Alors la série de variables aléatoires

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_k}{m^{k+1}} \tag{34.467}$$

est une série qui converge presque sûrement parce que $Y_k$ est borné par $m$. Avec probabilité zéro nous avons $Z = \sum_k 1/m^k$ qui converge. Nous avons

$$Z \sim \mathscr{U}[0,1]. \tag{34.468}$$

L'argument pour montrer cette loi est qu'en base $m$, la variable aléatoire $Z$ a un développement décimal $Z = 0.Y_1Y_2Y_3Y_4\cdots$.

### 34.7.2 Simulation par inversion

Nous cherchons maintenant à simuler une loi $X$ de fonction de répartition $F$.

**Définition 34.119.**
*Soit $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction croissante, continue à droite et telle que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \tag{34.469a}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1. \tag{34.469b}$$

*L'**inverse généralisé** de $f$, notée $f^{-1}$ est la fonction définie par*

$$f^{-1}(t) = \inf\{x \text{ tel que } f(x) \geqslant t\}. \tag{34.470}$$

**Remarque 34.120.**
L'inverse généralisé d'une fonction bijective est la vraie fonction réciproque usuelle.

**Proposition 34.121.**
*Soit $f$ une fonction admettant un inverse généralisé $f^{-1}$. Alors nous avons $f^{-1}(t) \leqslant a$ si et seulement si $t \leqslant f(a)$.*

La continuité à droite joue pour démontrer cette proposition.

**Proposition 34.122.**
*Si $F$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$ et si $V$ est une variable aléatoire de loi uniforme $\mathscr{U}[0,1]$, alors $F^{-1}(U)$ a la même loi que $X$.*

*Démonstration.* Nous montrons que les fonction de répartition de $X$ et de $F^{-1}(U)$ sont identiques. En utilisant la proposition 34.121, nous avons

$$\begin{aligned} P\big(F^{-1}(U) \leqslant y\big) &= P\big(U \leqslant F(y)\big) && \text{(34.471a)}\\ &= F(y) && \text{(34.471b)}\\ &= P(X \leqslant y). && \text{(34.471c)} \end{aligned}$$

Donc $F^{-1}(U)$ est la fonction de répartition de $X$. □

La difficulté de la méthode par inversion est qu'il faut être capable de calculer l'inverse de la fonction de répartition de la loi à simuler.

#### 34.7.2.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle est une loi qui peut être simulée par inversion. La fonction de répartition vaut

$$F(x) = 1 - e^{\lambda x}, \tag{34.472}$$

et l'inverse vaut

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y). \tag{34.473}$$

Par conséquent, une bonne formule pour simuler une loi exponentielle est

$$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U). \tag{34.474}$$

Notez que $U$ étant uniforme, nous pouvons tout autant prendre $-\ln(U)/\lambda$.

### 34.7.3 Algorithme de Box-Muller

Il s'agit de simuler une loi gaussienne. La proposition est la suivante.

**Proposition 34.123.**
*Si $U$ et $V$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$, alors le couple*

$$(X,Y) = \big(\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)\big) \tag{34.475}$$

*vérifie*

*(1) $X$ est indépendante de $Y$*

*(2) $X$ et $Y$ sont de loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

*Démonstration.* Nous allons montrer la proposition en utilisant les fonctions tests. Soit donc $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et mesurable. Soient $Z$ et $W$, deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Nous allons montrer que

$$F\big(\varphi(X,Y)\big) = E\Big[\varphi\big(\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)\big)\Big]. \tag{34.476}$$

Par indépendance de $U$ et $V$, la densité du couple est le produit des densités, donc en passant aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}
\diamondsuit &= E\big[\varphi(Z,W)\big] && (34.477a)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}\varphi(x,y)e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dxdy && (34.477b)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-r^2/2}rdr. && (34.477c)
\end{aligned}$$

Nous posons $u = e^{-r^2/2}$ et $v = \frac{\theta}{2\pi}$. En particulier $r = \sqrt{-2\ln(u)}$ et

$$\begin{aligned}
\diamondsuit &= \int_0^1\int_0^1 \varphi\big(\sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v)\big)dudv && (34.478a)\\
&= E\Big(\varphi\big(\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)\big)\Big) && (34.478b)
\end{aligned}$$

parce que mesure $dudv$ est la densité de la loi uniforme. □

En pratique, la formule

$$(x,y) \mapsto \big(\sqrt{-2\ln x}\cos(2\pi y), \sqrt{-2\ln x}\sin(2\pi y)\big) \tag{34.479}$$

est une façon d'obtenir deux gaussiennes à partir de deux variables uniformes.

### 34.7.4 Méthode du rejet

La méthode du rejet permet de simuler des lois à densité. Soit $f$ la densité de la loi à simuler. Nous faisons les hypothèses suivantes.

(1) Il existe une densité $g$ d'une variable aléatoire facile à simuler.

(2) Il existe un $k \geqslant 0$ tel que $f(x) \leqslant kg(x)$.

**Remarque 34.124.**
Le $k$ de la seconde hypothèse est nécessairement plus grand que 1. En effet,

$$1 = \int f \leqslant k\int g = k \tag{34.480}$$

parce que $f$ et $g$ sont des densités et ont donc une intégrale égale à 1.

**Proposition 34.125.**
*Soient $(X_n)$ et $(U_n)$ des suites de variables aléatoires indépendantes au sens où non seulement les $X_i$ et $U_k$ sont indépendants entre eux, mais de plus $X_i$ est indépendant de $U_j$ pour tout $i$ et $j$. Nous supposons que les $X_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de densité $g$ et que les $U_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme.*

*Nous introduisons la variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$

$$p(\omega) = \inf\{n \geqslant 0 \text{ tel que } \alpha\big(X_n(\omega)\big) \geqslant U_n(\omega)\} \tag{34.481}$$

*où $\alpha$ est la fonction définie par*

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{kg(x)} & si\ g(x) \neq 0 \\ 0 & si\ g(x) = 0. \end{cases} \tag{34.482}$$

*Alors la variable aléatoire $Y$ définie par*

$$Y(\omega) = X_{p(\omega)}(\omega) \tag{34.483}$$

*admet $f$ pour densité.*

*Démonstration.* D'abord étant donné que $f(x) \leqslant kg(x)$ nous avons $\alpha(x) \in [0,1]$. Nous pouvons a priori avoir $p(\omega) = \infty$, ce qui rendrait caduque la définition de $Y(\omega)$. Montrons donc pour commencer que $P(p = \infty) = 0$. En utilisant l'indépendance nous avons

$$\begin{aligned} P\big(\alpha(X_n) < U_n, \forall n\big) &= \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} P\big(\alpha(X_i) < U_i\big) && (34.484a) \\ &= \lim_{N\to\infty} P\big(\alpha(X_1) < U_1\big)^N. && (34.484b) \end{aligned}$$

Pour conclure nous devons prouver que $P\big(\alpha(X_1) < U_1\big) < 1$. Pour cela nous calculons

$$\begin{aligned} P\big(\alpha(X_1) < U_1\big) &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^1 du \mathbb{1}_{\alpha(x)<u} g(x) && (34.485a) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\big(1 - \alpha(x)\big)dx && (34.485b) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(g(x) - \frac{f(x)}{k}\right) && (34.485c) \\ &= 1 - \frac{1}{k} && (34.485d) \\ &< 1. && (34.485e) \end{aligned}$$

L'équation (34.484) nous permet donc de conclure que $P\big(\alpha(X_n) < U_n, \forall n\big) = 0$. Par conséquent la variable aléatoire $Y(\omega) = X_{p(\omega)}(\omega)$ a un sens.

Nous devons maintenant prouver que $Y$ a bien $f$ pour densité. Pour cela nous considérons un ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$ et nous montrons que $P(Y \in A) = \int_A f(x)dx$. Nous avons

$$P(Y \in A) = P(X_p \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_j \in A, p = j). \tag{34.486}$$

Par ailleurs nous avons

$$\begin{aligned} P(X_j \in A, p = j) &= P\big(X_j \in A, \alpha(X_j) \geqslant U_j, \alpha(X_m) < U_m\, \forall m \leqslant j-1\big) \\ &= P\big(X_j \in A, \alpha(X_j) \geqslant U_j\big) P\big(\alpha(X_1) < U_1\big)^{j-1} \\ &= P\big(X_j \in A, \alpha(X_j) \geqslant U_j\big) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j-1}. \end{aligned} \tag{34.487}$$

Étant donné que $g(x)dx$ est la densité de $X_j$ et que $du$ est la densité de $U$, nous avons

$$\begin{aligned} P\big(X_j \in A, \alpha(X_j) \geqslant U_j\big) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \mathbb{1}_{x\in A} \mathbb{1}_{\alpha(x)\geqslant u} g(x) du dx && (34.488a) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathbb{1}_{x\in A} \underbrace{\int_0^1 \mathbb{1}_{\alpha(x)\geqslant u} du}_{\alpha(x)}\, dx. && (34.488b) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x\in A} \frac{f(x)}{k} dx && (34.488c) \\ &= \frac{1}{k} P(X \in A). && (34.488d) \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (34.487) nous trouvons

$$P(X_j \in A, p = j) = \frac{1}{k} P(X \in A) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j-1}. \tag{34.489}$$

Et enfin, l'équation (34.486) donne

$$P(Y \in A) = \frac{1}{k} P(X \in A) \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j-1} = P(X \in A). \tag{34.490}$$

□

### 34.7.5 Simuler une loi géométrique à l'ordinateur

Si $(X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $X_n \sim \mathscr{B}(p)$, alors

$$Z = \min\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_k = 1\} \sim \mathscr{G}(p). \tag{34.491}$$

Nous avons alors $P(Z = k) = (1 - p)^k p$.

Si nous avons un générateur de lois de Bernoulli de paramètre $p$, alors nous on simulons jusqu'à obtenir 1 et nous comptons combien de simulations ont été nécessaires.

### 34.7.6 Simuler une loi exponentielle à l'ordinateur

Nous pouvons utiliser la méthode de l'inversion. Étant donné que la fonction de répartition de la loi exponentielle est $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, nous avons $F^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$. Par conséquent à partir d'un générateur uniforme $U$, nous pouvons calculer

$$F^{-1}(U) = \frac{1}{\lambda} \ln(U) \tag{34.492}$$

qui suivra une loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$.

### 34.7.7 Simuler une loi de Poisson à l'ordinateur

Nous savons du point 34.5.8 que si les $T_i$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathscr{E}(\lambda)$, alors nous avons

$$\max\{n \geqslant 1 \text{ tel que } \sum_i T_i \leqslant 1\} \sim \mathscr{P}(\lambda). \tag{34.493}$$

La façon usuelle pour créer une loi exponentielle est d'avoir un générateur de loi uniforme $U_i$ et d'écrire que

$$-\frac{1}{\lambda} \ln(U_i) \sim \mathscr{E}(\lambda). \tag{34.494}$$

Nous devons donc faire la somme de telles variables aléatoires et voir à partir de quel moment la somme dépasse 1. Le calcul est le suivant :

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \ln(U_i) \leqslant 1 \tag{34.495}$$

implique

$$\prod_{i=1}^{n} U_i \leqslant e^{-\lambda}. \tag{34.496}$$

En pratique, la variable aléatoire qui se comporte comme une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ est

$$N = \max\{n \geqslant 1 \text{ tel que } \prod_{i=1}^{n} U_i \geqslant e^{-\lambda}\}. \tag{34.497}$$

Nous générons donc des nombres aléatoires entre 1 et 1 et nous effectuons le produit jusqu'à ce qu'il passe en dessous de $e^{-\lambda}$. À ce moment, nous retournons le nombre de nombres qu'il a fallu générer.

## 34.8 Sage

Nous allons montrer maintenant quelques trucs importants dans l'utilisation de Sage pour réaliser des petits graphiques.

**Remarque 34.126.**
Dans ce qui suit, nous allons parler de «Sage», mais en réalité nous allons surtout parler du module `scipy` qui fait partie des modules hyper-usuels de Python. Les remerciements vont donc au moins autant du côté de l'équipe de `scipy` que vers celle de Sage.

### 34.8.1 Loi exponentielle

Il faut savoir que la définition d'une loi continue retourne automatiquement la loi centrée réduite. Pour avoir une loi exponentielle de moyenne donnée, il faut donc préciser de façon plus maligne que ce que l'on croit.

```
1 from scipy import stats
2
3 X=stats.expon(scale=5)
4 print(X.mean())      # retourne 5
5
6 P=plot( X.pdf,x,0,10 )
7 show(P)              # Affiche le graphique
```

tex/frido/code_sage1.py

### 34.8.2 Inverser des lois

Pour trouver des intervalles de confiance, il faut souvent calculer des inverses de loi. Bien entendu Sage le fait. Ce que sage connaît, c'est l'inverse de la fonction de survie. Autrement dit si `X` est une variable aléatoire, `X.sf` est la fonction $x \mapsto 1 - P(X < x)$ et `X.isf` en est l'inverse. Pour résoudre $P(X < \xi) = \alpha$, il faut résoudre $F(\xi) = \alpha$, c'est à dire

$$1 - F(\xi) = 1 - \alpha, \tag{34.498}$$

ce qui se fait de la façon suivante : le programme suivant donne pour une loi normale centrée réduite la valeur de $\xi$ pour laquelle $P(N < \xi) = 0.05$ : lstinputlistingtex/frido/code_sage2.py

## 34.9 Monte-Carlo

Nous voudrions calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{34.499}$$

Les méthodes classiques consistent à discrétiser l'intervalle $[a, b]$ et en calculant une somme de la forme $\sum_i w_i f(x_i)$.

L'idée de Monté Carlo est de remplacer le découpage déterministe $x_i$ par des variables aléatoires $X_i$ en trois étapes.

(1) Pour cela nous commençons par écrire l'intégrale comme une espérance : $I = E(X)$ où $X$ est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à déterminer. Une contrainte est évidemment d'avoir $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(2) Nous générons une suite indépendantes et identiquement distribuée de variables aléatoires $(X_n)$ de même loi que $X$ et la loi (forte) des grands nombres implique que

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s.} E(X) = I. \tag{34.500}$$

(3) Le dernier point sera de donner un intervalle de confiance.

**Exemple 34.127**
Nous voudrions déterminer de façon approchée l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$. Si $U \sim \mathscr{U}[0,1]$, alors

$$I = E\big(f(U)\big) \tag{34.501}$$

et il suffit de faire

$$I \simeq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_i). \tag{34.502}$$

où mes $U_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathscr{U}[0,1]$. △

**Exemple 34.128**
Supposons que la fonction à intégrer se présente sous la forme $f(x) = h(x)g(x)$ avec $g \geqslant 0$ et telle que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} g$ existe. Notons

$$c = \int_{\mathbb{R}} g \tag{34.503}$$

et

$$I = \int_{\mathbb{R}} h(x)c\frac{g(x)}{c}dx. \tag{34.504}$$

Nous avons alors $I = E\big(ch(Y)\big)$ où $Y$ admet la densité $g(x)c$. △

Passons au cas de plusieurs variables et considérons l'intégrale

$$I = \int_{[0,1]^1} f(x_1,\dots,x_d)dx_1\dots dx_d. \tag{34.505}$$

Nous écrivons

$$I = E\big(f(U_1,\dots,U_d)\big) \tag{34.506}$$

où les $U_i$ sont de loi uniformes sur $[0,1]$. En pratique, nous générons une suite de variables aléatoires de $(Z_k)$ de lois uniformes que nous regroupons par paquets :

$$V_k = (Z_{dk}, Z_{dk+1},\dots,Z_{d(k+1)-1}). \tag{34.507}$$

Ces variables aléatoires $V_k$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathscr{U}[0,1]^d$. Ensuite la loi des grands nombres nous indique que

$$I \sim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(V_k). \tag{34.508}$$

### 34.9.1 Intervalle de confiance

#### 34.9.1.1 Principe

Nous supposons que nous travaillons sur une approximation de Monte-Carlo telle que la variable aléatoire choisie soit dans $L^2$. La loi des grands nombres nous dit que $\bar{X}_n \sim I$ tandis que le théorème central limite nous enseigne que

$$\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1). \tag{34.509}$$

Par conséquent

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sigma/\sqrt{n}} \in [-u,u]\right) \simeq P(-u \leqslant Z \leqslant u) \tag{34.510}$$

où $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$. En remplaçant $E(X)$ par $I$ et en effectuant les manipulations usuelles, nous trouvons que $P(I \in J_\alpha) = 1-\alpha$ si

$$J_\alpha = \left[\bar{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{34.511}$$

où $\sigma^2$ est la variance de $X$. Si $\sigma$ n'est pas connue, alors nous le remplaçons par un estimateur

$$S'_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2 \tag{34.512}$$

et nous considérons l'intervalle

$$J'_\alpha = \left[\bar{X}_n - u_\alpha \frac{S'_n}{\sqrt{n}} \bar{X}_n + u_\alpha \frac{S'_n}{\sqrt{n}}\right]. \tag{34.513}$$

Il y a deux façons de faire diminuer la longueur de l'intervalle de confiance : augmenter $n$ ou diminuer $\sigma$. Pour le second point, le choix de $X$ dans $I = E(X)$ est essentiel.

**Exemple 34.129**
Soit à calculer

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\beta z} e^{-z^2/2} dz \tag{34.514}$$

avec $\beta > 0$. Nous introduisons la variable aléatoire $X = e^{\beta Z}$ avec $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$. Nous avons alors

$$I = E(X). \tag{34.515}$$

Par ailleurs l'intégrale demandée vaut $e^{\beta^2/2}$. En appliquant les formules vues plus haut nous trouvons

$$J_\alpha = \left[\bar{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{34.516}$$

où

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E(e^{2\beta Z}) - E(e^{\beta z})^2 = e^{2\beta^2} - e^{\beta^2}. \tag{34.517}$$

Nous avons utilisé la formule (34.382). Si nous choisissons $\beta = 2$, nous trouvons $\sigma^2 \simeq 2926$. Donc si nous voulons une longueur de $J_\alpha$ plus petite que $10^{-2}$ tout en demandant $\alpha = 0.05$ (ce qui implique $u_\alpha = 1.96$), nous devons avoir

$$1.96\frac{2973}{\sqrt{n}} < 10^{-2}, \tag{34.518}$$

c'est à dire environ $n = 10^{11}$, ce qui soit dit en passant est très largement au delà des capacités de la commande rand de scilab. △

Nous allons maintenant voir quelques méthodes pour réduire la variance.

#### 34.9.1.2 Échantillonnage préférentiel

Nous devons calculer $I = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$. Pour cela nous introduisons artificiellement une densité $g$ et nous écrivons

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = E\left(\frac{f(Y)}{g(Y)}\right) \tag{34.519}$$

où $Y$ est de densité $g$. Il faut essayer de trouver $g$ de telle sorte à ce que

$$\mathrm{Var}\left(\frac{f(Y)}{g(Y)}\right) \tag{34.520}$$

soit la plus petite possible.

#### 34.9.1.3 Méthode de la variable de contrôle

Soit $I = E(X)$. Nous introduisons une variable aléatoire $Z$ et nous écrivons

$$I = E(X - Z) + E(Z). \tag{34.521}$$

Il faut alors choisir $Z$ de telle sorte que $E(Z)$ soit calculable et que $X - Z$ ait une variance plus faible. En particulier, $Z$ ne peut pas être indépendante de $X$.

#### 34.9.1.4 Variables antithétiques

Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$. La première idée (exemple 34.127) est d'écrire

$$I = E\big(f(U)\big) \tag{34.522}$$

où $U \sim \mathscr{U}[0,1]$, mais nous n'avons pas de garanties sur la variance de $f(U)$. Nous pouvons écrire

$$I = E\big(f(U)\big) = E\Big[\frac{1}{2}\big(f(U) - f(1-U)\big)\Big]. \tag{34.523}$$

Ici $1-U$ est encore une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, mais il se fait que la variable aléatoire

$$Z = \frac{1}{2}\big(f(U) + f(1-U)\big) \tag{34.524}$$

a une variance inférieure à $\text{Var}\big(f(U)\big)$. En effet, $f(U)$ et $f(1-U)$ ne sont pas indépendantes, par conséquent le résultat du lemme 34.23 n'est pas valide, par contre la proposition 34.28 reste vraie et nous avons

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{4}\text{Var}\big(f(U)\big) + \frac{1}{4}\text{Var}\big(f(1-U)\big) + \frac{1}{2}\text{Cov}\big(f(U), f(1-U)\big). \tag{34.525}$$

Nous avons $\text{Var}\big(f(1-U)\big) = \text{Var}\big(f(U)\big)$. En ce qui concerne le terme avec la covariance, nous lui appliquons l'équation (34.56) :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}\big(f(U), f(1-U)\big) &= E\Big((f(U) - I)(f(1-U) - I)\Big) && \text{(34.526a)}\\
&\leqslant E\big((f(U) - I)^2\big)^{1/2} E\big((f(1-U) - I)^2\big)^{1/2} && \text{(34.526b)}\\
&= \text{Var}\big(f(U)\big) && \text{(34.526c)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $E\big(f(U)\big) = E\big(f(1-U)\big) = I$. Au final nous avons bien obtenu

$$\text{Var}(Z) \leqslant \text{Var}\big(f(U)\big). \tag{34.527}$$

## 34.10 Résultats qui se démontrent avec des variables aléatoires

### 34.10.1 Nombres normaux

Tout nombre $x \in [0,1[$ admet un unique[13] développement en base $b \geqslant 2$ :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n(x)}{b^n} \tag{34.528}$$

avec $\epsilon_n(x) \in \mathcal{A} = \{0, \dots, b-1\}$.

Soit $k \geqslant 1$ et $r \in \mathcal{A}^k$ ; nous posons

$$N_x(r,n) = \text{Card}\big\{i \in \{1, \dots, n-k+1\} \text{ tel que } \epsilon_1(x) = r_1, \dots, \epsilon_{i+k-1} = r_k\big\}. \tag{34.529}$$

C'est le nombre d'occurrences du motif $r$ (de longueur $k$) dans les $n$ premières décimales de $x$.

13. Nous excluons 1 parce que son développement en puissances négatives de $b$ est zéro.

**Définition 34.130.**
*Un nombre $x \in [0,1[$ est **normal** en base $b$ si pour tout $r \in \{0,\dots,b-1\}^k$ nous avons*

$$\frac{N_x(b,n)}{n} \to \frac{1}{b^k}. \tag{34.530}$$

*Un nombre est normal s'il est normal en toute base.*

**Proposition 34.131** ([354, 2])**.**
*Au sens de la mesure de Lebesgue, presque tous les nombres de $[0,1[$ sont normaux.*

*Démonstration.* Pour $x \in [0,1[$, nous notons $\epsilon_n(x)$ son développement en base $b$. Cela nous donne des variables aléatoire $\epsilon_i : [0,1[ \to \mathcal{A}$ dont la loi de probabilité est donnée par

$$P(\epsilon_1 = d) = P\big([\frac{d}{b}, \frac{d+1}{b}[\big) = \frac{1}{b} \tag{34.531}$$

parce que l'intervalle $[\frac{d}{b}, \frac{d+1}{d}[$ est l'ensemble des nombres de $[0,1[$ dont la première décimale est $d$. Pour la loi des $\epsilon_i$, il faut un peu plus découper, mais ça donne le même résultat : $P(\epsilon_i = d) = 1/b$. Ces variables aléatoire sont indépendantes et identiquement distribuées. Nous considérons aussi la variable aléatoire

$$\begin{aligned} N(r,n) : [0,1[ &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto N_x(r,n) \end{aligned} \tag{34.532}$$

Pour un $r \in \mathcal{A}$ fixé, nous définissons encore la variable aléatoire

$$\begin{aligned} X_j : \mathcal{A} &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_j(x) = b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{34.533}$$

Les variables aléatoire $X_j$ sont des variables aléatoire de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées de paramètre $E(X_j) = P(X_j = 1) = P(\epsilon_1 = b) = \frac{1}{b}$. Nous pouvons utiliser dessus la loi forte des grands nombres (théorème 34.83). Pour dire que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} E(X_1) = \frac{1}{b}. \tag{34.534}$$

Mais en réalité nous avons aussi $\sum_{j=1}^{n} X_j = N(r,n)$ parce que en appliquant à $x \in [0,1[$ :

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_j(x) = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \operatorname{Card}\big\{i \in \{1,\dots,n\} \text{ tel que } \epsilon_i(x) = r\big\} = N_x(r,n), \tag{34.535}$$

de sorte que l'équation (34.534) nous dit exactement que pour tout $r \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_x(r,n)}{n} = \frac{1}{b} \tag{34.536}$$

pour presque tout $x \in [0,1[$.

Il reste à prouver la même chose pour tout $r \in \mathcal{A}^k$. Voyons avec $k = 2$ et $r = (u,v) \in \mathcal{A}^2$. Nous posons

$$Y_j = \mathbb{1}_{\{\epsilon_j = u, \epsilon_{j+1} = v\}}, \tag{34.537}$$

et $N(r,n) = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j$. Les $Y_i$ sont encore des binomiales de paramètre $\frac{1}{b^2}$, mais elles ne sont pas indépendantes. En effet pour avoir $Y_1(x) = Y_2(x) = 1$, il faut que les trois premières décimales de $x$ soit en même temps de la forme $uv.$ et $.uv$, donc

$$P(Y_1, Y_2 = 1) = b^3 \delta_{u,v} \tag{34.538}$$

alors que $P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 2) = b^4$. Nous pouvons contourner ce problème en remarquant que les $\epsilon_i$, eux, sont indépendants. Donc le lemme de regroupement 34.16 nous dit que la famille $\{Y_{2n}\}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes (et idem pour la famille $Y_{2n-1}$). En effet, les variables aléatoires $Y_{2n}$ correspondent à la partition 23, 45, 67, etc.

Nous appliquons la loi des grands nombres sur les deux familles indépendamment :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j-1} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{b^2} \tag{34.539}$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{b^2} \tag{34.540}$$

Pour rappel, le but pour l'instant est d'établir la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \frac{1}{b^2}$. Nous allons l'établir séparément pour les termes pairs et impairs de la suite. Pour les pairs :

$$\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n} Y_j = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j}\right) \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{b^2} \tag{34.541}$$

Pour les impairs [14] ,

$$\frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{2n-1} Y_j = \frac{n}{2n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j-1}\right) + \frac{n}{2n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j}\right) \to \frac{1}{b^2} \tag{34.542}$$

parce que les deux parenthèses convergent vers $\frac{1}{b^2}$ alors que les coefficients devant convergent vers $\frac{1}{2}$.

Au final nous avons bien

$$\frac{N(r,n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} Y_j = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} Y_j\right) \to \frac{1}{b^2} \tag{34.543}$$

tant que $r \in \mathcal{A}^2$.

Pour prouver la même chose avec $r \in \mathcal{A}^k$, il suffit de faire le même raisonnement en divisant en plus de paquets : $\{Y_{kj+m}\}_{m=1,\dots,k-1}$ sont indépendants et nous utilisons $k$ fois la loi des grands nombres.

Donc pour toute base $b$ nous savons que les nombres normaux en base $b$ forment un ensemble de mesure nulle dans $[0,1[$. Il reste à voir que leur union reste de mesure nulle. Cela est vrai parce que nous avons une union dénombrable et qu'une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle par le lemme 13.34. □

**Remarque 34.132.**
Un nombre $x$ est normal en base $b$ si et seulement si la suite $u_k = xb^k$ est équirépartie modulo 1 sur $[0,1]$ (c'est à dire quel la suite des parties fractionnelles des $u_k$ est équirépartie). Pour le nombre $0.2357873\ldots$, nous parlons de la suite $0.2357873\ldots$ ; $0.357873\ldots$ ; $0.57897\ldots$ etc. C'est la suite des queues de suites de la suite de ses décimales [15].

### 34.10.2 Théorème de Bernstein

**Théorème 34.133** (Théorème de Bernstein[2])**.**
*Soit $f \in C^0\big([0,1],\mathbb{C}\big)$ et son module de continuité*

$$\begin{aligned}\omega\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ h &\mapsto \sup\{|f(u)-f(v)| \text{ tel que } |u-v|<h\}.\end{aligned} \tag{34.544}$$

14. Ici dans [2], la seconde somme va jusqu'à $n-1$ et je ne comprends pas pourquoi.
15. C'est pas trop bien dit, mais on se comprend, non ?

*Pour $n \geqslant 0$ nous définissons le $n^e$* ***polynôme de Bernstein*** *de $f$ par*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{34.545}$$

*Alors il existe $C$ tel que pour tout $n \geqslant 1$ :*

*(1)*

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{34.546}$$

*(2)*

$$B_n(f) \xrightarrow{unif} f \tag{34.547}$$

*sur $[0,1]$.*

*(3) L'inégalité (34.546) est optimale : il existe une fonction $g \in C^0\big([0,1],\mathbb{C}\big)$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $N \geqslant 1$, $\|g - B_n(g)\|_\infty \geqslant \frac{\delta}{\sqrt{n}}$. Cette fonction peut être choisie Lipschitzienne. Une telle fonction est donnée par exemple par $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$.*

*Démonstration.* Soit $x \in [0,1]$ et une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes[16] et identiquement distribuées $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de paramètre $x$. Nous notons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(1) Pour cette histoire de convergence, il faut majorer la quantité $\big|f(x) - B_n(f)(x)\big|$. Pour cela il y a trois astuces. La première est de se souvenir que $E\big(f(x)\big) = f(x)$, et la seconde est que le théorème de transfert 34.60 appliqué à $x \mapsto f(x/n)$ donne[17]

$$E\left(f(\frac{S_n}{n})\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \tag{34.548}$$

c'est à dire que

$$B_n(f)(x) = E\left(f(\frac{S_n}{n})\right). \tag{34.549}$$

Et enfin la troisième astuce est d'utiliser le lemme 18.114 pour avoir

$$\omega\left(|x - \frac{S_n}{n}|\right) = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|\sqrt{n} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}|\right) \leqslant \left(\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}| + 1\right)\omega(\frac{1}{\sqrt{n}}). \tag{34.550}$$

À partir de là nous pouvons un peu calculer :

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - B_n(f)(x)\big| &= \Big|E\left(f(x) - f(\frac{S_n}{n})\right)\Big| && (34.551a)\\
&\leqslant E\left(|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|\right) && (34.551b)\\
&\leqslant E\left(\omega\Big(|x - \frac{S_n}{n}|\Big)\right) && (34.551c)\\
&\leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) E\left(|\sqrt{n}x - \frac{S_n}{n}| + 1\right). && (34.551d)
\end{aligned}$$

Le dernier facteur peut être récrit sous la forme

$$E\left(\sqrt{n}\big|x - \frac{S_n}{n}\big| + 1\right) = \sqrt{n}E\left(\big|x - \frac{S_n}{n}\big|\right) + 1, \tag{34.552}$$

et c'est là que nous pouvons utiliser l'inégalité de Hölder 24.22 :

$$E\big(|X|\big) = \|X\|_1 \leqslant \|X\|_2 \tag{34.553}$$

16. Définition 34.9.
17. Nous avons aussi utilisé la formule de l'espérance pour les variables aléatoires discrètes.

où $\|X\|_2$ désigne

$$\|X\|_2 = \sqrt{E\big(|X|^2\big)}. \tag{34.554}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\big|f(x) - B_n(f)(x)\big| \leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\|x - \frac{S_n}{n}\|_2 + 1\right). \tag{34.555}$$

Nous étudions maintenant de plus près la quantité $\|x - \frac{S_n}{n}\|_2$. D'abord

$$E\left(\big|x - \frac{S_n}{n}\big|^2\right) = x^2 - 2\frac{x}{n}E(S_n) + \frac{1}{n^2}E(S_n^2). \tag{34.556}$$

Ensuite nous savons l'espérance de $S_n$ (qui vaut $E(S_n) = nx$) par (34.326) et le lemme 34.22 nous permet de calculer $E(S_n^2)$ par indépendance des $X_i$ qui composent $S_n$. Nous avons alors

$$E\left(\big|x - \frac{S_n}{n}\big|^2\right) = x^2 - 2x^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} E(X_i)E(X_j) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) \tag{34.557a}$$

$$= -x^2 + \frac{n^2 - n}{n^2}x^2 + \frac{nx}{n^2} \tag{34.557b}$$

$$= \frac{x(1-x)}{n}. \tag{34.557c}$$

Quelques justifications :

— $E(X_i) = E(X_i^2) = x$ parce que $X_i$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $x$.

— La première somme contient tous les couples $(i, j)$ sauf les diagonaux ; il y en a donc $n^2 - n$.

En recombinant le tout,

$$\big|f(x) - B_n(f)(x)\big| \leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} + 1\right) \tag{34.558a}$$

$$= \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{x(1-x)} + 1\right) \tag{34.558b}$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{34.558c}$$

La dernière majoration est une rapide étude de la fonction $x(1-x)$.

Étant donné que les majorations (34.558) sont valables pour tout $x$, en passant au supremum nous avons

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0. \tag{34.559}$$

Ceci prouve les deux premiers points du théorème.

(2) Fait.

(3) Nous considérons la fonction

$$g(x) = \|x - \frac{1}{2}j\| \tag{34.560}$$

et nous vérifions qu'elle vérifie toutes les conditions. D'abord si $u, v \in [0, 1]$ alors

$$\big|g(u) - g(v)\big| \leqslant |u - v| \tag{34.561}$$

et donc $\omega(h) \leqslant h$, ce qui signifie que $g$ est 1-Lipschitz. Le principe de cette partie est de montrer que $\|g - B_n(g)\|_\infty$ est plus grand que d'autres trucs (et non plus petit que d'autres trucs comme d'habitude). Nous commençons par

$$\|g - B_n(g)\|_\infty \geqslant g(\frac{1}{2}) - B_n(g)(\frac{1}{2}). \tag{34.562}$$

Très vite nous nous rendons compte que $g(1/2) = 0$. Ensuite nous nous souvenons que

$$B_n(g)(\frac{1}{2}) = E\left(g(\frac{S_n}{n})\right) = E\left(|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}|\right) = \frac{1}{2n}E\big(|2S_n - n|\big). \tag{34.563}$$

si nous posons $\epsilon_i = 2X_i - 1$, alors les $\epsilon_i$ sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes et identiquement distribuées qui satisfont à $2S_n - n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$. Nous utilisons la proposition 34.115 :

$$\|f - B_n(f)_\infty\| \geqslant \frac{1}{2n}E\big(|\sum_i \epsilon_i|\big) \geqslant \frac{1}{2n\sqrt{e}}\|\sum_{i=1}^n \epsilon_j\|_2. \tag{34.564}$$

Calculons ce qui est dans la norme :

$$\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j\|_2^2 = E\left(\big(\sum_{j=1}^n \epsilon_j\big)^2\right) = \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} E(\epsilon_i)E(\epsilon_j) + \sum_{i=1}^n E(\epsilon_i^2) = 0 + n = n. \tag{34.565}$$

Nous finissons alors notre travail de majoration :

$$\|f - B_n(f)_\infty\| \geqslant \frac{1}{2n\sqrt{e}}\|\sum_{i=1}^n \epsilon_j\|_2 \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{e}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{e}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{34.566}$$

□

# Chapitre 35

# Statistiques

## 35.1 Notations et hypothèses

Nous notons $X$ le caractère à étudier, et $\Omega$ l'ensemble des individus. Le caractère à étudier est vu comme une fonction sur $\Omega$ :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{N}, \{0,1\}, \ldots \tag{35.1}$$

Les **statistiques descriptives** sont les techniques pour présenter et résumer les données : diagrammes, graphiques, indicateurs numériques : moyenne, écart-type, médiane, ...

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(1) Chaque observation $x_i$ est la réalisation de la variable aléatoire $X$ qui sera de loi inconnue $\mu$.
(2) Le $n$-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ est la réalisation de $(X_1, \ldots, X_n)$ qui est l'échantillon de taille $n$.
(3) Les variables aléatoires $X_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune $\mu$. La loi $\mu$ est la **loi parente** de l'échantillon.

**Exemple 35.1**
Un échantillon de taille 1 consisterait à tirer au sort une personne dans une population et mesurer sa taille. △

**Exemple 35.2**
Une échantillon de taille $n$ consisterait à tirer au sort $n$ personnes dans une population et de mesurer leurs tailles. △

L'**inférence statistique** est l'art de dégager des informations sur la population à partir d'informations partielles : intervalles de confiance, estimateurs, test d'hypothèses, ...

En théorie des probabilités, nous connaissons la loi de la variable aléatoire $X$ et nous en déduisons des informations sur le réalisations de $X$ : valeur la plus probable, moyenne, intervalle dans lequel $X(\omega)$ a le plus de chance d'appartenir. En statistique, au contraire, la loi est inconnues et nous cherchons des informations sur la loi à partir d'un échantillon de données numériques observées.

## 35.2 Modèle statistique

Une **modèle statistique** est un triplet

$$\mathcal{S} = \Big[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta)_{\theta\in\Theta}, (\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}\Big] \tag{35.2}$$

où $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé, $(X_\theta)$ est une famille de variables aléatoires définies sur $\Omega$ et telles que pour tout $\theta \in \Theta$, la variable aléatoire $X_\theta$ suive la loi $\mu_\theta$. Les $\mu_\theta$ sont des mesures sur les boréliens de $\mathbb{R}$ et pour tout $B \in \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$ nous avons

$$P(X_\theta \in B) = \mu_\theta(B). \tag{35.3}$$

**Remarque 35.3.**
D'une certaine manière, l'introduction de $\mu_\theta$ dans la définition est redondante parce que ces mesures sont déjà contenues dans la données des variables aléatoires $X_\theta$.

**Exemple 35.4**(Modèle statistique gaussien)
Si nous savons que les variables aléatoires $X_i$ suivent une loi gaussienne, alors nous considérons $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $\theta = (m, \sigma^2 j)$. Dans ce cas, $\mu_\theta = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et le but de la statistique est de déterminer la valeur de $\theta$ qui correspond à une population en partant de l'observation d'un échantillon. △

**Définition 35.5.**
*Si $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, nous disons que le modèle statistique est un modèle **paramétrique**.*

Le modèle gaussien est un modèle paramétrique : dès que $m$ et $\sigma^2$ sont déterminés, la loi du phénomène $X$ est connue.

**Définition 35.6.**
*Pour chaque $\theta \in \theta$, un **échantillon** de taille $n$ associé à un modèle statistique $\big[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta), (\mu_\theta)\big]$ est un vecteur $\big(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n}\big)$ de taille $n$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de la même loi que la variable aléatoire $X_\theta$. La loi $\mu_\theta$ est la **loi parente** de l'échantillon.*

**Définition 35.7.**
*Un **modèle d'échantillonnage** sur le modèle statistique $\mathcal{S}$ est une famille $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})_{\theta\in\Theta}$ d'échantillons de taille $n \geqslant 1$.*

Nous noterons souvent $(X_1, \dots, X_n)$ à la place de $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ un échantillon, mais il faut se souvenir que les $X_i$ suivent toujours la même loi donnée par $\theta$. La loi du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est $\mu_\theta \otimes \dots \otimes \mu_\theta$ et est définie sur l'espace $(\Omega^n, \mathcal{F} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}, P^{\otimes n})$.

**Remarque 35.8.**
Le travail du statisticien est de proposer un modèle statistique $\mathcal{S}$ a priori. Si nous étudions la taille d'une population, nous allons choisir un modèle gaussien. Plus le modèle est précis, plus l'espace $\Theta$ est petit mais plus il y a de risques que le vérité soit hors de l'ensemble considéré.

**Exemple 35.9**
Soit $X$ une variable aléatoire de carré intégrable que l'on sait simuler. Afin d'évaluer la moyenne $\mu$ de $X$, nous pouvons considérer la moyenne empirique des simulations : $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ où les variables aléatoires $X_i$ sont indépendantes, identiquement distribuées et de même loi que $X$.

La loi des grands nombres nous enseigne que $\bar{X}_n \to \mu$. De plus,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mu \in \left[\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = \int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}. \tag{35.4}$$

En effet, la condition sur $\mu$ est équivalente à

$$-a \leqslant \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant a, \tag{35.5}$$

tandis que le théorème central limite nous enseigne que la variable aléatoire $\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ se comporte comme $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $n$ est grand. Dans ce cas, nous avons que

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in [-a, a]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}dx. \tag{35.6}$$

Notons que dans ce calcul nous avons utilisé le fait que $\mu = E(X_1)$.

Montrons que la suite

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \tag{35.7}$$

converge presque sûrement vers $\sigma^2$. Le théorème central limite implique que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{p.s.} E(X_1^2) \tag{35.8}$$

et que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \xrightarrow{p.s.} E(X_1)^2. \tag{35.9}$$

La différence converge donc presque sûrement vers $\sigma^2$ en vertu de la proposition 34.26.

Nous avons également $E(\sigma_n^2) = \sigma^2$. En effet, sachant que $E(X_i) = E(X_1) = \mu$ et que $E(X_i^2) = E(X_1^2) = \mu^2 + \sigma^2$,

$$E(\sigma_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)\right) + \sum_{i\neq j} E(X_iX_j)) \tag{35.10a}$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n^2}\big(n(\sigma^2+\mu^2) + (n^2-n)\mu^2\big) \tag{35.10b}$$

$$= \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2, \tag{35.10c}$$

dont la limite $n \to \infty$ donne bien $\sigma^2$.

Nous voudrions à présent montrer que

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_n/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1). \tag{35.11}$$

Vu que le théorème central limite donne une convergence en loi, nous pouvons utiliser le lemme de Slutsky pour montrer que

$$\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{1/\sqrt{n}}, \sigma_n^2\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\sigma Z, \sigma^2) \tag{35.12}$$

où $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$. En vertu de la proposition 34.75 appliqué à la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{35.13}$$

nous avons la convergence en loi

$$f\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{1/\sqrt{n}}, \sigma_n^2\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} f(\sigma Z, \sigma^2), \tag{35.14}$$

c'est à dire

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_n/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z. \tag{35.15}$$

Afin d'être complet, précisons que

$$P\big((\sigma Z, \sigma) \in \mathbb{R} \times \{0\}\big) = 0. \tag{35.16}$$

△

**Proposition 35.10.**
*Soit $X_i$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi parente $\mathscr{B}(n,p)$. Alors si $\bar{X}_n$ désigne la moyenne empirique,*

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z \sim \mathscr{N}(0,1). \tag{35.17}$$

*Démonstration.* Cela est une application de la loi des grands nombres, tu théorème central limite, du lemme de Slutsky et de la proposition 34.75.

D'abord, la loi des grands nombres nous indique que $\bar{X}_n \to p$ parce que $p$ est l'espérance de Bernoulli. Ensuite nous avons

$$\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \tag{35.18}$$

parce que la variance d'une loi de Bernoulli est $p(1-p)$. Le théorème central limite nous indique par conséquent que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z \sim \mathscr{N}(0,1). \tag{35.19}$$

Le lemme de Slutsky implique alors la convergence du couple :

$$\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}, \bar{X}_n\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} (Z,p). \tag{35.20}$$

Nous appliquons maintenant la proposition 34.75 avec la fonction

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{p(1-p)}x}{\sqrt{y(1-y)}} \tag{35.21}$$

qui est une fonction dont l'ensemble des points de discontinuité est $C = \{0\}$. Étant donné que $P(\bar{X}_n = 0) = 0$, la proposition s'applique et nous avons

$$f\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}, \bar{X}_n\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} f(Z,p), \tag{35.22}$$

c'est à dire

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z \sim \mathscr{N}(0,1). \tag{35.23}$$

□

## 35.3 Modèles d'échantillonnages

Soit $X$, une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un **échantillon** de taille $n$ pour $X$ est une suite de $n$ variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indépendantes et de même loi que $X$. Nous disons que la loi de $X$ est la **loi parente** de la suite $X_i$.

**Définition 35.11.**
*Soit*

$$\mathcal{S} = \Big[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta), (\mu_\theta)\Big]_{\theta\in\Theta}, \tag{35.24}$$

*un modèle statistique. Un **modèle d'échantillonnage** de taille $n$ associée au modèle statistique $\mathcal{S}$ est la donnée d'une famille de $n$-échantillons $(X_{\theta,1}), \dots, X_{\theta,n}$ telle que pour tout $\theta \in \Theta$, l'échantillon $(X_{\theta,i})$ soit de variable parente $X_\theta$.*

La **moyenne empirique** du $n$-échantillon $(X_i)$ est la variable aléatoire

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{35.25}$$

La proposition suivante signifie que la moyenne empirique est une «bonne» façon d'approcher la variable aléatoire.

**Proposition 35.12.**
*Soit $X$, une variable aléatoire dans $L^2(\Omega)$ (c'est à dire $E(X^2) < \infty$) d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$. Alors*

*(1) $E(\bar{X}_n) = m$ et $\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.*

*(2) Nous avons les convergences*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} m \tag{35.26a}$$

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z \sim \mathscr{N}(0,1). \tag{35.26b}$$

*(3) Si $X$ est de loi $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$, alors $\bar{X}_n \sim \mathscr{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$, c'est à dire*

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathscr{N}(0,1). \tag{35.27}$$

**Remarque 35.13.**
L'intérêt de cette proposition en statistique descriptive expérimentale est le suivant. La taille moyenne des français est un nombre $m$ qui existe, mais qui est largement hors de portée de l'expérience (mesurer $65 \cdot 10^6$ personnes risque de prendre un sacré temps). Si on mesure seulement $n$ personnes dont les tailles sont $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ (ici $x_i$ est un *nombre expérimental*, pas une variable aléatoire), alors on peut calculer la moyenne $\bar{x}_n$ de ces $n$ personnes-là. La proposition indique que si $n$ est assez grand, alors $\bar{x}_n$ donne une bonne idée de $m$.

Ne pas confondre $X_n$ qui est une variable aléatoire, c'est à dire une application mesurable, qui nous sert à démontrer des théorèmes en mathématique, avec $x_n$ qui est un nombre mesuré sur le terrain, qui a une existence *physique* bien définie, mais aucun status mathématique.

Si on croit que toute cette histoire de variables aléatoires, de tribu et de mesures décrit effectivement la réalité, alors on peut croire que le comportement de la suite $\bar{X}_n$ décrit bien le comportement de la suite $\bar{x}_n$ (cette dernière n'étant même pas une suite parce qu'on n'a jamais qu'un nombre fini de mesures expérimentales).

La **variance empirique** d'un échantillon est la variable aléatoire

$$V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2. \tag{35.28}$$

La **variance empirique corrigée** est la variable aléatoire

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2. \tag{35.29}$$

**Lemme 35.14.**
*La variance corrigée et la variance empirique ont comme espérances :*

$$E(V_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \tag{35.30a}$$

$$E(S_n^2) = \sigma^2. \tag{35.30b}$$

*Démonstration.* Nous commençons par calculer l'espérance de la variance non corrigée. La première étape est de la récrire sous la forme

$$\begin{aligned} V_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_k (X_k^2 - 2X_k\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) \\ &= \frac{1}{n}\sum_k X_k^2 - \frac{2}{n}\bar{X}_n \underbrace{\sum_k X_k}_{=n\bar{X}_n} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_k \bar{X}_n^2}_{=n\bar{X}_n^2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_k X_k^2 - 2\bar{X}_n^2 + \bar{X}_n^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_k X_k^2 - \bar{X}_n^2. \end{aligned} \tag{35.31}$$

Nous calculons séparément l'espérance de ces deux termes. Si $X$ est la loi parente des $X_i$, en utilisant l'indépendance des $X_i$ nous trouvons

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{n}\sum_k X_k^2\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) \\ &= E(X^2) \\ &= E(X)^2 - \operatorname{Var}(X). \end{aligned} \tag{35.32}$$

Nous devons à présent calculer l'espérance de $\bar{X}_n^2$ :

$$E(\bar{X}_n^2) = E(\bar{X}_n)^2 + \operatorname{Var}(\bar{X}_n). \tag{35.33}$$

En utilisant le lemme 34.23,

$$\operatorname{Var}(\bar{X}_n) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_k X_k\right) \tag{35.34a}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_k \operatorname{Var}(X_k) \tag{35.34b}$$

$$= \frac{1}{n}\operatorname{Var}(X). \tag{35.34c}$$

Par conséquent

$$E(V_n^2) = \operatorname{Var}(X)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\operatorname{Var}(X). \tag{35.35}$$

En ce qui concerne la variance corrigée,

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_k (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1}V_n^2, \tag{35.36}$$

par conséquent $E(S_n^2) = \frac{n}{n-1}E(V_n^2) = \operatorname{Var}(X)$. □

**Théorème 35.15** (Théorème de Cochran[159])**.**
*Soient $(X_i)$ des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de loi $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$. Alors*

*(1)* $\bar{X}_n \sim \mathscr{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$,

*(2)* $\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right) S_n^2 = \left(\frac{n}{\sigma^2}\right) \bar{V}_n^2 \sim \chi^2(n-1)$,

*(3) les variables aléatoires $\bar{X}_n$ et $\bar{V}_n$ sont indépendantes et*

$$\frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\bar{V}_n/(n-1)}} \sim \mathscr{T}(n-1). \tag{35.37}$$

Nous pouvons aussi écrire le dernier résultat en termes de la variance corrigée $S_n$, l'estimateur sans biais de la variance parce que

$$\sqrt{\frac{\bar{V}_n}{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \tag{35.38}$$

en vertu de la définition (35.29).

**Proposition 35.16.**
*Soit $X$ une variable aléatoire de variance $\mathrm{Var}(X) = \sigma$. Si $E(X^4) < \infty$, alors*

*(1)* $S_n^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2$.

*(2)*

$$\frac{S_n^2 - \sigma^2}{\sqrt{\frac{\mu^4 - \sigma^4}{n}}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z \sim \mathscr{N}(0,1) \tag{35.39}$$

*où $\mu^4 = E(X^4)$ est le moment d'ordre 4 de $X$.*

**Théorème 35.17.**
*Si $(X_1, \dots, X_n)$ est un n-échantillon de loi parente $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$, alors*

*(1) Les variables aléatoires*

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \quad et \quad (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \tag{35.40}$$

*sont indépendantes.*

*(2) La loi de $(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2}$ est $\chi^2(n-1)$.*

*Si un échantillon vérifie ces deux propriétés, alors les $X_i$ sont de loi $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$.*

L'inégalité de Markov donne une borne supérieure à la probabilité qu'une variable aléatoire positive soit plus grande ou égale à une constante.

**Théorème 35.18** (Inégalité de Markov)**.**
*Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty[$. Alors*

$$P\big(\varphi(X) \geqslant a\big) \leqslant \frac{E\big(\varphi(X)\big)}{a} \tag{35.41}$$

*pour tout $a > 0$.*

*Démonstration.* Calculons le second membre :

$$\begin{aligned}
\frac{E\big(\varphi(X)\big)}{a} &= \int_\Omega \frac{\varphi(X)}{a} dP \\
&= \int_{\varphi(X)\geqslant a} \underbrace{\frac{\varphi(X)}{a}}_{\leqslant 1} dP + \int_{\varphi(X)<a} \frac{\varphi(X)}{a} dP \\
&\geqslant \int_{\varphi(X)\leqslant a} dP \\
&= P\big(\varphi(X) \leqslant a\big).
\end{aligned} \tag{35.42}$$

D'où l'inégalité voulue. □

## 35.4 Estimation ponctuelle

Nous considérons un modèle statistique

$$\mathcal{S} = \big[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta), (\mu_\theta)\big]_{\theta\in\Theta} \tag{35.43}$$

et pour tout $\theta$ nous notons $X = (X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ un échantillon de loi parente $\mu_\theta$. Tant que nous travaillerons avec un $\theta$ fixé, nous écrirons $X = (X_1, \dots, X_n)$ sans expliciter la paramètre $\theta$. Nous noterons

$$E_\theta\big(\varphi(X_1, \dots, X_n)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) d\mu_\theta^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n). \tag{35.44}$$

Dans cette notation nous plaçons le $\theta$ sur l'espérance, tandis qu'en réalité le $\theta$ devrait être sur chaque $X_1$. Tant qu'aucune confusion n'est possible nous ferons toujours cet abus d'écriture.

Le but de la théorie de l'estimation est de déduire la valeur de $\theta$ (et donc la loi $\mu_\theta$) à partir d'un échantillon de loi parente $\theta$.

Nous posons les hypothèses suivantes.

(1) Le modèle statistique $\mathcal{S}$ est paramétré, c'est à dire que $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ avec le plus souvent $d = 1, 2$. Typiquement les paramètres seront la moyenne et la variance.

(2) Le modèle statistique est **identifiable**, c'est à dire que pour tout couple $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^2$, si $\theta_1 \neq \theta_2$, alors $\mu_{\theta_1} \neq \mu_{\theta_2}$.

(3) Le modèle $\mathcal{S}$ est **dominé** par la mesure de Lebesgue si les lois $\mu_\theta$ sont continues et par la mesure de comptage si les lois $\mu_\theta$ sont discrètes.

**Exemple 35.19**
La famille des lois exponentielles $\big(\mathscr{E}(\lambda)\big)_{\lambda>0}$ est identifiable. Les lois gaussiennes $\big(\mathscr{N}(m, \sigma^2)\big)_{m\in\mathbb{R},\sigma^2>0}$ sont également identifiables.

En réalité il est assez compliqué de trouver un exemple de modèle non identifiable à moins de la faire exprès. Par exemple en paramétrant les lois exponentielles de la façon suivante : $\big(\mathscr{E}(\sin(\lambda))\big)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Cette famille n'est pas identifiable. △

Le corollaire 13.146 ainsi que l'hypothèse de modèle dominé implique que les lois ont des densités. Si la loi $\mu_\theta$ est discrète, nous notons

$$p(x, \theta) = \mu_\theta(\{x\}) \tag{35.45}$$

la densité de $\mu_\theta$ par rapport à la mesure de comptage. Si La loi $\mu_\theta$ est continue, nous notons

$$p(x, \theta) = f_\theta(x) \tag{35.46}$$

la densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si $\mu_\theta$ est une loi discrète et si $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon de taille $n$, alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \mu_\theta^{\otimes n}\big(\{x_1, \dots, x_n\}\big) = \mu_\theta(\{x_1\}) \dots \mu_\theta(\{x_n\}) = p(x_1, \theta) \dots p(x_n, \theta). \tag{35.47}$$

La première et la dernière égalité sont des notations ; la seconde est une conséquence de l'indépendance des $X_i$ contenues dans l'échantillon. Pour une loi continues, nous adoptons la même notation. Le vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ admet la densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = f_\theta(x_1) \dots f_\theta(x_n) = p(x_1, \theta) \dots p(x_n, \theta). \tag{35.48}$$

**Exemple 35.20**
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un $n$-échantillon de loi $\mathscr{B}(1, \theta)$ avec $\theta \in ]0, 1[$. C'est une loi discrète portée par l'ensemble $\{0, 1\}$. Nous avons

$$p(x, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \neq x \neq 1 \\ 1 - \theta & \text{si } x = 0 \\ \theta & \text{si } x = 1. \end{cases} \tag{35.49}$$

De façon plus condensée nous pouvons écrire

$$p(x, \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x). \tag{35.50}$$

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^p$, la densité du $n$-échantillon est donnée par

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \theta^{x_1+\cdots+x_n}(1-p)^{1-\sum_i(1-x_i)} \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(x_1, \dots, x_n). \tag{35.51}$$

△

## 35.5 Statistiques et estimateurs

**Définition 35.21.**
*Une **statistique** sur un modèle d'échantillonnage est une variable aléatoire fonction de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ ne dépendant pas de $\theta$ [1]. C'est à dire une application borélienne $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ne dépendant pas de $\theta$. La statistique associée à cette application est $S = T(X_1, \dots, X_n)$.*

Les fonctions $T(X_1, \dots, X_n)$ données par $\sum_i X_i$, $e^{\sum X_i}$ sont des statistiques. La constante $\frac{1}{2}$ est également une statistique (mais elle est moins intéressante).

Un **estimateur** est une statistique qui prend ses valeurs dans $\Theta$. Nous la noterons

$$\hat{\theta}_n = \theta(X_1, \dots, X_n). \tag{35.52}$$

La fonction $\hat{\theta}_n$ est borélienne à valeurs dans $\Theta$.

**Exemple 35.22**
Soit un $n$-échantillon de loi $\mathscr{B}(1, \theta)_{\theta\in[0,1]}$. Les fonctions $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\hat{\varphi}_n = \frac{1}{2}$ sont des estimateurs. Cependant nous devinons que la première va être plus intéressante que la seconde.
△

Pour la suite, nous travaillerons avec des estimateurs de carré intégrable, c'est à dire que

$$E_\theta\big(|\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)|^2\big) < \infty \tag{35.53}$$

pour tout $\theta \in \Theta$.

### 35.5.1 Qualité des estimateurs

**Définition 35.23.**
*Une estimateur est **convergent** ou **consistant** si pour tout $\theta \in \Theta$, la suite de variables aléatoires $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ converge en probabilité vers $\theta$.*

En d'autres termes, l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est convergeant si pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $\eta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \eta\big) = 0. \tag{35.54}$$

La probabilité dans le membre de gauche est donnée par

$$\mu_\theta^{\otimes n}\Big(\big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |\hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n) - \theta| > \eta\big\}\Big). \tag{35.55}$$

Soit $\hat{\theta}_n$ un estimateur pour $\theta$. Nous cherchons à minimiser l'erreur commise en remplaçant $\theta$ par $\hat{\theta}_n$. Nous introduisons donc le **risque quadratique** de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ par

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = E_\theta\big((\hat{\theta}_n - \theta)^2\big). \tag{35.56}$$

Nous disons qu'un estimateur $\hat{\theta}_{n,1}$ est préférable à $\hat{\theta}_{n,2}$ si pour tout $\theta \in \Theta$ nous avons

$$R(\hat{\theta}_{n,1}, \theta) < R(\hat{\theta}_{n,2}, \theta). \tag{35.57}$$

1. Parce que d'habitude c'est ce qu'on cherche à estimer.

**Lemme 35.24.**
*Une formule alternative pour le risque quadratique :*

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) + \big(E_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta\big)^2 \tag{35.58}$$

*Démonstration.* Nous avons

$$E_\theta\Big((\hat{\theta}_n - \theta)^2\Big) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n - \theta) - E_\theta(\hat{\theta}_n - \theta)^2. \tag{35.59}$$

D'une part $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n - \theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$ et d'autre part $E_\theta(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = \big[E(\hat{\theta}_n) - \theta\big]^2$. Par conséquent

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) - \Big(E(\hat{\theta}_n) - \theta\Big)^2. \tag{35.60}$$

□

Le **biais** de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est la quantité

$$E_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta. \tag{35.61}$$

À ce niveau, nous rappelons que nous écrivons $E_\theta$ l'espérance calculée en supposant la valeur $\theta$ pour le paramètre des différentes variables aléatoires entrant dans le calcul. Voir la discussion autour de la définition (35.44).

**Exemple 35.25**
Dans le cadre de la proposition 34.103, nous voulons savoir si $\frac{N_t}{t}$ est un estimateur sans biais de $\lambda$. Pour ce faire nous calculons

$$E_\lambda\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{1}{t}E_\lambda(N_t) = \lambda \tag{35.62}$$

parce que $E(N_t) = \lambda t$. Ici nous avons calculé $E(N_t)$ en prenant $\lambda$ pour valeur du paramètre du processus de Poisson, alors que en principe c'est justement le paramètre que nous voulons estimer. △

**Exemple 35.26**
La moyenne empirique $\bar{X}_n$ est un estimateur sans billet de la moyenne. L'estimateur

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_i)^2 \tag{35.63}$$

est un estimateur sans billet de la variance. △

Un estimateur sans biais n'est pas toujours de meilleur qualité qu'un estimateur avec biais. En effet ce que nous voulons est de se donner un (petit) intervalle $I$ autour de la bonne valeur de $\theta$ et de maximiser $P(\hat{\theta}_n \in I)$. Sur la figure 35.1, c'est l'estimateur biaisé rouge tombe plus souvent sur le bon intervalle que l'estimateur non biaisé bleu.

Nous allons maintenant étudier quelques manières de construire des estimateurs convergeant [2] . Il vont évidemment s'appuyer sur la loi des grands nombres.

### 35.5.2 Méthode des moments

Sans surprises, un bon estimateur pour la moyenne est

$$\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{35.64}$$

2. Là je ne suis vraiment pas sûr de l'orthographe. Comme partout où j'utilise le verbe «converger» d'ailleurs.

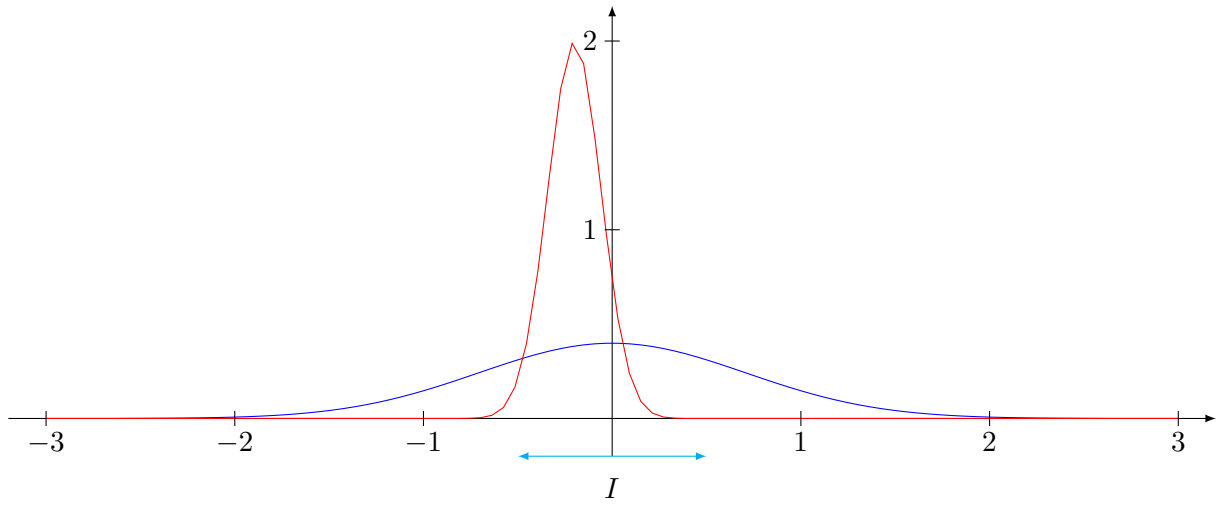



FIGURE 35.1 – Un estimateur sans biais et un avec biais.

Plus généralement, nous supposons qu'il existe une fonction borélienne[3] $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$E_\theta\big(|M(X)|\big) < \infty \tag{35.65}$$

où $X$ est la loi parente de l'échantillon. Supposons également que la fonction

$$h(\theta) = E_\theta\big(M(X)\big) \tag{35.66}$$

soit inversible et continue sur $\Theta$. Dans ce cas, pour estimer le paramètre $\theta$, nous considérons l'estimateur

$$\hat{\theta}_n = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right). \tag{35.67}$$

Cela est un estimateur convergeant. En effet, la loi des grands nombres dit que

$$\frac{1}{n}\sum_{i} M(X_i) \xrightarrow{p.s.} E_\theta\big(M(X)\big). \tag{35.68}$$

En composant avec la fonction $h$, nous avons

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} h^{-1}\Big(E_\theta\big(M(X)\big)\Big) = \theta. \tag{35.69}$$

Dans cette construction, $M(X)$ est le moment de $X$ que l'on souhaite déterminer.

**Exemple 35.27**
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Construire $\hat{\lambda}_n$. Pour une loi exponentielle,

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}. \tag{35.70}$$

Nous devons donc déterminer le moment d'ordre 1 de $X$ (c'est à dire sa moyenne). Nous considérons donc la fonction $M(x) = x$ ; par conséquent

$$h(\lambda) = E(X) = \frac{1}{\lambda} \tag{35.71}$$

et $h^{-1}(\theta) = 1/\theta$. L'estimateur que nous considérons pour $\lambda$ est finalement

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}. \tag{35.72}$$

△

3. Définition 13.64.

### 35.5.3 Méthode de substitution

Supposons que nous connaissions un estimateur convergeant $\hat{\theta}_n \to \theta$. Si $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$g(\hat{\theta}_n) \to g(\theta). \tag{35.73}$$

### 35.5.4 Méthode du maximum de vraisemblance

**Exemple 35.28**
Nous désirons contrôler la qualité d'une chaîne de production ; pour cela nous prélevons un échantillon de 10 pièces, et nous en trouvons 3 défectueuses. Que dire de la proportion de pièces défectueuses ?

Évidemment, le plus probable est que la proportion de pièces défectueuses soit de 1/3. Analysons en détail comment nous arrivons à ce résultat. Nous considérons que le fait de tirer 10 pièces revient à une expérience binomiale de paramètres 10 et de probabilité $p$ inconnue. Dans ce cas, la probabilité d'observer exactement 3 pièces défectueuses est de

$$L(p) = P(X = 3) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7. \tag{35.74}$$

Le maximum de $L(p)$ est $p = 3/10$.

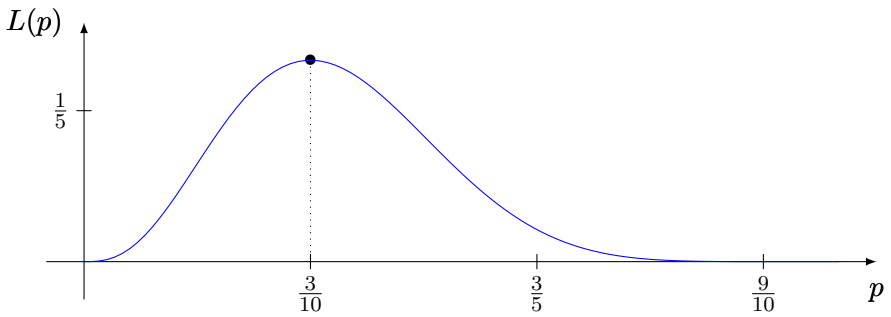



FIGURE 35.2 – La fonction de vraisemblance de l'exemple 35.28.

△

Soit $(x_1, \dots, x_n)$, une réalisation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$. L'application

$$\theta \mapsto p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta) \tag{35.75}$$

est la **vraisemblance** de l'échantillon. Nous définissons $\hat{\theta}_n$ par

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}_n) = \sup_{\theta \in \Theta} p_n(x_1, \dots, x_n; \theta). \tag{35.76}$$

**Remarque 35.29.**
Nous passons sous le silence le fait que la fonction sup soit une fonction mesurable, et que par conséquent $\hat{\theta}_n$ soit bien une variable aléatoire.

La variable aléatoire $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ est l'**estimateur de maximum de vraisemblance** de $\theta$.

**Exercice 1**
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathscr{B}(1, \theta)$ avec $\theta \in [0, 1]$. Trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance de $\theta$.

**Correction de l'exercice 1**

En utilisant la densité de la loi multinomiale,

$$p_n(x_1,\dots,x_n;\theta)=\prod_i p(x_i,\theta)=\prod_i \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(x_1,\dots,x_n). \tag{35.77}$$

En passant au logarithme, si $x_i\in\{0,1\}$,

$$L_n(\theta)=\sum_i x_i\ln(\theta)+(1-x_i)\ln(1-\theta) \tag{35.78}$$

En passant à la dérivée, nous trouvons que l'extremum est donné par

$$\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{35.79}$$

**Exercice 2**

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un échantillon de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\theta>0$. Trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance de $\theta$.

**Correction de l'exercice 2**

Nous avons

$$p_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\theta_i e^{-\theta x_i}. \tag{35.80}$$

En passant au logarithme la fonction à minimiser est

$$L(\theta)=n\ln(\theta)-\theta\sum_i x_i. \tag{35.81}$$

La minimisation donne

$$\theta=\frac{n}{\sum_i x_i}, \tag{35.82}$$

c'est à dire

$$\hat{\theta}_n(X_1,\dots,X_n)=\frac{n}{\sum_i X_i}=\frac{1}{\bar{X}_n}. \tag{35.83}$$

Ce résultat n'est pas étonnant vu que le paramètre $\lambda$ de la loi exponentielle est l'inverse de la moyenne.

**Exercice 3**

Soit $(X_1,\dots,X_n)$, un échantillon de loi parente uniforme sur $[0,\theta]$ avec $\theta>0$.

(1) Montrer que la fonction de vraisemblance est donnée par

$$L(x_1,\dots,x_n;\theta)=\frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{[0,\infty[}\big(\min(x_1,\dots,x_n)\big)\mathbb{1}_{[\max(x_1,\dots,x_n),\infty[}(\theta). \tag{35.84}$$

(2) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta$.

**Correction de l'exercice 3**

Lorsque nous parlons de paramètres qui peuvent prendre un spectre continu de valeurs, il est inutile de calculer la *probabilité* parce qu'elle est nulle. Le système de maximum de vraisemblance fonctionne avec les densités. Dans notre cas, la fonction de vraisemblance est le produit des densités :

$$L(x_1,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta) \tag{35.85a}$$

$$=\prod_i\frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) \tag{35.85b}$$

$$=\frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x_1,\dots,x_n). \tag{35.85c}$$

De cette expression nous voyons que $\min\{x_1,\dots,x_n\}$ doit être positif en même temps que le maximum doit être plus petit que $\theta$. Cette seconde condition peut s'écrire $\mathbb{1}_{[\max\{x_1,\dots,x_n\},\infty[}(\theta)$. Au final nous avons

$$L(x_1,\dots,x_n;\theta)=\frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{[0,\infty[}\big(\min(x_1,\dots,x_n)\big)\mathbb{1}_{[\max\{x_1,\dots,x_n\},\infty[}(\theta). \tag{35.86}$$

Il n'est évidemment pas possible de dériver explicitement cette expression. Par contre pour cette fonction soit non nulle, il faut obligatoirement $\theta\geqslant\max\{x_1,\dots,x_n\}$. Par conséquent elle prend son maximum pour $\theta=\max\{x_1,\dots,x_n\}$.

La conclusion est que l'estimateur de maximum de vraisemblance de $\theta$ est $\hat{\theta}_n=\max_i\{X_i\}$.

**Exercice 4**

Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance de la moyenne pour un modèle statistique dans laquelle la famille de probabilités est

$$(\mu_\theta)=\{\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)\text{ tel que }\theta\in\in\mathbb{R}\}. \tag{35.87}$$

Nous supposons que $\sigma$ est connu.

**Correction de l'exercice 4**

La densité de la variable aléatoire conjointe $(X_1,\dots,X_n)$ au point $(x_1,\dots,x_n)$ est le produit des densités, donc

$$\prod_{i=1}^{n}\gamma_{m,\sigma}(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}}\exp-\frac{1}{2}\left(\sum_i\left(\frac{x_i-m}{\sigma}\right)^2\right). \tag{35.88}$$

Étant donné que le but est de minimiser, nous pouvons oublier le facteur et passer au logarithme :

$$L_0(\bar{x})=-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{x_i-m}{\sigma}\right)^2. \tag{35.89}$$

Nous pouvons également supprimer le $\frac{1}{2}$ et le $1/\sigma^2$. La fonction à minimiser devient

$$L(x_1,\dots,x_n)=-\sum_i(x_i-m)^2, \tag{35.90}$$

dont la dérivée vaut $2nm-2\sum_i x_i$. Par conséquent nous avons un minimum avec

$$m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{35.91}$$

### 35.5.5 Estimation d'une fonction de répartition

**Théorème 35.30** (Glivenko-Cantelli[355])**.**
*Soient $X_i$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi dont la fonction de distribution est $F$ (inconnue). Nous définissons l'estimateur*

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{X_i\leqslant x}. \tag{35.92}$$

*Alors*

$$P\big(\lim_{n\to\infty}\|F_n-F\|_\infty=0\big)=1. \tag{35.93}$$

*Autrement dit, pour presque tout $\omega\in\Omega$,*

$$\lim_{n\to\infty}\|F_n(\omega,.)-F\|_\infty=0. \tag{35.94}$$

*C'est à dire qu'il y a presque certainement convergence en probabilité.*

Notons que de façon générale lorsqu'on parle d'estimateurs, partout où il y a un «n» dans une variable aléatoire, il y a une dépendance sous-entendue en $\omega$.

**Proposition 35.31.**
*Pour presque tout $x$, l'estimateur $F_n(x)$ est sans biais par rapport à $F(x)$ :*

$$E\big(F_n(x)\big) = F(x). \tag{35.95}$$

*Démonstration.* C'est juste un calcul :

$$E\big(F_n(x)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\big(\mathbb{1}_{\{X_i\leqslant x\}}\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(x) = F(x). \tag{35.96}$$

□

**Exercice 5**

Dans cet exercice nous construisons un estimateur biaisé qui présente un risque quadratique inférieur à un estimateur non biaisé.

Soit un modèle statistique dont la famille de lois est $\{\mathcal{N}(m,\sigma^2)\}_{\theta\in]0,\infty[}$ où $m$ est un paramètre réel connu. En ce qui concerne la variance nous considérons

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2. \tag{35.97}$$

(1) Montrer que $\hat{\sigma}_n^2$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

(2) Montrer que le risque quadratique de $\hat{\sigma}_n^2$ est

$$R(\hat{\sigma}_n^2,\theta) = \frac{2\theta^2}{n}. \tag{35.98}$$

(3) Considérer la famille d'estimateurs $c\hat{\sigma}_n^2$ avec $c>0$. Déterminer la valeur de $c$ qui minimise le risque quadratique de l'estimateur.

**Correction de l'exercice 5**

(1) Nous calculons

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_n^2) &= \frac{1}{n}\sum_i E\big[(X_i-m)^2\big] \\ &= \frac{1}{n}\sum_i \mathrm{Var}(X_i-m) - \frac{1}{n}\sum_i E(X_i - mj^2) \\ &= \frac{1}{n}\sum_i \mathrm{Var}(X_i) \\ &= \sigma^2. \end{aligned} \tag{35.99}$$

(2) Par la formule (35.60) nous savons que le risque d'un estimateur sans biais est donné par sa variance :

$$R(\hat{\theta}_n,\theta) = \mathrm{Var}(|\hat{\sigma}_n^2 - \theta|) = \mathrm{Var}(\hat{\sigma}_n^2). \tag{35.100}$$

Étant donné que les variables aléatoires $X_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées, le lemme 34.23 nous enseigne que la variance de la somme est la somme des variances. Nous avons donc à calculer

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(|\hat{\sigma}_n^2 - \theta|) &= \mathrm{Var}(\hat{\sigma}_n^2) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_i \mathrm{Var}\big[(X_i-m)^2\big] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_i E\big[(X_i-m)^4\big] - E\big[(X_i-m)^2\big]^2. \end{aligned} \tag{35.101}$$

Ces espérances ne sont pas très compliquées à calculer en utilisant la fonction caractéristique donnée par la proposition 34.105 :

$$\Phi_{X-m}(t) = E\big(e^{it(X-m)}\big) = e^{-itm}E(e^{itX}) = e^{-itm}\Phi_X(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right). \tag{35.102}$$

Nous avons $\Phi^{(4)}(0) = 3\sigma^4$ et $\Phi''(0) = -\sigma^2$. Par conséquent

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{1}{n^2}\sum_i 2\theta^2 = \frac{2\theta^2}{n}. \tag{35.103}$$

Notez ici que $\theta = \sigma^2$.

(3) En tenant compte du fait que $\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{2\theta^2}{n}$ et $E(\hat{\sigma}_n^2) = \theta$, nous avons

$$E\big((c\hat{\sigma}_n^2 - \theta)^2\big) = \mathrm{Var}(c\hat{\sigma}_n^2 - \theta) + E(c\hat{\sigma}_n^2 - \theta)^2 \tag{35.104a}$$

$$= 2\frac{c^2\theta^2}{n} + (c-1)^2\theta^2. \tag{35.104b}$$

La dérivée (par rapport à $c$) de cela s'annule pour $c_0 = \frac{n}{n+2}$. Notons que nous n'avons pas tout à fait démontré que cela est bien un minimum. Calculons cependant le risque quadratique de notre estimateur pour cette valeur de $c$. Pour cela nous reportons $c = c_0$ dans l'expression (35.104b) :

$$E\big(\frac{n}{n+2}\hat{\sigma}_n^2\big) = \frac{2\theta^2}{n+2}. \tag{35.105}$$

Cela est effectivement plus petit que $R(\hat{\sigma}_n^2, \theta)$.

Nous avons ainsi construit un estimateur biaisé qui a un risque quadratique plus petit que l'estimateur non biaisé.

**Exercice 6**

Nous considérons la famille de probabilités $\mu_\theta = \mathcal{N}(\theta)$ où $\theta = (m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times ]0, \infty[$. Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre $\theta = (m, \sigma^2)$.

**Correction de l'exercice 6**

Pour chaque observation $x_i$ nous avons une densité gaussienne. Le produit donne

$$p\big(x_1, \dots, x_n; (m, \sigma^2)\big) = \frac{1}{\sigma^2(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i - m)^2\right]. \tag{35.106}$$

En passant au logarithme et en supprimant des facteurs inutiles à la minimisation,

$$L(m, \sigma) = -n\ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i - m)^2. \tag{35.107}$$

L'annulation de la dérivée par rapport à $m$ donne immédiatement $m = \frac{1}{n}\sum_i x_i$. L'annulation de la dérivée par rapport à $\sigma$ donne

$$-n\sigma^2 + \sum_i (x_i - m)^2 = 0 \tag{35.108}$$

et donc

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x}_n). \tag{35.109}$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance du couple $\theta = (m, \sigma^2)$ est donc

$$\hat{\theta}_n = \left(\frac{1}{n}\sum_i X_i, \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2\right). \tag{35.110}$$

### 35.5.6 Espérance et variance d'un estimateur

Soit $T_n = T_(X_1, \dots, X_n)$ un estimateur du paramètre $\theta$ dans un modèle d'échantillonnage. Les moyennes et variances de l'estimateur sont les variables aléatoires

$$m_{\theta,n} = E_\theta(T_n) = \int_{\mathbb{R}^n} T_n(x_1, \dots, x_n) d\mu_\theta^{\otimes n}(x1, \dots, x_n), \tag{35.111a}$$

$$\mathrm{Var}_\theta(T_n) = \int_{\mathbb{R}^n} [T_n(x_1, \dots, x_n) - m_{\theta,n}]^2 d\mu_\theta^{\otimes n}(x1, \dots, x_n), \tag{35.111b}$$

**Lemme 35.32.**
*Si l'estimateur $T_n$ satisfait*

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta(T_n) = \theta \tag{35.112a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\theta(T_n) = 0, \tag{35.112b}$$

*alors il est convergeant.*

*Démonstration.* Nous utilisons l'inégalité de Markov (théorème 35.18) et nous introduisons l'espérance de l'estimateur :

$$P\big(|T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \epsilon\big) \leqslant \frac{1}{\epsilon} E\big(T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta\big) \tag{35.113a}$$

$$\leqslant \frac{1}{\epsilon} E\big(|T_n - m_{n,\theta}|\big) + \frac{1}{\epsilon} E\big(|m_{n,\theta} - \theta|\big) \tag{35.113b}$$

$$\tag{35.113c}$$

Le second terme est l'espérance d'une constante. Nous majorons le premier terme en utilisant le fait que $\|.\|_1 \leqslant \|.\|_2$ (voir la remarque 24.23 après l'inégalité de Hölder) :

$$P\big(|T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \epsilon\big) \leqslant \frac{1}{\epsilon} E\big(|T_n - m_{n,\theta}|^2\big)^{1/2} + \frac{1}{\epsilon}|E_\theta(T_n) - \theta| \tag{35.114a}$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \mathrm{Var}(T_n)^{1/2} + \frac{1}{\epsilon}|E_\theta(T_n) - \theta|. \tag{35.114b}$$

Les deux termes tendent séparément vers zéro par hypothèse. Nous avons par conséquent la convergence en probabilité $T_n \to \theta$. □

## 35.6 Estimation par intervalle de confiance

Nous voudrions estimer la proportion d'individus dans une population ayant un certain caractère déterminé par une variable booléenne : chaque individu a ou non le caractère étudié. L'échantillon sera donc une suite de 0 et de 1.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ nous notons

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{ème individu a la caractère} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{35.115}$$

et $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Notre modèle statistique sera

$$\mathcal{S} = \Big[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta), B(1, \theta)\Big] \tag{35.116}$$

où $\Omega$ est l'ensemble des individus étudiés, $P$ est la manière de choisir les individus lors du sondage (essentiellement c'est une loi uniforme) et $X_\theta$ est la variable aléatoire

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ a le caractère} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{35.117}$$

Cela est une variable aléatoire de distribution $\mathscr{B}(1, p)$ où $p$ est inconnu. Ici, $\Theta = [0, 1]$ est l'ensemble des $p$ possibles.

**Remarque 35.33.**
Nous supposons que $\Omega$ est la population entière et que la variable aléatoire est l'opinion de la personne $\omega$. En cela, nous considérons que le tirage de l'échantillon est sans remise. Le fait que nous modélisions par une variable aléatoire de Bernoulli signifie que nous considérons l'approximation dans laquelle la population globale est grande.

Nous supposons que nous ayons un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ dont nous avons observé une réalisation $(x_1, \dots, x_n)$ de fréquence $\bar{x}_n$. Nous voudrions déterminer un intervalle dans lequel $\bar{X}_n$ a de fortes chances de se trouver. Plus précisément nous considérons un petit $\alpha$ et nous cherchons $\epsilon$ tel que

$$P\big(p \in [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon]\big) = 1 - \alpha. \tag{35.118}$$

Typiquement, $\alpha = 5\%$. Le nombre $\alpha$ est le **niveau de confiance** que nous nous fixons a priori.

Si nous trouvons un intervalle $I$ tel que $P(p \in I) = 1-\alpha$, nous disons que l'intervalle est **exact**, si nous avons $P(p \in I) \geqslant 1 - \alpha$, nous disons que l'intervalle est **par excès**.

Il y a deux points de départs pour trouver l'intervalle. Le plus simple est d'utiliser le théorème central limite et considérer

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1). \tag{35.119}$$

La seconde est d'utiliser la loi exacte : $n\bar{X}_n = \sum_i X_i \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Bien entendu la seconde donne lieu à des calculs plus compliquée.

**Remarque 35.34.**
Dans certaines vraies vies (par exemple en médecine), la taille des échantillons est très réduite. Dans ce cas le théorème central limite n'a aucun sens et les calculs exact s'imposent.

De plus dans de nombreux cas de la vraie vie, nous avons un ordinateur à disposition pour calculer avec la loi exacte. L'utilisation du théorème central limite dans le but de produire un intervalle de confiance semble donc de plus en plus être une survivance du passé.

Dans la suite, nous allons supposer que $n$ est suffisamment grand pour justifier l'approximation normale du théorème central limite 34.89. Si $Z$ est une variable aléatoire normale centrée réduite, notre premier essai est de faire

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= P\big(p \in [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon]\big) && \text{(35.120a)}\\
&= P\left(\frac{-\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) && \text{(35.120b)}\\
&\simeq P\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant Z \leqslant \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) && \text{(35.120c)}\\
&= 2P\left(Z \leqslant \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1. && \text{(35.120d)}
\end{aligned}$$

La dernière ligne utilise la symétrie de la distribution $\mathscr{N}(0,1)$. Le nombre $\epsilon$ que nous cherchons vérifie donc

$$P\left(Z \leqslant \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}. \tag{35.121}$$

De nos jours, les ordinateur donnent la loi de répartition inverse des normales. Cela nous fournit un nombre $t_\alpha$ tel que

$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} = t_\alpha \tag{35.122}$$

où $t_\alpha$ est le nombre tel que $P(Z \leqslant t_\alpha) = 1 - \alpha/2$.

Conclusions de ce premier essai :

(1) Le problème est que nous ne pouvons pas déduire $\epsilon$ de l'équation (35.122) parce que $p$ est inconnu.

(2) Cela ruine notre premier essai et nous demande de trouver mieux.

(3) L'astuce est évidemment de remplacer $p$ par $\bar{X}_n$, mais il faut le justifier.

**Méthode Slutsky** Le point de départ du premier essai infructueux était la convergence

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} N \sim \mathscr{N}(0,1) \tag{35.123}$$

donnée par le théorème central limite 34.89. Ce que nous voudrions en réalité est la convergence

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} N \tag{35.124}$$

La loi des grands nombres nous donne

$$\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) \xrightarrow{p.s.} p(1-p). \tag{35.125}$$

Par conséquent le lemme de Slutsky implique la convergence en loi du couple :

$$\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}, \sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \big(N, \sqrt{p(1-p)}\big). \tag{35.126}$$

À ce point des opérations nous pouvons utiliser la proposition 34.75 au couple avec la fonction

$$f(x,y) = \frac{x}{y}\sqrt{p(1-p)} \tag{35.127}$$

dont la probabilité d'être continue est 1 ($y = 0$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$). La conclusion du théorème est que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1). \tag{35.128}$$

C'est à partie de là que nous pouvons construire notre intervalle de confiance :

$$1-\alpha = P(\bar{X}_n - \epsilon \leqslant p \leqslant \bar{X}_n + \epsilon) \tag{35.129a}$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \geqslant \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \geqslant \frac{-\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\right)) \tag{35.129b}$$

$$\simeq P\left(\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \geqslant N \geqslant \frac{-\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\right)). \tag{35.129c}$$

Nous cherchons maintenant dans les tables le $\xi$ qui fait

$$P(-\xi \leqslant N \leqslant \xi) = 1-\alpha \tag{35.130}$$

puis nous cherchons $\epsilon$ de telle sorte à avoir

$$\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} = \xi. \tag{35.131}$$

Dans cette équation tout est connu à part le $\epsilon$ qui se découvre.

**Méthode piétonne** Nous remarquons que l'événement

$$-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \tag{35.132}$$

est le même que l'événement

$$\left|\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right| \leqslant t_\alpha. \tag{35.133}$$

Vu que $t_\alpha$ est positif, cela est encore le même événement que

$$n\frac{(\bar{X}_n - p)^2}{p(1-p)} \leqslant t_\alpha^2 \tag{35.134}$$

ou encore

$$p^2(n + t_\alpha^2) - p(2n\bar{X}_n + t_\alpha^2) + n\bar{X}_n^2 \leqslant 0. \tag{35.135}$$

Les racines du polynôme du membre de gauche sont

$$p_\pm = \frac{2n\bar{X}_n + t_\alpha^2 \pm \sqrt{(2n\bar{X}_n + t_\alpha)^2 - 4(n + t_\alpha^2)n\bar{X}_n^2}}{2(n + t_\alpha^2)}. \tag{35.136}$$

Le but étant d'effectuer une limite $n \to \infty$, nous factorisons d'abord $n$. Après simplification

$$p_\pm = \frac{\bar{X}_n + \frac{t_\alpha}{2n} \pm t_\alpha\sqrt{\frac{t_\alpha^2}{4n^2} + \frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}}{1 + \frac{t_\alpha}{n}}. \tag{35.137}$$

Étant donné que nous considérons que $n$ est grand, nous allons négliger les termes en $\frac{1}{n}$ en faisant attention à ce que le terme en $\frac{1}{n}$ sous la racine est en réalité $1/\sqrt{n}$ et ne doit pas être négligé. Nous trouvons, à cette approximation, que

$$p \in \Big[\bar{X}_n - t_\alpha\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + t_\alpha\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\Big] \tag{35.138}$$

avec une probabilité $1 - \alpha$.

### 35.6.1 Région de confiance

Soit un $n$-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi parente $\mu_\theta$. Nous supposons $\Theta \subset \mathbb{R}$ avec $\Theta$ ouvert. Soit $\alpha \in [0, 1]$ un intervalle de confiance et une application mesurable

$$\begin{aligned} \Lambda\colon \mathbb{R}^n &\to \mathcal{B}\text{or}(\Theta) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \Lambda(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{35.139}$$

On appelle **région de confiance exact** au niveau de confiance $1 - \alpha$ une région aléatoire $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ telle que

$$P\big(\theta \in \Lambda(x_1, \dots, x_n)\big) = 1 - \alpha. \tag{35.140}$$

Si $d = 1$, la région $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ est un intervalle.

### 35.6.2 Fonction pivotale

Soit $\hat{\theta}_n$, un estimateur de $\theta$. Une fonction $v$ sur $\Theta \times \Theta$ est **pivotale** pour $\theta$ si la loi de la variable aléatoire $v(\hat{\theta}_n, \theta)$ ne dépend pas de $\theta$. Elle est **asymptotiquement pivotale** si

$$v(\hat{\theta}_n, \theta) \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi \tag{35.141}$$

où $\xi$ est une variable aléatoire indépendante de $\theta$.

En pratique, nous essayons de faire apparaître une variable aléatoire de loi connue qui ne dépend pas du paramètre que l'on recherche. Si la variance est connue et si l'échantillon est grand, le théorème central limite nous permet d'introduire une loi normale centrée réduite.

**Exemple 35.35**
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de loi parente $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$. Une fonction asymptotiquement pivotale pour $m$ est

$$v(z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_2}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{35.142}$$

parce que la variable aléatoire

$$v(\bar{X}_n, m) = \frac{\bar{X}_n - m}{\alpha/\sqrt{n}} \tag{35.143}$$

tend vers $\mathscr{N}(0, 1)$ qui ne dépend pas de $m$. △

**Exemple 35.36**
Si $(X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne $m$ et d'écart type $\sigma$ que nous supposons inconnus. Le fonction suivante est asymptotiquement pivotale pour $m$ :

$$v(\bar{X}_n, m) = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}. \tag{35.144}$$

△

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathscr{N}(m, \sigma_0^2)$ avec $\sigma_0^2$ connu. Nous cherchons un intervalle de confiance $1 - \alpha$ pour $m$. Pour cela nous allons utiliser une fonction asymptotiquement pivotale, à savoir

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma_0^2/\sqrt{n}} \sim \mathscr{N}(0, 1). \tag{35.145}$$

Nous devrions chercher des valeurs $z_+$ de $z_-$ telles que

$$P\left(z_- \leqslant \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leqslant z_+\right) = 1 - \alpha. \tag{35.146}$$

Pour des raisons de symétries (de la courbe gaussienne), nous allons chercher un intervalle symétrique : $z_- = -z_+$. Le nombre à chercher est donc le $z_\alpha$ tel que

$$P\big(|Z| \leqslant z_\alpha\big) = 1 - \alpha. \tag{35.147}$$

Si nous demandons $\alpha = 5\%$, la réponse est $z_\alpha = 1.96$, c'est à dire que

$$P\left(-1.96 \leqslant \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant 1.96\right) = 0.95. \tag{35.148}$$

Nous avons donc

$$P\left(m \in \big[\bar{X}_n - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\big]\right) = 0.95. \tag{35.149}$$

Supposons maintenant que nous avons observé 100 valeurs numériques avec $\bar{x}_n = 12$ et $\sigma = 1$. La réalisation de l'intervalle de confiance pour $m$ au niveau de confiance 0.95 est :

$$\big[12 - 0.196, 12 + 0.196\big]. \tag{35.150}$$

Cet intervalle est à interpréter de la façon suivante : si nous recommençons un grand nombre de fois le sondage, la moyenne tombera 95% des fois dans l'intervalle ainsi calculé. Mais il faut bien comprendre que la probabilité

$$P\left(m \in \big[12 - 0.196, 12 + 0.196\big]\right) \tag{35.151}$$

vaut zéro ou un.

**Exercice 7**

Soit un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi parente $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ où $m$ et $\sigma^2$ sont inconnus. Déterminer un intervalle de confiance exact symétrique au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Déterminer un intervalle de confiance pour $\sigma^2$.

**Correction de l'exercice 7**

Nous savons que la moyenne empirique est un estimateur de la moyenne :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{35.152}$$

Nous cherchons un intervalle du type $I = [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon]$ pour lequel $P(m \in I) = 1 - \alpha$. Nous savons que la variable aléatoire

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\alpha/\sqrt{n}} \tag{35.153}$$

suit une loi $\mathscr{N}(0, 1)$, mais la variance est inconnue. La subtilité à savoir est que la variable aléatoire

$$Z = \frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{\sigma}} \tag{35.154}$$

où $S_n^2 = \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2/(n-1)$ suit une loi de Student à $n$ degrés de liberté $\mathscr{T}(n-1)$ en vertu du théorème de Cochran 35.15. Comme il est usuel de le faire, nous inversons l'intervalle :

$$1 - \alpha = P\left(-\epsilon \leqslant \bar{X}_n - m \leqslant \epsilon\right) \tag{35.155a}$$

$$= P\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{S_n} \leqslant Z \leqslant \frac{\epsilon\sqrt{n}}{S_n}\right). \tag{35.155b}$$

Les valeurs se trouvent dans des tables ; par exemple pour $n = 10$ et $\alpha = 5\%$ nous trouvons

$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{S_n} = 2.262. \tag{35.156}$$

Plus généralement nous notons $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathscr{T}(n-1)$, c'est à dire le nombre tel que

$$P(Z \leqslant t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \tag{35.157}$$

si $Z \sim \mathscr{T}(n-1)$. L'intervalle de confiance est alors donné par

$$I = \left[\bar{X}_n - \frac{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} S_n}{\sqrt{n}}\right]. \tag{35.158}$$

Cela est un intervalle exact pour $m$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Nous pouvons aussi trouver un intervalle asymptotique en utilisant le théorème central limite :

$$\frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} T \tag{35.159}$$

avec $T \sim \mathscr{N}(0, 1)$.

Rappel : dire que $I_n$ est un **intervalle de confiance asymptotique** signifie que

$$\lim_{n \to \infty} P(m \in I_n) = 1 - \alpha. \tag{35.160}$$

En ce qui concerne la variance $\sigma^2$, l'intervalle de confiance se construit en utilisant la partie (2) du théorème de Cochran 35.15. Nous introduisons la variable aléatoire pivot

$$Z = (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \tag{35.161}$$

qui suit une loi $\chi^2(n-1)$. Cette loi n'étant pas symétrique (voir figure 34.1), nous n'allons pas chercher un intervalle de confiance symétrique. Nous cherchons $c_1$ et $c_2$ tels que

$$\begin{cases} P\big(\sigma^2 \in [c_1, c_2]\big) = 1-\alpha & (35.162a)\\ P\big(\sigma^2 \in [0, c_1]\big) = \dfrac{\alpha}{2} & (35.162b)\\ P\big(\sigma^2 \in [c_2, \infty[\big) = \dfrac{\alpha}{2} & (35.162c) \end{cases}$$

La situation est représentée à la figure 35.3.

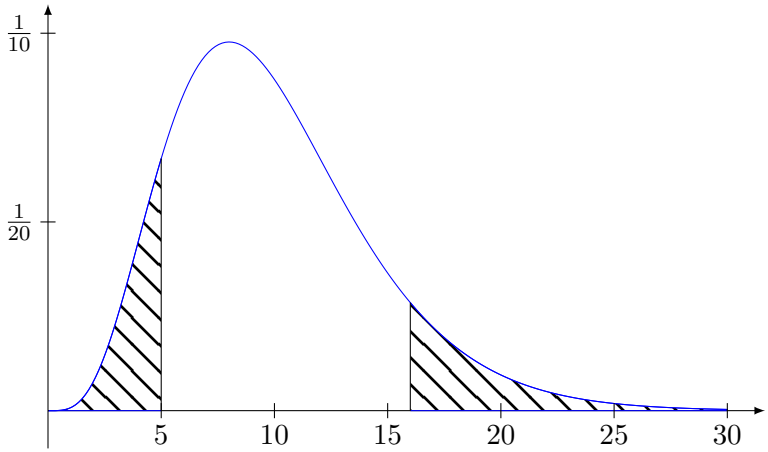



FIGURE 35.3 – L'intervalle de confiance pour une $\chi^2$.

Le construction des nombres $c_1$ et $c_2$ passe par la relation

$$P(c_1 \leqslant \sigma^2 \leqslant c_2) = P\left(\frac{(n-1)S_n^2}{c_2} \leqslant Z \leqslant \frac{(n-1)S_n^2}{c_1}\right). \tag{35.163}$$

Nous notons $t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ et $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ les quantiles donnés sur la figure 35.3, c'est à dire

$$P(Z \leqslant t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} P(Z \geqslant t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}. \tag{35.164a}$$

Ce que nous obtenons est

$$\frac{(n-1)S_n^2}{c_2} = t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \tag{35.165a}$$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{c_1} = t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \tag{35.165b}$$

et par conséquent l'intervalle de confiance pour $\sigma^2$ est

$$I = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S_n^2}{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\right] \tag{35.166}$$

avec $P(\sigma^2 \in I) = 95\%$.

**Remarque 35.37.**
Il n'est pas clair a priori que la longueur de l'intervalle $I$ décroisse avec $n$ parce qu'il y a $n$ dans les $t$ au numérateur.

### 35.6.3 Sondage de proportion

Une utilisation classique des statistiques est d'interpréter une proportion donnée par un sondage. Nous considérons une élection avec deux candidats $A$ et $B$. Nous avons interrogés $n = 2500$

personnes et nous avons obtenus 51% pour le candidat $A$ et 49% pour le candidat $B$. Que peut on dire ?

La modélisation de cette situation est que nous avons des variables aléatoires $X_i \sim \mathscr{B}(p_A)$ et que nous en avons observés $n$ avec une moyenne

$$\bar{x}_n = 0.51. \tag{35.167}$$

La loi de $\bar{X}_n$ est une binomiale. Sa densité n'est pas symétrique, mais si $n$ est grand, elle le devient. Nous cherchons un intervalle

$$I = [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon] \tag{35.168}$$

tel que $P(p_A \in I) = 1 - \alpha$. Pour cela nous considérons le fait que $n = 2500$ est grand et nous utilisons la limite de la proposition 35.10 :

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p_A}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z \sim \mathscr{N}(0,1). \tag{35.169}$$

La variable aléatoire $Z_n$ est asymptotiquement pivotale et normale centrée réduite. Nous cherchons donc un intervalle symétrique pour $\bar{X}_n - p_A$ :

$$1 - \alpha = P(-\epsilon \leqslant \bar{X}_n - p_A \leqslant \epsilon), \tag{35.170}$$

c'est à dire, si $n$ est grand,

$$1 - \alpha = P\left(-\epsilon\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \leqslant Z_n \leqslant \epsilon\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\right) \tag{35.171}$$

où $Z_n$ est une normale centrée réduite. Nous trouvons ainsi, via les tables que

$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} = 1.96 \tag{35.172}$$

si nous voulons un intervalle à 5%. Par conséquent nous avons $\epsilon = 1.96\frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{nj}}$ et l'intervalle de confiance est

$$I_C = \left[\bar{X}_n - \frac{1.96\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{2.96\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}\right]. \tag{35.173}$$

La propriété de cet intervalle est que

$$\lim_{n\to\infty} P(p_A \in I_c) = 1 - \alpha. \tag{35.174}$$

**Remarque 35.38.**
À quel moment avons nous fait une hypothèse sur la taille de la population globale ? En modélisant les sondés par des variables de Bernoulli et leur somme par une binomiale, nous supposons que le sondage est *avec remise*, sinon, elles ne seraient pas indépendantes. En supposant les sondés indépendants, nous avons donc fait comme si la population totale était infinie.

## 35.7 Estimer une densité lorsqu'on ne sait rien

Nous supposons avoir une série d'observations issues d'un processus complexe dont nous n'avons aucune idée de la loi parente, et nous voudrions nous faire une idée de la densité de cette loi inconnue.

Nous observons une suite de réalisations que nous modélisons comme étant des variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ de loi parente (inconnue) $\mu$. Notre but est de trouver un estimateur $\hat{\mu}$ de $\mu$. Par simplicité nous allons nous restreindre aux lois admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est à dire que nous allons estimer $\mu$ par une suite de lois $\hat{\mu}_n$ qui sont toutes des lois acceptant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

### 35.7.1 Distance entre des mesures

Si $\nu_1$ et $\nu_2$ sont deux mesures de densité sur $\mathbb{R}$, la **distance** entre $\nu_1$ et $\nu_2$ est définie par

$$d(\nu_1,\nu_2)=\sup_{A\in\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})}\big|\nu_1(A)-\nu_2(A)\big| \tag{35.175}$$

où $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.

**Théorème 35.39** (de Scheffé[356])**.**
*Si $f_1$ et $f_2$ sont les densités de $\nu_1$ et $\nu_2$ par rapport à la mesure de Lebesgue, alors*

$$d(\nu_1,\nu_2)=\int_{\mathbb{R}}(f_1-f_2)_+=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|f_1-f_2|=\frac{1}{2}\|f_1-f_2\|_1 \tag{35.176}$$

*où $f_+$ est la partie positive de $f$ (pour la décomposition $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$).*

*Démonstration.* La dernière égalité est simplement une notation usuelle ; nous devons seulement prouver les deux premières. Pour la première nous commençons par prouver que le borélien réalisant le supremum est

$$B=\{x\in\mathbb{R}\text{ tel que }f_1(x)\geqslant f_2(x)\}. \tag{35.177}$$

En effet si $A$ est un borélien nous avons

$$\nu_1(A)-\nu_2(A)=\int_A f_1-f_2\leqslant\int_{A\cap B}f_1-f_2\leqslant\int_B f_1-f_2=\int_B(f_2-f_2)_+=\int_{\mathbb{R}}(f_1-f_2)_+ \tag{35.178}$$

Justifications :
— $f_1-f_2$ négative sur $A\cap\complement B$.
— Vu que $f_1-f_2\geqslant 0$ sur $B$, l'intégrale augmente si on augmente le domaine.
— Sur $B$ nous avons $f_1-f_2=(f_1-f_2)_+$.
Donc pour tout borélien $A$ nous avons

$$d(\nu_1,\nu_2)\leqslant\int_{\mathbb{R}}(f_1-f_2)_+. \tag{35.179}$$

Mais pour $A=B$ nous avons égalité :

$$\nu_1(B)-\nu_2(B)=\int_B f_1-f_2=\int_B(f_1-f_2)_+=\int_{\mathbb{R}}(f_1-f_2). \tag{35.180}$$

Pour la seconde égalité nous savons que $f_1$ et $f_2$ s'intègrent toutes deux à 1 (parce que ce sont des densités de probabilité), donc

$$\int_{\mathbb{R}}f_1-f_2=0. \tag{35.181}$$

En particulier nous avons

$$\int_{\mathbb{R}}(f_1-f_2)_+=\int_{\mathbb{R}}(f_1-f_2)_-, \tag{35.182}$$

ce qui donne bien

$$\int_{\mathbb{R}}(f_1-f_2)_+=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|f_1-f_2|. \tag{35.183}$$

□

### 35.7.2 Estimateur par fenêtres glissantes

Nous considérons les estimations suivantes de la fonction de répartition :

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X_i\leqslant x\}}, \tag{35.184}$$

et un nombre $h_n$ qui sera la taille de la fenêtre glissante. Nous avons en tête de faire $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Nous considérons ceci comme estimateur de la densité inconnue $f$ des variables aléatoires $X_i$ :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{F_n(x+h_n) - F_n(x-h_n)}{2h_n}. \tag{35.185}$$

L'idée sous-jacente est de prendre la dérivée de la fonction de répartition comme densité.

**Lemme 35.40** ([356])**.**
*Pour tout $h_n > 0$, l'estimateur $\hat{f}_n$ est une densité de probabilité.*

*Démonstration.* D'abord $\hat{f}_n$ est bien à valeurs positives ou nulle. Ensuite devons parler de son intégrale. Pour le numérateur nous avons

$$F_n(x+h_n) - F_n(x-h_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in B(x,h_n)}. \tag{35.186}$$

En réalité cette égalité est valable seulement presque partout parce qu'elle n'est pas valable en $x = x \pm h_n$, mais cela ne va pas nous ennuyer dans la mesure où nous avons dans l'idée d'intégrer cela sur $\mathbb{R}$. Avant de nous lancer dans l'intégrale nous remarquons que $X_i \in B(x, h_n)$ est la même chose que $x \in B(X_i, h_n)$, c'est à dire que

$$\{X_i \in B(x,h_n)\} = \{x \in B(X_i, h_n)\}. \tag{35.187}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n = \frac{1}{2h_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B(X_i,h_n)}}_{2h_n} = \frac{1}{2nh_n}\sum_{i=1}^{n} 2h_n = 1. \tag{35.188}$$

□

**Lemme 35.41** ([356])**.**
*L'estimateur $\hat{f}_n$ est déjà pas mal parce que*

$$\lim_{h_n\to 0} E\big(\hat{f}_n(x)\big) \to f(x) \tag{35.189}$$

*pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.*

*Démonstration.* Nous commençons par nous rappeler le fait que $F_n(x)$ est un estimateur sans biais de $F(x)$ (proposition 35.31). Donc

$$E\big(\hat{f}_n(x)\big) = \frac{F(x+h_n) - F(x-h_n)}{2h_n}. \tag{35.190}$$

Nous devons prendre la limite de cela lorsque $h_n \to 0$, c'est à dire considérer la dérivée de $F$. Attention : rien ne dit que $F$ soit dérivable, si ce n'est la proposition 14.71 qui indique qu'elle est dérivable presque partout avec $f$ comme dérivée.

La limite $h_n \to 0$ dans (35.190) nous donne donc bien presque partout

$$\lim_{h_n\to 0} E\big(\hat{f}_n(x)\big) = f(x). \tag{35.191}$$

□

**Proposition 35.42** ([356])**.**
*Si la suite $(h_n)$ est telle que $h_n \to 0$ et $nh_n \to \infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons les convergences*

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{L^2(P)} f(x) \tag{35.192}$$

*et*

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{P} f(x). \tag{35.193}$$

*Démonstration.* Il faut d'abord comprendre ce que signifie la convergence $L^2(P)$ pour presque tout $x$. Pour cela il faut comprendre que $\hat{f}_n(x)$ est en soi une variable aléatoire et est en réalité une fonction $\omega \mapsto \hat{f}_n(x,\omega)$. Ce que nous allons montrer est que pour presque tout $x$ (maintenant fixé), cette variable aléatoire converge vers une constante (par rapport à $\omega$) et que cette constante est $f(x)$.

La convergence $X_n \overset{L^2(P)}{\to} X$ signifie $E\big(|X_n - X|^2\big) \to 0$, c'est à dire

$$\int_\Omega \big|X_n(\omega) - X(\omega)\big|^2 dP(\omega) \to 0. \tag{35.194}$$

En faisant une décomposition biais-variance nous devons donc étudier

$$E\Big[\big(\hat{f}_n(x) - f(x)\big)^2\Big] = E\big[\hat{f}_n(x) - f(x)\big]^2 + \operatorname{Var}\big(\hat{f}_n(x) - f(x)\big) \tag{35.195}$$

Ici $f(x)$ doit être vue comme la variable aléatoire constante sur $\Omega$. Par le lemme 35.41 et la proposition 34.25 le terme de biais converge vers zéro lorsque $n \to \infty$.

Pour traiter le terme de biais, nous savons déjà que

$$2nh_n\hat{f}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \in B(x,h_n)\}}, \tag{35.196}$$

où le membre de droite (et donc aussi celui de gauche) est est une variable aléatoire binomiale comptant le nombre de succès de l'expérience $X_i \in B(x,h_n)$ en $n$ essais. Nous notons $p_{x,n} = P\big(X_i \in B(x,h_n)\big)$. Si $\mu$ est la loi parente des $X_i$, alors

$$p_{n,x} = P\big(X_i \in B(x,h_n)\big) = \mu\big(B(x,h_n)\big) = F(x+h_n) - F(x-h_n) \tag{35.197}$$

où $F$ est la fonction de répartition (parente) des $X_i$.

Alors la variance de ladite binomiale est donnée par (34.327), c'est à dire $np_{x,n}(1-p_{x,n})$. Nous avons alors

$$\operatorname{Var}\big(2nh_n\hat{f}_n(x)\big) = bp_{x,n}(1-p_{x,n}) \tag{35.198}$$

et

$$\operatorname{Var}\big(\hat{f}_n(x)\big) = \frac{1}{4n^2h_n^2} np_{x,n}(1-p_{x,n}). \tag{35.199}$$

Nous pouvons faire la majoration $t(1-t) \leqslant t$ qui est valable pour tout $t$ et écrire

$$\operatorname{Var}(\hat{f}_n(x)) \leqslant \frac{1}{4nh_n}\frac{p_{x,n}}{h_n}. \tag{35.200}$$

Le premier facteur tend vers zéro parce que nous avons supposé que $nh_n \to \infty$. Pour le second facteur, il faut remarquer que l'expression (35.197) nous donne presque partout

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{p_{n,x}}{h_n} = 2f(x), \tag{35.201}$$

qui est constant et certainement borné.

Nous avons maintenant prouvé que pour presque tout $x$ nous avons $\hat{f}_n(x) \overset{L^2(P)}{\to} f(x)$. Montrons que cela implique la convergence en loi, c'est à dire que pour tout $\eta > 0$, nous avons la limite

$$P\big(|\hat{f}_n(x) - f(x)| > \eta\big) \to 0. \tag{35.202}$$

Si cela n'était pas vrai, nous aurions un nombre $\eta_0 > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n$ à partir d'une certaine taille,

$$P\Big(|\hat{f}_n(x) - f(x)|^2 > \eta_0\Big) > \epsilon, \tag{35.203}$$

et en particulier en notant $A$ l'événement $|\hat{f}_n(x) - f(x)|^2 > \eta_0^2$, $P(A) > \epsilon$. Alors

$$\int_\Omega \big|\hat{f}_n(x,\omega) - f(x,\omega)\big|^2 dP(\omega) \geqslant \int_A \big|\hat{f}_n(x,\omega) - f(x,\omega)\big|^2 dP(\omega) \geqslant \int_A \eta_0^2 = \eta_0^2 P(A). \tag{35.204}$$

Cela signifie que

$$\|\hat{f}_n(x) - f(x)\|_{L^2(P)} \geqslant \eta_0 P(A), \tag{35.205}$$

ce qui contredit la première convergence démontrée. □

Note : l'hypothèse $nh_n \to \infty$ revient à dire que nous voulons que chaque boîte contienne de plus en plus d'observations. Si nous avions $nh_n \to 0$, alors avec $n$ qui augmente, la majorité des boîtes deviendraient vides, ce qui reviendrait à une perte d'information.

## 35.8 Test d'hypothèses, prise de décision

### 35.8.1 Exemple : qualité des pièces d'usine

Une usine fabrique des composantes électronique garantis un an. Le constructeur ne veut pas accepter que plus de 5% des pièces tombent en panne avant un an.

Nous supposons que la durée de vie $T$ d'une pièce soit une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ (qui est l'inverse de la moyenne : $\theta = 1/\lambda$). Le fabriquant veut donc s'assurer que

$$0.95 \leqslant P(T \geqslant 1), \tag{35.206}$$

ou encore

$$P(T \geqslant 1) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx = e^{-1/\theta} \geqslant 0.95, \tag{35.207}$$

donc le fabriquant doit s'assurer que

$$\theta \geqslant \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{0.95}\right)}. \tag{35.208}$$

Nous posons donc $\theta_0 = 19.5$ et nous prenons comme modèle de décision que si $\theta < \theta_0$, alors la chaîne de production doit être revue, et si $\theta > \theta_0$, alors l'usine peut continuer son travail.

Ce dont nous disposons n'est pas de $\theta$, mais d'une estimation de $\theta$ à partir d'un échantillon. Cela étant il faudra aussi pouvoir estimer la probabilité de faire un mauvais choix.

### 35.8.2 Exemple : la résistance d'un fil

Un artisan a besoin d'un fil qui a une résistance à une traction de 100 g en moyenne. Si la résistance est trop faible, le fil casse ; si elle est trop grande, c'est trop rigide et ça ne convient pas.

**Remarque 35.43.**
Dans l'exemple précédent, avoir $\theta > \theta_0$ ne dérange pas. Si la durée de vie moyenne est de 2 ans, le directeur de l'usine ne sera pas malheureux. Ici par contre l'artisan cherche une valeur précise et a donc une borne vers le haut et vers le bas.

L'artisan reçoit un lot de fils et souhaite savoir s'il est conforme. Pour cela, il prend 4 fils au hasard et mesure une moyenne de 112 g. Est-ce que cela est cohérent avec une moyenne de 100 g ?

Nous faisons l'hypothèse que ma résistance des fils suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m$ inconnu. Pour la simplicité nous supposons que $\sigma$ est connu et vaut 10.

Nous devons prendre une décision entre deux hypothèses. L'hypothèse $H_0$ sera de dire que le lot a une résistance de 100 g et l'hypothèse alternative sera que le lot a une résistance différente.

Les 4 observations sont quatre variables aléatoires $(X_i)_{i=1,2,3,4}$, et le nombre 112 est une réalisation de la variable aléatoire

$$\bar{X}_4 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4). \tag{35.209}$$

Nous supposons que $H_0$ est vraie, et nous calculons quelle est l'intervalle autour de $m = 100$ qui a 95% de chances de contenir la moyenne observée. Si 112 est dedans, nous acceptons $H_0$ et si 112 est hors de cet intervalle, nous refusons $H_0$.

Compte tenue de l'hypothèse $H_0$, nous avons

$$\frac{\bar{X}_4 - 100}{\frac{10}{\sqrt{4}}} = \frac{\bar{X}_4 - 100}{5} \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{35.210}$$

Nous commençons à connaître par cœur l'intervalle de confiance à 95% d'une loi normale centrée réduite ; le quantile est à 1.96, c'est à dire

$$P\left(-1.96 \leqslant \frac{\bar{X}_4 - 100}{5} \leqslant 1.96\right) = 0.95, \tag{35.211}$$

ou encore

$$P\big(\bar{X}_4 \in [90.2, 109.8]\big). \tag{35.212}$$

Il y a donc moins de 5% de chances que la moyenne de ces quatre fils tombent en dehors de l'intervalle $[90.2, 109.8]$. L'artisan doit donc rejeter l'hypothèse et considérer que le lot est mauvais.

La région

$$]-\infty, 90.2] \cup [109.8, \infty[ \tag{35.213}$$

est la **région de rejet**, ou **région critique**.

Ici, le nombre 5% représente le risque de refuser $H_0$ alors qu'elle était vraie. Notons que nous ne pouvons pas calculer le risque d'accepter $H_0$ alors qu'elle est fausse. En effet, si $H_0$ est fausse, nous ne savons pas quelles sont les valeurs de $\bar{X}_4$ acceptables parce qu'il y a une infinité de possibilités pour $m$ qui soient alternatifs à $m = 100$.

Évidemment si la vraie moyenne est $100+10^{-7}$, l'hypothèse $H_0$ sera acceptée, mais nous n'avons aucun moyen de savoir si elle est vraie ou non.

### 35.8.3 Vocabulaire et théorie

Nous avons un modèle d'échantillonnage paramétrique $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ de taille $n$ et de paramètre inconnu $\theta$, de loi parente $\mu_\theta$ appartenant à une famille paramétrique de lois $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$.

Soient $H_0$ et $H_1$ deux ensembles disjoints tels que $\Theta = H_0 \cup H_1$. L'ensemble $H_0$ sera nommé **hypothèse nulle** et l'ensemble $H_1$ sera l'**hypothèse alternative**.

Pour l'exemple des fils, nous avions $H_0 = \{100\}$ et $H_1 = \mathbb{R}\backslash\{100\}$. Si une hypothèse est réduite à un singleton, nous parlons d'hypothèse **simple** et sinon c'est une hypothèse **composite** ou **multiple**. Faire un tests consiste à déterminer une région critique.

**Définition 35.44.**
*Un **test** est une application mesurable $\delta$ qui à $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe*

$$\delta(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}. \tag{35.214}$$

*Si $\delta(x_1, \dots, x_n) = 0$ on accepte l'hypothèse $H_0$ pour l'échantillon $x_1, \dots, x_n$, et si $\delta(x_1, \dots, x_n) = 1$, alors on rejette $H_0$ et on choisit $H_1$. L'ensemble*

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \delta(x_1, \dots, x_n) = 1\} \tag{35.215}$$

*est la **région de rejet** ou la **région critique**.*

L'ensemble $W = \delta^{-1}(1)$ est un borélien de $\mathbb{R}^n$ parce que $\delta$ est mesurable. L'événement auquel nous sommes intéressé est l'événement

$$R = \{(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n}) \in W\}. \tag{35.216}$$

**Exemple 35.45**
Pour l'exemple de 35.8.2 nous avions

$$\delta(x_1, \dots, x_4) = \mathbb{1}_{\complement[90.2,109.8]}(\bar{x}_4). \tag{35.217}$$

△

### 35.8.4 Risque de première et seconde espèce

Le modèle de décision que nous avons introduit comprend deux façons de se tromper. Soit nous rejetons $H_0$ alors qu'elle est vraie (c'est le **risque de première espèce**), soit nous acceptions $H_0$ alors qu'elle est fausse (risque de **seconde espèce**). Nous pouvons formaliser ces concepts de la façon suivante.

Nous considérons un test de région critique $W$. Le risque de première espèce, noté $\alpha$ est la fonction

$$\begin{aligned}\alpha\colon H_0 &\to [0,1]\\ \theta &\mapsto P\big((X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})\in W\big).\end{aligned}\tag{35.218}$$

Il s'agit de la probabilité de rejeter $H_0$ alors qu'elle es vraie. Le risque de seconde espèce est la fonction

$$\begin{aligned}\beta\colon H_1 &\to [0,1]\\ \theta &\mapsto P\big((X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})\notin W\big).\end{aligned}\tag{35.219}$$

C'est la probabilité d'accepter $H_0$ alors qu'elle est fausse.

**Définition 35.46.**
*Soit $\delta$ un test de région critique $W$. La **puissance** du test est la fonction*

$$\begin{aligned}\eta\colon H_1 &\to [0,1]\\ \theta &\mapsto P\big((X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})\in W\big).\end{aligned}\tag{35.220}$$

*La **courbe d'efficacité** du test est la fonction*

$$\begin{aligned}h\colon \Theta &\to [0,1]\\ \theta &\mapsto P\big((X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})\notin W\big).\end{aligned}\tag{35.221}$$

La puissance d'un test est la probabilité de rejeter $H_0$ lorsque $H_1$ est vraie. Plus la puissance est grande, mieux c'est. La courbe d'efficacité du test est la probabilité d'accepter $H_0$ pour une certaine valeur de $\theta$.

Soit un test $\delta$. Une statistique $T_\theta = T_n(X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})$ est une **variable de décision** pour $\delta$ si $\complement W$ peut s'écrire d'une des façons suivantes

$$\complement W = \begin{cases}\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } T_n(x_1,\dots,x_n)<c\} & \text{test unilatéral à droite}\\ \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } T_n(x_1,\dots,x_n)>c\} & \text{test unilatéral à gauche}\\ \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } c_1\leqslant T_n(x_1,\dots,x_n)<c_2\} & \text{test bilatéral.}\end{cases}\tag{35.222}$$

Le plus souvent la variable de décision sera la moyenne : $T_n(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Les valeurs $c, c_1, c_2$ sont des **valeurs critiques**.

En ce qui concerne les notations, ici $T_n$ représente la valeur mesurée sur un $n$-échantillon (d'où l'indice $n$) alors que $T_\theta$ est la valeur *théorique* de $T$ lorsque $\theta$ est la vraie valeur du paramètre qu'on veut estimer.

Pour un test unilatéral à gauche, nous fixons la valeur critique $c$ de telle manière a avoir

$$P(T_\theta>c)\leqslant\alpha.\tag{35.223}$$

Pour un test unilatéral à gauche, nous fixons $c$ de telle manière a avoir

$$P(T_\theta<c)\leqslant\alpha\tag{35.224}$$

et pour un test bilatéral nous fixons $c_1$ et $c_2$ de telle façon à avoir

$$P(T_\theta>c_2)=P(T_\theta<c_1)\leqslant\frac{\alpha}{2}.\tag{35.225}$$

### 35.8.5 Modèle paramétrique de loi gaussienne

Soit un modèle statistique paramétrique de lois gaussiennes $\mathscr{N}(m,1)$ de moyenne $m$ inconnue avec $m \in \mathbb{R}^+$. Nous avons $\Theta = [0,\infty[$.

Nous observons un échantillon de taille $n = 36$. Avec un risque de première espèce de 5% nous voulons estimer l'hypothèse $H_0 = \{0\}$ contre l'hypothèse $H_1 = ]0,\infty[$. De notre échantillon nous construisons la variable aléatoire

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{35.226}$$

dans laquelle les $X_i$ sont les éléments de l'échantillon, elles sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathscr{N}(m,1)$ avec $m$ inconnu.

Si $\bar{X}_n$ est proche de zéro nous acceptons $H_0$, sinon nous la rejetons. La région de rejet s'écrit donc sous la forme

$$W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i > u\} \tag{35.227}$$

dans lequel il faut fixer le $u$ pour satisfaire au risque de première espèce de 5%. La contrainte est d'avoir

$$P(\bar{X}_n > u) = \alpha \tag{35.228}$$

si $H_0$ est vérifiée. Cela revient à dire que dans 5% des cas où $H_0$ est correcte, nous la rejetterons. Si $H_0$ est vraie alors $\bar{X}_n$ est une moyenne de gaussiennes de moyennes $m$ et nous avons

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathscr{N}(0,1) \tag{35.229}$$

avec $m = 0$ et $\sigma = 1$. L'équation (35.228) devient donc

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{X}_n}{1/\sqrt{n}} > \frac{u}{1/\sqrt{n}}\right) = P(T > \sqrt{n}u) \tag{35.230}$$

où $T \sim \mathscr{N}(0,1)$. Avec $n = 36$ et $\alpha = 5\%$ nous trouvons

$$u = \frac{1.645}{6} \simeq 0.274 \tag{35.231}$$

La règle de décision est donc la suivante : si $\bar{x}_n > 0.274$ alors nous rejetons $H_0$, et sinon nous l'acceptons.

Calculons la puissance de ce test (définition 35.46). C'est la fonction donnée par

$$\begin{aligned}\eta\colon H_1 &\to \mathbb{R}\\ m &\mapsto P\big((X_{1,m},\dots,X_{n,m}) \in W\big) = P\left(\frac{1}{n}\sum X_i > u\right).\end{aligned} \tag{35.232}$$

Dans ce calcul, les $X_i$ sont d'une loi normale $\mathscr{N}(m,1)$, et non $\mathscr{N}(0,1)$. En retranchant $m$ et en divisant par $1/\sqrt{n}$ nous trouvons

$$\eta(m) = P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum X_i - m}{1/\sqrt{t}} > \frac{u-m}{1/\sqrt{n}}\right) \tag{35.233a}$$

$$= P(T > \sqrt{n}(u-m)) \tag{35.233b}$$

$$= P(T > 16.45 - 6m) \tag{35.233c}$$

$$= 1 - \Phi(1.645 - 6m) \tag{35.233d}$$

où $\Phi$ est la fonction de répartition de $\mathscr{N}(0,1)$. La fonction $\eta$ a les propriétés suivantes :

$$\lim_{m\to-\infty} \eta(m) = 0 \tag{35.234a}$$

$$\lim_{m\to\infty} \eta(m) = 1 \tag{35.234b}$$

$$\eta(0) = \frac{5}{100}. \tag{35.234c}$$

**Remarque 35.47.**
Si nous regardons $m = 0.001$, le risque de seconde espèce est quasiment de 90%. En effet le risque de seconde espèce est d'accepter $H_0$ alors qu'il est faux. Lorsque $m = 0.001$, l'hypothèse $H_0$ est fausse, mais la probabilité qu'on l'accepte est grande. D'ailleurs les conséquences de l'accepter à tord ne sont peut-être pas si grandes que cela.

## 35.9 Tests paramétriques

La proposition suivante montre le lien entre région de confiance et les tests.

**Proposition 35.48.**
*Soit $\Lambda(X_1, \dots, X_n)$ une région de confiance par excès de niveau de confiance $1 - \alpha$. Alors il existe un tests pur de niveau $\alpha$ pour tester $H_0 = \{\theta_0\}$ de région de rejet*

$$W_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \theta_0 \notin \Lambda(x_1, \dots, x_n)\}. \tag{35.235}$$

*Démonstration.* L'hypothèse sur $\Lambda$ signifie qu'avec les observations $(X_1, \dots, X_n)$, il y a une forte probabilité (plus grande que $1 - \alpha$) que $\theta$ soit dans $\Lambda(X_1, \dots, X_n)$. Avec ou sans $H_0$ nous avons donc

$$P(\theta \in \Lambda) \geqslant 1 - \alpha. \tag{35.236}$$

Supposons maintenant l'hypothèse $H_0$, alors

$$P\big((X_1, \dots, X_n) \in W_n\big) = P\big(\theta_0 \notin \Lambda(X_1, \dots, X_n)\big) \leqslant \alpha. \tag{35.237}$$

□

**Remarque 35.49.**
Soit $W_n$ la région de confiance d'un test de niveau $\alpha$ pour tester $H_0 = \{\theta_0\}$. Alors

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x \notin W_n\} \tag{35.238}$$

est une région de confiance $1 - \alpha$ pour $\theta$.

**Exercice 8**
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi parente $\mathcal{N}(\theta, 1)$ avec $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$. Nous supposons $\theta_0 < \theta_1$. Nous voulons tester $H_0 = \{\theta_0\}$ contre $H_1 = \{\theta_1\}$. Nous proposons le test suivant. La variable de décision sera $\bar{X}_n$ et la région de rejet sera

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \frac{1}{n}\sum_i x_i > \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\}. \tag{35.239}$$

(1) Donner le risque de première espèce de ce test.
(2) Soit $0 < \alpha < 1$. Pour quelle valeur de $n$ le tests a-t-il un risque de première espèce égal à $\alpha$ ?
(3) Donner la puissance du test.

Le réponses peuvent être exprimées en termes de la fonction de répartition $F$ de la loi normale centrée réduite.

**Correction de l'exercice 8**
Le risque de première espèce est donné par

$$\alpha = P\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i > \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right) \tag{35.240}$$

où les $X_i$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi parente $\mathscr{N}(\theta_0, 1)$. Cela est la probabilité d'être dans la région de rejet alors que l'hypothèse $H_0$ est vraie. La formule (35.240) se transforme en

$$\alpha = P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum X_i - \theta_0}{1/\sqrt{n}} > \frac{\frac{\theta_0+\theta_1}{2} - \theta_0}{1/\sqrt{n}}\right) \tag{35.241a}$$

$$= P(T > \sqrt{n}\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}). \tag{35.241b}$$

En termes de la fonction de répartition nous avons alors

$$\alpha = 1 - F\big(\sqrt{n}\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\big) \tag{35.242}$$

Il s'agit maintenant de trouver le nombre $n$ qui réalise cette égalité. Pour cela nous utilisons l'inverse $F^{-1}$ de la fonction de répartition de la normale :

$$n = \left(\frac{2}{\theta_1 - \theta_0}F^{-1}(1-\alpha)\right)^2. \tag{35.243}$$

Le risque de seconde espèce est la possibilité d'accepter $H_0$ lorsque $H_1$ est vraie, c'est à dire

$$\beta = P\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i < \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right) \tag{35.244}$$

sous l'hypothèse $H_1$. Dans le calcul de (35.244) nous prenons donc $X_i \sim \mathscr{N}(\theta_1, 1)$. Le résultat est que

$$\beta = F\big(\sqrt{n}\frac{\theta_0 - \theta_1}{2}\big). \tag{35.245}$$

**Remarque 35.50.**
L'expression (35.243) diminue lorsque $\theta_0$ et $\theta_1$ s'éloignent, ce qui est normal : plus les nombres à discerner sont éloignés, moins l'échantillon à prendre pour réaliser le travail doit être grand.

Notons aussi que $\theta_0 - \theta_1 < 0$, par conséquent augmenter $n$ diminue la valeur de

$$\beta = F\big(\sqrt{n}\frac{\theta_0 - \theta_1}{2}\big) \tag{35.246}$$

## 35.10 Tests d'adéquation

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de loi parente $X$ finie prenant ses valeurs dans $\{a_1, \ldots, a_k\}$. La loi de $X$ est donnée par les nombres

$$p_i = P(X = a_i) \tag{35.247}$$

pour $i = 1, \ldots, k$. Nous introduisons l'**effectif empirique**, la variable aléatoire $N_i$ qui compte le nombre de fois que $a_i$ est observé dans l'échantillon. La **fréquence empirique** est la variable aléatoire

$$F_i = \frac{N_i}{n}. \tag{35.248}$$

Nous savons que la loi de $N_i$ est $\mathscr{B}(n, p_i)$, et la loi des grands nombres dit que

$$F_i \xrightarrow{p.s.} p_i \tag{35.249}$$

pour chaque $i$. Le théorème central limite nous indique de plus que

$$\frac{N_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} T \sim \mathscr{N}(0, 1). \tag{35.250}$$

Nous considérons un cas où les $p_i$ sont inconnus. Ils peuvent être approchés par $N_i \simeq np_i$. Le théorème de Pearson nous indique comment.

**Théorème 35.51** (Théorème de Pearson)**.**
*Nous avons*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow{\mathscr{L}} K \sim \chi^2(k-1) \tag{35.251}$$

*où la distribution $\chi^2(l)$ est la somme des carrés de $l$ gaussiennes centrées réduites indépendantes.*

*Démonstration.* Nous commençons par le cas $k = 2$. Dans ce cas nous avons $N_2 = n - N_1$ et $p_1 + p_2 = 1$. La sommes que nous regardons est

$$\frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_1 - np_1)^2}{n(1-p_1)} \tag{35.252a}$$

$$= \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)}. \tag{35.252b}$$

Étant donné que $N_1$ est une variable aléatoire binomiale nous avons

$$\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} T \sim \mathscr{N}(0,1). \tag{35.253}$$

Par conséquent la limite de (35.252b) est

$$\left(\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2 \xrightarrow{\mathscr{L}} T^2 \simeq \chi^2(1). \tag{35.254}$$

Cela conclut le cas $k = 2$.

Passons à présent au cas général. Le $k$-uple $(N_1, \dots, N_k)$ est une variable aléatoire multinomiale de loi

$$\mathscr{M}(n; k; p_1, \dots, p_k). \tag{35.255}$$

Nous introduisons les variables aléatoires $U_i$ données par $U_i \colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ avec

$$P\big(U_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)\big) = p_i; \tag{35.256}$$

c'est le vecteur aléatoire qui prend ses valeurs dans les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^k$ et qui prend la valeur $e_i$ avec probabilité $p_i$. Par construction nous avons

$$(N_1, \dots, N_k) = \sum_{i=1}^{n} U_i. \tag{35.257}$$

Nous allons étudier la fonction caractéristique de $(N_1, \dots, N_k)$ définie par l'équation (34.197) :

$$\begin{aligned} \Phi_{(N_1,\dots,N_k)} \colon \mathbb{R}^k &\to \mathbb{C} \\ e_j &\mapsto E(e^{ie_j \cdot N}) = E(e^{iN_j}). \end{aligned} \tag{35.258}$$

Plus généralement,

$$\Phi_{(N_1,\dots,N_k)}(t_1, \dots, t_k) = E\big(e^{i\langle t, N\rangle_{\mathbb{R}^k}}\big). \tag{35.259}$$

Nous avons

$$e^{i\langle t, N\rangle} = e^{i\sum_j \langle t, U_j\rangle} = \prod_j e^{i\langle t, U_j\rangle} \tag{35.260}$$

et vu que les $U_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées nous pouvons écrire $U_1$ à la place de $U_j$ de façon à avoir

$$\Phi_{(N_1,\dots,N_k)}(t_1, \dots, t_k) = \prod_j E\big(e^{i\langle t, U_1\rangle}\big) \tag{35.261a}$$

$$= \prod_j \sum_l p_l e^{i\langle t, e_l\rangle} \tag{35.261b}$$

$$= \prod_j \sum_l p_l e^{it_l} \tag{35.261c}$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{k} p_l e^{it_l}\right)^n. \tag{35.261d}$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{(N_1,\dots,N_n)}(t_1,\dots,t_k) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} t_j^2} - \left(\sum_{j=1}^{k} t_j\sqrt{p_j}\right)^2. \tag{35.262}$$

Pour ce faire, nous allons effectuer un développement limité. D'abord nous introduisons les variables aléatoires

$$\alpha_j = \frac{N_j - np_j}{\sqrt{np_j}} \tag{35.263}$$

et nous calculons

$$\Phi_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}(t_1,\dots,t_k) = E\left[\exp\left(i\langle t, (\frac{N_1-np_1}{\sqrt{np_1}},\dots,\frac{N_k-np_k}{\sqrt{np_k}})\rangle\right)\right] \tag{35.264}$$

Étant donné que $n$ et $p_j$ sont des variables déterministes, nous pouvons les sortir de l'espérance. Nous avons alors

$$\Phi_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}(t_1,\dots,t_k) = \exp\left(-i\sum_{j=1}^{k} t_j\sqrt{np_j}\right)\Phi_{(N_1,\dots,N_k)}\left(\frac{t_1}{\sqrt{np_1}},\dots,\frac{t_k}{\sqrt{np_k}}\right) \tag{35.265}$$

parce que

$$E\left(e^{t_j\frac{N_j-np_j}{\sqrt{np_j}}}\right) = e^{\frac{-t_j np_j}{\sqrt{np_j}}} E\left(e^{t_j N_j/\sqrt{np_j}}\right) \tag{35.266}$$

En remplaçant (35.261) dans (35.265) nous trouvons

$$\Phi_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}(t_1,\dots,t_k) = \exp\left(-i\sum_{j=1}^{k} t_j\sqrt{np_j}\right)\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k} p_j e^{i\frac{t_j}{\sqrt{np_j}}}\right)^n}_{A} \tag{35.267}$$

Nous analysons maintenant le terme $A$. Nous écrivons l'égalité $A = A + 1 - 1$ en tenant compte de $\sum_j p_j = 1$ sous la forme

$$A = \left(1 + \sum_{j=1}^{k} p_j\big(\exp(it_j/\sqrt{np_j}) - 1\big)\right)^n, \tag{35.268}$$

Nous avons alors

$$\ln(A) = n\ln\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j\big(e^{it_j/\sqrt{np_j}} - 1\big)\right] \tag{35.269}$$

Nous développons l'exponentielle en

$$e^{it_j/\sqrt{np_j}} - 1 = \frac{it_j}{\sqrt{np_j}} - \frac{t_j^2}{2np_j} + \frac{1}{n}\epsilon(1/n) \tag{35.270}$$

et ensuite le logarithme selon la formule

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\alpha(x^2). \tag{35.271}$$

Nous avons

$$\ln(A) = n\ln\left[1 + \sum_j p_j\Big(\frac{it_j}{\sqrt{np_j}} - \frac{t_j^2}{2np_j} + \frac{1}{n}\epsilon(\frac{1}{n})\Big)\right] \tag{35.272a}$$

$$= n\ln\left[1 + \sum_j p_j\Big(it_j\sqrt{\frac{p_j}{n}} - \frac{t_j^2}{2n} + \frac{1}{n}\epsilon(\frac{1}{n})\Big)\right] \tag{35.272b}$$

$$= n\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\left(it_j\sqrt{\frac{p_j}{n}} - \frac{t_j^2}{2n} + \frac{1}{n}\epsilon(1/n)\right)}_{K} \tag{35.272c}$$

$$- n\frac{1}{2}\left[\sum_j\left(it_j\sqrt{\frac{p_j}{n}} - \frac{t_j^2}{2n} + \frac{1}{n}\epsilon(1/n)\right)^2\right] \tag{35.272d}$$

$$+ nK^2\alpha(K) \tag{35.272e}$$

Nous introduisons dans $\epsilon$ tous les termes en $1/n^2$ et nous trouvons

$$\ln(A) = \sum_j\left(it_j\sqrt{p_jn} - \frac{t_j^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_j it_j\sqrt{p_j}\right)^2 + \epsilon(1/n) + K^2\alpha(K). \tag{35.273}$$

En remplaçant dans (35.267) et en passant à la limite pour $n \to \infty$,

$$\Phi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}(t_1,\ldots,t_k) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_j t_j^2 + \frac{1}{2}\big(\sum_j t_j\sqrt{p_j}\big)^2\right). \tag{35.274}$$

Nous reconnaissons des lois gaussiennes dans le premier terme de l'exponentielle. Nous allons maintenant nous atteler à identifier le second terme.

Soit $C$ une matrice orthogonale dont la dernière ligne est $(\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_k})$. Nous considérons les vecteurs

$$\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_k\end{pmatrix}. \tag{35.275}$$

et ensuite nous notons

$$U = Ct = \begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_k\end{pmatrix}. \tag{35.276}$$

Étant donné que $C$ est orthogonale, nous avons $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^k \beta_i^2$ et

$$\Phi_{(\beta_1,\ldots,\beta_k)} = E\big(e^{i\langle u,\beta\rangle}\big) = E\big(e^{i\langle t,\alpha\rangle}\big) = \Phi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}(t_1,\ldots,t_k). \tag{35.277}$$

Nous pouvons récrire l'argument de l'exponentielle (35.274) de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^k t_j^2 = \sum_j u_j^2 \tag{35.278a}$$

$$\sum_{j=1}^k t_j\sqrt{p_j} = (Ct)_k, \tag{35.278b}$$

Nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{(\beta_1,\ldots,\beta_k)}(t_1,\ldots,t_k) = \lim_{n\to\infty}\Phi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}(u_1,\ldots,u_k) \tag{35.279a}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}u_j^2\right) \tag{35.279b}$$

$$= \Phi_{(Z_1,\ldots,Z_{k-1},0)}(u_1,\ldots,u_k) \tag{35.279c}$$

où les $Z_i$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de distribution normale centrée réduite. Nous avons donc montré que

$$(\beta_1, \dots, \beta_k) \xrightarrow{\mathscr{L}} (Z_1, \dots, Z_{k-1}, )). \tag{35.280}$$

Étant donné que l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est continue, nous avons aussi

$$\|(\beta_1, \dots, \beta_k)\|^2 \xrightarrow{\mathscr{L}} \|(Z_1, \dots, Z_{k-1}, 0)\|^2, \tag{35.281}$$

et par conséquent

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|^2 \xrightarrow{\mathscr{L}} \sum_{j=1}^{k-1} Z_j^2 \sim \chi^2(k-1). \tag{35.282}$$

D'après la définition (35.263) nous avions

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - p_j)^2}{np_j}. \tag{35.283}$$

□

# Chapitre 36

# Chaînes de Markov à temps discret

Mets tes deux pieds en canard, c'est la chaîne de Markov qui se prépare.

## 36.1 Généralités

Les chaînes de Markov interviennent pour la description des systèmes dont l'évolution future ne dépend que de l'état présent.

**Définition 36.1.**
*Soit $E$ un ensemble au plus dénombrable et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Une **chaîne de Markov** à valeurs dans $E$ est une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires telles que pour tout $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$,*

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \tag{36.1}$$

Pour une chaîne de Markov, il n'est pas important de savoir l'historique pour prédire la futur : $X_{n+1}$ est seulement déterminé par $X_n$.

**Remarque 36.2.**
Il existe une théorie des chaînes de Markov à temps continu ou avec $E$ non dénombrable, mais ce n'est pas au programme.

Nous notons

$$p_n(x, y) = P(X_{n+1} = y | X_n = x) \tag{36.2}$$

la **probabilité de transition** de la chaîne à l'instant $n$. Si cette probabilité ne dépend pas de $n$, nous disons que la chaîne de Markov est **homogène**, et nous notons $p(x, y)$ au lieu de $p_n(x, y)$. Nous notons $Q$ la matrice (éventuellement infinie) de transition

$$Q_{xy} = p(x, y). \tag{36.3}$$

Nous avons

$$\sum_{y\in E} p(x, y) = 1 \tag{36.4}$$

parce que c'est la somme de toutes les transitions possibles en partant de $x$. Notons aussi que $p(x, y) \geqslant 0$.

**Définition 36.3.**
*Une matrice dont tous les éléments sont positifs ou nuls et donc la somme de toutes les lignes sont 1 est une **matrice stochastique**.*

Notons que l'ensemble des matrices stochastiques est un fermé dans l'ensemble des matrices.

**Lemme 36.4.**
*Si $U$ est une matrice stochastique*[1]*, alors il existe une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $U$.*

**Remarque 36.5.**
La somme $\sum_{x\in E} p(x,y)$ ne vaut pas spécialement 1. Si les états $x_1$ et $x_2$ arrivent tous les deux en $y$ de façon certaine, alors nous avons $\sum_x p(x,y) \geqslant 2$. Il n'y a donc pas de limites aux sommes des colonnes.

**Exemple 36.6**
Nous considérons une fourmi qui se déplace dans un appartement à trois pièces $A$, $B$, $C$. Supposons qu'à chaque minute, elle a une probabilité 1/3 de rester dans la pièce et une probabilité 2/3 de se déplacer. Le plan de l'appartement est

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \tag{36.5}$$

De la pièce $A$ est est donc uniquement possible d'aller vers la pièce $B$ ; de la $B$ il est possible d'aller en $A$ et en $C$ et de la $C$ il est uniquement possible d'aller en $B$.

La matrice de transition de cette chaîne de Markov est

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{36.6}$$

△

**Exemple 36.7**
Si $N_t$ est un processus de Poisson, alors les variables aléatoires $X_n = N_n$ forment une chaîne de Markov. △

## 36.2 Chaînes de Markov sur un ensemble fini

Une chaîne de Markov est **finie** si l'ensemble $E$ dans lequel elle prend ses valeurs est fini.

**Proposition 36.8** ([357])**.**
*Si $(X_n)$ est une chaîne de Markov irréductible sur un ensemble fini, alors pour tout ensemble $A \subset E$ nous avons*

$$P(\tau_A < \infty) = \lim_{n\to\infty} P(\tau_A \leqslant n) = 1 \tag{36.7}$$

*où $\tau_A = \min\{k \text{ tel que } X_k \in A\}$.*

Les proposition à venir vont montrer que

(1) Toute matrice stochastique admet un état stationnaire, proposition 36.9.

(2) Si la chaîne de Markov est irréductible, alors il y a unicité de l'état stationnaire, proposition 36.10. Mais attention : cela ne veut pas encore dire que la chaîne converge effectivement vers cet état.

(3) Si la chaîne est irréductible et apériodique, alors il y a convergence en loi vers l'unique loi invariante, théorème 36.13.

**Proposition 36.9** ([358])**.**
*Toute matrice stochastique admet un état stationnaire.*

1. Définition 36.3.

**Proposition 36.10** ([358]).
*Soit une chaîne de Markov irréductible finie. Alors il existe une unique loi stationnaire $\pi$ et de plus nous avons $\pi_i > 0$ pour tout état $i$ de $E$.*

**Définition 36.11.**
*Une chaîne de Markov finie est **régulière** s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^n$ a uniquement des éléments strictement positifs.*

**Théorème 36.12** ([357]).
*Soit $P$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière sur un ensemble $E$ de cardinal $N$. Alors il existe des nombres $\pi_1, \dots, \pi_N$ tels que*

*(1)* $\pi_i > 0$ *pour tout* $i = 1, \dots, N$

*(2)* $\pi_1 + \cdots + \pi_N = 1$

*(3)*

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix} \tag{36.8}$$

*De plus le vecteur $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ est l'unique solution de*

$$\pi P = \pi. \tag{36.9}$$

*Démonstration.* Si la chaîne n'a qu'un seul état c'est évident parce que la probabilité de transition est toujours 1 ; fin de l'histoire.

**Hypothèse** Sinon nous supposons que $P$ n'a que des éléments positifs, quitte à considérer $P^n$ au lieu de $P$. Nous notons $d$ le plus petit élément de $P$ ; il vérifie $d \leqslant \frac{1}{2}$ parce que la somme des élément d'une ligne de la matrice $P$ doit être égale à 1.

**Les suites min et max** Soit $x$ un vecteur quelconque (de composantes positives). Nous notons $m_0 = \min\{x_i\}$ et $M_0 = \max\{x_i\}$. Étant donné que les éléments du vecteur $Px$ sont des moyennes pondérées des éléments de $x$, si nous posons

$$m_k = \min\{(P^k x)_i\}_{i=1,\dots,N} \tag{36.10a}$$

$$M_k = \max\{(P^k x)_i\}_{i=1,\dots,N}, \tag{36.10b}$$

la suite $(m_k)$ est croissante et la suite $(M_k)$ est décroissante.

**Stricte croissance et décroissance** Si $M_{k+1} = M_k$, alors toutes les composantes de $P^k x$ sont égales à $M_k$ et le théorème est prouvé. Cela est encore une propriété de la moyenne. Même remarque pour la suite $(m_k)$.

Nous pouvons donc supposer que la suite $(m_k)$ est strictement croissante et que la suite $(M_k)$ est strictement décroissante. Elles sont toutes les deux bornées dans $[m_0, M_0]$. Le lemme 6.92 nous donne la convergence.

**Égalité des limites** Vu que les éléments de $P^k x$ ne sont pas tous les mêmes et s'étalent de $m_k$ à $M_k$, pour majorer $M_{k+1}$ nous mettons le plus petit coefficient possible (c'est à dire $d$) devant $m_k$ et nous supposons que toutes les autres composantes sont $M_k$ ; nous avons alors

$$M_{k+1} \leqslant dm_k + (1-d)M_k \tag{36.11}$$

parce que tous les autres coefficients de la ligne contenant le $d$ (dans $P^k$) sont plus petits ou égaux à $1-d$. De la même façon nous avons la minoration

$$m_{k+1} \geqslant dM_k + (1-d)m_k. \tag{36.12}$$

En faisant la différence, et en nous souvenant que $0 < 1 - 2d < 1$,

$$M_{k+1} - m_k \leqslant (1-2d)(M_k - m_k), \tag{36.13}$$

ce qui signifie que

$$M_{k+1} - m_k \leqslant (1-2d)^k(M_0 - m_0), \tag{36.14}$$

et donc que les deux limites sont égales.

**Conclusion pour la limite** Pour tout vecteur $x$, la suite $P^k x$ tend vers un vecteur dont toutes les composantes sont égales. En particulier pour le vecteur $e_i$ de la base canonique,

$$P^k e_i \to \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_1 \end{pmatrix}. \tag{36.15}$$

Mais $P^k e_i$ est la $i^{\text{e}}$ colonne de la matrice $P^k$. Cela prouve la convergence annoncée $P^k \to \Pi$.

Réglons rapidement le cas des deux autres allégations du théorème. D'abord les matrices $P^k$ sont toutes des matrices stochastiques ; et l'ensemble des matrices stochastiques est fermé, donc la convergence se fait à l'intérieur de l'ensemble des matrices stochastiques. Cela prouve que $\pi_1 + \cdots + \pi_N = 1$.

Ensuite la suite $(m_k)$ étant strictement croissante et $m_0$ étant égal à 0 dans le cas de $e_i$ nous avons toujours $\pi_i > 0$ (strictement). □

**Théorème 36.13** ([358])**.**
*Si $(X_n)$ est une chaîne de Markov finie, irréductible et apériodique de loi stationnaire $\pi$, alors*

*(1) La suite de matrices stochastiques $P^k$ converge vers la matrice*

$$P^k \to \Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}. \tag{36.16}$$

*(2) Nous avons convergence des variables aléatoires au sens où*

$$P(X_k = \mu P^k) \to \pi. \tag{36.17}$$

## 36.3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées valant $-1$ avec une probabilité $p$ et 1 avec une probabilité $(1-p)$. La loi est

$$Y_n \sim p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1. \tag{36.18}$$

Nous considérons la variable aléatoire

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{36.19}$$

où $X_0$ est une variable aléatoire indépendante des $Y_i$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous vérifions à présent que $X_n$ est une chaîne de Markov avec comme espace d'états $E = \mathbb{Z}$. Nous devons montrer que

$$P\big(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) = P\big(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\big). \tag{36.20}$$

Pour ce faire nous allons exprimer tout cela en termes des $Y_i$ au lieu des $X_i$. D'abord étant donné que nous avons égalité des événements

$$\{X_{n+1} = x_{n+1}\} \cap \{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\} = \{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} \cap \{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\}, \tag{36.21}$$

nous pouvons, en vertu du principe (34.76), remplacer $X_{n+1} = x_{n+1}$ par $Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ dans le membre de gauche de (36.20). Nous avons donc déjà

$$P\big(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) = P\big(\underbrace{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n}_{A} \,|\, \underbrace{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0}_{B}\big). \tag{36.22}$$

L'événement $B$ est égal à l'événement

$$\{X_0 = x_0, Y_1 = x_1 - x_0, Y_2 = x_2 - x_1, \dots, Y_n = x_n - x_{n-1}\}, \tag{36.23}$$

qui n'est autre que l'ensemble

$$X_0^{-1}(x_0) \cap Y_1^{-1}(x_1 - x_0) \cap \dots \cap Y_n^{-1}(x_n - x_{n-1}) \tag{36.24}$$

qui est dans la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_0, (Y_i)_{i=1,\dots,n}$. Le point délicat du raisonnement est de montrer que les événements $A$ et $B$ donnés par

$$A = \{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} \tag{36.25a}$$

$$B = \{X_0 = x_0\} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \{Y_i = x_i - x_{i-1}\} \tag{36.25b}$$

sont indépendants. Nous ne pouvons pas montrer directement que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ parce que cela est la formule que nous voulons utiliser pour montrer que la chaîne est de Markov. Nous passons donc par les tribus :

$$A \in \sigma(Y_{n+1}) \tag{36.26a}$$

$$B \in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n). \tag{36.26b}$$

Nous utilisons maintenant l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires $X_0$ et $Y_i$ pour conclure que les deux tribus des équations (36.26) sont indépendantes. Les événements $A$ et $B$ sont par conséquent indépendants.

L'événement $A$ est indépendant de l'événement $\{X_n = x_n\}$. Nous avons donc successivement

$$P\big(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) = P\big(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) \tag{36.27a}$$

$$= P\big(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n | Y_i = x_i - x_{i-1}, X_0 = x_0\big) \tag{36.27b}$$

$$= P(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n) \tag{36.27c}$$

$$= P(Y_{n+1} = x_{x+1} - x_n | X_n = x_n) \tag{36.27d}$$

$$= P(Y_{n+1} = x_{n+1} - X_n | X_n = x_n) \tag{36.27e}$$

$$= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \tag{36.27f}$$

Justifications :

— (36.27c) parce que les tribus $\sigma(Y_{n+1})$ et $\sigma(Y_i, X_0)$ sont indépendantes.

— (36.27d) Nous avons

$$\{X_n = x_n\} \in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n) \tag{36.28}$$

tandis que

$$\{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} \in \sigma(Y_{n+1}); \tag{36.29}$$

ce sont donc deux événements issus de tribus indépendantes. Donc conditionner ou non l'événement $Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ à l'événement $X_n = x_n$ ne change rien.

— (36.27e) est encore l'utilisation du fait que $P(A|B) = P(K|B)$ dès que $A \cap B = K \cap B$.

La chaîne est par conséquent de Markov.

La matrice de transition de cette chaîne de Markov est une matrice infinie «dans tous les sens» :

$$p(x, y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x - 1 \\ (1 - p) & \text{si } y = x + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{36.30}$$

**Remarque 36.14.**
La plupart du temps lorsqu'il faut démontrer qu'une chaîne est de Markov, il faut suivre la procédure que nous venons de suivre pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

— Écrire tout en fonction des incréments.
— Dire que les incréments conditionnés sont indépendants des incréments qui conditionnent (via les tribus engendrées).
— Écrire que la probabilité cherchée est égale à l'événement conditionné dans lequel on a juste remplacé l'incrément par sa valeur.
— Conditionner à nouveau par rapport au dernier incrément qui est indépendant.
— Changer la valeur du dernier incrément par la variable aléatoire.

Dans ce raisonnement nous utilisons deux fois le fait que $P(A|B) = P(K|B)$ si $A \cap B = K \cap B$.

### 36.3.1 Chaînes de Markov homogènes

**Proposition 36.15.**
*Voici quelques propriétés des chaînes de Markov homogènes.*

*(1) La probabilité d'une trajectoire donnée est*

$$P(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = p(x_{n-1}, x_n) \dots p(x_0, x_1) P(X_0 = x_0). \tag{36.31}$$

*(2) La probabilité de transition «en n coups» est donnée par la puissance nième de la matrice de transition :*

$$P(X_n = x_n | X_0 = x_0) = Q^n_{x_0, x_n}. \tag{36.32}$$

*(3) Si l'espace des états $E$ est fini, l'espérance d'une fonction bornée $f : E \to \mathbb{R}$ de l'état est donnée par*

$$E\big(f(X_{n+1}) | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) = E\big(f(X_{n+1}) | X_n = x_n\big) \tag{36.33a}$$
$$= \sum_{y \in E} f(y) p(x_n, y).j \tag{36.33b}$$

*Démonstration.* (1) Étant donné que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, nous avons

$$P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) P(X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0). \tag{36.34}$$

Par la propriété de Markov, le premier facteur est

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = p(x_{n-1}, x_n). \tag{36.35}$$

Le reste est une récurrence sur $n$.

(2) Montrons avec $n = 2$. En utilisant les divers points du théorème 34.30, nous avons

$$P(X_2 = x_2 | X_0 = x_0) = \sum_{y \in E} P(X_2 = x_2, X_1 = y | X_0 = x_0) \tag{36.36a}$$
$$= \sum_{y \in E} P(X_2 = x_2 | X_1 = y, X_0 = x_0) P(X_1 = y | X_0 = x_0) \tag{36.36b}$$
$$= \sum_{y \in E} P(X_2 = x_2 | X_1 = y) P(X_1 = y | X_0 = x_0) \tag{36.36c}$$
$$= \sum_{y \in E} p(x_2, y) p(y, x_0) \tag{36.36d}$$
$$= Q^2_{x_2, x_0}. \tag{36.36e}$$

Bien entendu ici la notion de produit matriciel doit être comprise de façon formelle lorsque $E$ est infini.

**Remarque 36.16.**
Nous avons utilisé l'homogénéité de la chaîne de Markov au moment d'écrire l'expression (36.36d). En principe nous aurions dû écrire $p_2(y, x_2)p_1(x_0, y)$.

□

### 36.3.2 Graphe de transition

Le **graphe de transition** d'une chaîne de Markov est le graphe dont les sommets sont les éléments de l'espace des états de la chaîne et dont les sommets sont reliés par des arrêtes pondérées par la probabilité de transition correspondante.

**Définition 36.17.**
*Une chaîne de Markov est **irréductible** si pour tout $x, y \in E$, il existe $n$ tel que $p^n(x, y) > 0$ où*

$$p^n(x, y) = P(X_n = y | X_0 = x). \tag{36.37}$$

*Le nombre $n$ peut dépendre de $x$ et $y$.*

**Lemme 36.18.**
*Une chaîne de Markov homogène est irréductible si et seulement si son graphe de transition est connexe.*

*Démonstration.* Pour chaque couple $(x, y) \in E^2$ nous avons

$$\begin{aligned} p^n(x, y) &= \sum_{z_i \in E} P(X_n = y, X_{n-1} = z_{n-1}, \dots, X_1 = z_1, X_0 = x) \\ &= \sum_{z_i} p(z_{n-1}, y)p(z_{n-2}, z_{n-1}) \dots p(z_1, z_2)p(x, z_1). \end{aligned} \tag{36.38}$$

La positivité d'un des termes de la somme signifie que le graphe est connexe tandis que la positivité de $p^n(x, y)$ signifie que la chaîne est irréductible. □

### 36.3.3 Chaîne de Markov définie par récurrence

#### 36.3.3.1 Le cas général

**Proposition 36.19.**
*Soit $X_0$ une variable aléatoire à valeurs dans $E$, un ensemble au plus dénombrable. Soit $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées indépendantes de $X_0$.*

*Soit $(X_n)$ la suite de variables aléatoires à valeurs dans $E$ définie par récurrence selon la formule*

$$X_{n+1} = G(X_n, Y_{n+1}) \tag{36.39}$$

*où $G\colon E \times \mathbb{R} \to E$ est une fonction mesurable. Alors $(X_n)$ est une chaîne de Markov.*

*Démonstration.* Soient $x_0, \dots, x_{n+1}$ des éléments de $E$. Nous devons calculer la valeur de

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0). \tag{36.40}$$

Commençons par préciser les espaces sur lesquels nos variable aléatoires sont définies. Nous avons

$$X_0\colon \Omega_0 \to E \tag{36.41}$$

et

$$Y_i\colon \Omega \to \mathbb{R}. \tag{36.42}$$

La variable aléatoire $X_1$ est donnée par

$$\begin{aligned} X_1 \colon \Omega_0 \times \Omega &\to E \\ (\omega_0, \omega_1) &\mapsto G\big(X_0(\omega_0), Y_1(\omega_1)\big). \end{aligned} \tag{36.43}$$

La variable aléatoire $X_2$ est

$$\begin{aligned} X_2 \colon \Omega_0 \times \Omega^2 &\to E \\ (\omega_0, \omega_1, \omega_2) &\mapsto G\big(X_1(\omega_0, \omega_1), Y_2(\omega_2)\big) \\ &= G\Big(G\big(X_0(\omega_0), \omega_1\big), Y_2(\omega_2)\Big) \end{aligned} \tag{36.44}$$

et ainsi de suite.

Considérons maintenant l'événement

$$\{X_1 = x_1, X_0 = x_0\} \subset \Omega_0 \times \Omega. \tag{36.45}$$

Il est donné explicitement par

$$\{X_1 = x_1, X_0 = x_0\} = \{(\omega_0, \omega_1) \text{ tel que } G\big(X_0(\omega_0), Y_1(\omega_1) = x_1, X_0(\omega_0) = x_0\big)\} \tag{36.46a}$$
$$= \{(\omega_0, \omega_1) \text{ tel que } G\big(x_0, Y_1(\omega_1) = x_1, X_0(\omega_0) = x_0\big)\} \tag{36.46b}$$
$$= \{\omega_0 \in \Omega_0 \text{ tel que } X_0(\omega_0) = x_0\} \times \{\omega_1 \in \Omega \text{ tel que } G\big(x_0, Y_1(\omega_1) = x_1\big)\}. \tag{36.46c}$$

Le premier terme du produit cartésien est dans $\sigma(X_0)$, tandis que le second est dans $\sigma(Y_1)$. Étant donné la définition des tribus produit (définition 13.151) nous avons

$$\{X_1 = x_1, X_0 = x_0\} \in \sigma(X_0, Y_1). \tag{36.47}$$

Ce raisonnement se généralise immédiatement et nous trouvons que

$$\{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\} \in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n). \tag{36.48}$$

Nous sommes donc à calculer

$$\diamondsuit = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = X_n, \dots, X_0 = X_0) \tag{36.49a}$$
$$= P\big(\underbrace{G(x_n, Y_{n+1}) = x_{n+1}}_{\in\sigma(Y_{n+1})} | \underbrace{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0}_{\in\sigma X_0, Y_1, \dots, Y_n}\big). \tag{36.49b}$$

Les tribus $\sigma(Y_{n+1})$ et $\sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n)$ étant indépendantes nous avons

$$\diamondsuit = P\big(G(x_n, Y_{n+1}) = x_{n+1}\big) \tag{36.50a}$$
$$= P\big(G(x_n, Y_{n+1}) = x_{n+1} | X_n = X_n\big) \tag{36.50b}$$
$$= P\big(G(X_n, Y_{n+1}) = x_{n+1} | X_n = x_n\big) \tag{36.50c}$$
$$= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \tag{36.50d}$$

Pour (36.50b) nous avons utilisé le fait que $\sigma(Y_{n+1})$ est indépendante de $\sigma(X_n)$. Nous avons prouvé que la chaîne était de Markov. □

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov définie dans la proposition 36.19 sont

$$P(X_1 = y | X_0 = x) = P\big(G(X_0, Y_1) = y | X_0 = x_0\big) = P\big(G(x_0, Y_1) = y\big). \tag{36.51}$$

#### 36.3.3.2 Exemple : la file de réparation de machines à laver

Nous considérons un magasin de réparation d'électroménager. Durant le jour $n$, un nombre aléatoire $Z_n$ de machines en panne arrivent au magasin. Une machine est réparée chaque jour (aucune si le magasin est vide). Nous supposons que les $Z_n$ soient indépendantes et identiquement distribuées, et nous posons $X_n$, le nombre de machines en magasin le jour $n$.

La loi d'avancement de $X_n$ est

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + Z_n - 1 & \text{si } X_n \neq 0 \\ Z_n & \text{si } X_n = 0. \end{cases} \tag{36.52}$$

Cela est une chaîne de Markov en vertu de la proposition 36.19. Ici la fonction est

$$G(x, y) = x + y - \mathbb{1}_{x\neq 0}. \tag{36.53}$$

Les probabilités de transitions sont

$$p(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant y - 2 \\ P(Z = 0) & \text{si } x = y - 1 \\ P(Z = k) & \text{si } x = y + k - 1 \end{cases} \tag{36.54}$$

pour $x \neq 0$.

**Exercice 1**

Soit $(X_n)$ une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}. \tag{36.55}$$

Calculer $P(X_3 = 1|X_0 = 1)$ et $P(X_7 = 0|X_4 = 0)$.

Déterminer, s'il en existe, une loi stationnaire vers laquelle converge la chaîne.

**Correction de l'exercice 1**

Nous avons

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.344 & 0.251 & 0.405 \\ 0.283 & 0.307 & 0.41 \\ 0.287 & 0.248 & 0.465 \end{pmatrix}. \tag{36.56}$$

La probabilité d'aller de l'état 1 à l'état 1 en trois étapes est donc 0.307. La chaîne étant de Markov, sans mémoire, les probabilités entre les temps 4 et 7 sont les mêmes qu'entre 0 et 3. Nous avons alors

$$P(X_7 = 0|X_4 = 0) = 0.344. \tag{36.57}$$

La chaîne est irréductible et n'a pas d'états absorbants.

## 36.4 Classification des états

Sauf mention expresse du contraire, nous considérons toujours une chaîne de Markov homogène.

**Définition 36.20.**
*Un état $x \in E$ est **absorbant** pour la chaine $(X_n)$ si $p(x, x) = 1$.*

Il n'est pas spécialement impossible d'arriver sur un état absorbant, mais il est impossible d'en sortir.

Si $x \in E$, nous notons

$$T(x) = \inf\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_k = x\}, \tag{36.58}$$

le **premier temps d'atteinte** de l'état $x$. Si $X_0 = x$, alors $T(x)$ est le **temps de retour** en $x$. Si $p \in \mathbb{N}$ nous notons

$$T_p(x) = \inf\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_{k+p} = x\}. \tag{36.59}$$

C'est le temps mis pour atteindre $x$ à partir de l'instant $p$.

**Proposition 36.21.**
*La loi de la variable aléatoire* $[T_p(x)|X_p = x]$ *est la même que celle de la variable aléatoire* $[T(x)|X_0 = x]$.

*Démonstration.* Nous devons montrer que

$$P(T_p(x) = k|X_p = x) = P(T(x) = k|X_0 = x). \tag{36.60}$$

Cela est intuitivement évident du fait qu'une chaîne de Markov soit un processus sans mémoire. Afin de prouver, nous allons sommer sur tous les états intermédiaires possibles :

$$\begin{aligned}
P(T_p(x) = k|X_0 = x) &= P(X_{p+k} = x, X_{p+k-1} \neq x, \dots, X_{p+1} \neq x|X_p = x) && \text{(36.61a)}\\
&= \sum_{z_i \neq x} P(X_{p+k} = x, X_{p+k-1} = z_{k-1}, \dots, X_{p+1} = z_1|X_p = x) && \text{(36.61b)}\\
&= \sum_{z_i} P(X_{p+k} = x, X_{p+k-i} = z_i|X_{p+1} = z_1, X_p = x) \underbrace{P(X_{p+1} = z_1|X_p = x)}_{=p(x,z_1)} && \text{(36.61c)}\\
&= \sum_{z_i} P(X_{p+k} = x, X_{p+k-i} = z_i|X_{p+2} = z_2, X_{p+1} = z_1, X_p = x) && \text{(36.61d)}\\
&\quad \underbrace{P(X_{p+2} = z_2|X_{p+1} = z_1, X_p = x)}_{P(X_{p+2}=z_2|X_{p+1}=z_1)=p(z_1,z_2)} p(x, z_1) && \text{(36.61e)}\\
&= \dots && \text{(36.61f)}\\
&= \sum_{z_i} p(x, z_1)p(z_1, z_2) \dots p(z_{k-1}, z_{k-1})p(z_{k-1}, x). && \text{(36.61g)}
\end{aligned}$$

À ce point ci, nous avons éliminé toute référence à $p$ grâce à l'homogénéité de la chaîne. Nous pouvons refaire le calcul à l'envers pour reconstituer l'expression de départ sans le $p$ :

$$\begin{aligned}
&\sum_{z_i} p(x, z_1)p(z_1, z_2) \dots p(z_{k-1}, z_{k-1})p(z_{k-1}, x) && \text{(36.62a)}\\
&\qquad = P(x_k = x, X_{k-1} \neq x, \dots, X_1 \neq x|X_0 = x) && \text{(36.62b)}\\
&\qquad = P(T(x) = k), && \text{(36.62c)}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait obtenir. □

**Définition 36.22.**
*Un état* $x$ *est* ***récurrent*** *si* $P(T(x) = \infty|X_0 = x) = 0$*, c'est à dire si la probabilité de ne jamais retourner en* $x$ *lorsqu'on y est passé est nulle. L'état* $x$ *est* ***transient*** *ou* ***transitoire*** *dans le cas contraire.*

*Si* $x$ *est un état récurrent, et si* $E\big(T(x)|X_0 = x\big) < \infty$*, nous disons que* $x$ *est* ***récurrent positif****. Si* $E\big(T(x)|X_0 = x\big) = \infty$ *alors nous disons que est* ***récurrent nul****.*

Nous introduisons une variable aléatoire qui compte le nombre de fois que la chaîne de Markov passe par l'état $x$ :

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}}. \tag{36.63}$$

C'est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

**Proposition 36.23.**
*Les deux propriétés suivantes sont équivalentes à dire que* $x$ *est récurrent :*

*(1)* $P(N_x < \infty|X_0 = x) = 0$

*(2)* $E(N_x|X_0 = x) = \infty$.

*Les deux propriétés suivantes sont équivalentes à dire que* $x$ *est transient :*

*(1)* $P(N_x < \infty|X_0 = x) = 1$

*(2)* $E(N_x|X_0 = x) < \infty$.

*Démonstration.* En tant que événements, nous avons l'égalité

$$N_x < \infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\underbrace{X_n = x, X_{n+k} \neq x \forall k \geqslant 1}_{F_n}\}. \tag{36.64}$$

Nous avons donc

$$P(N_x < \infty|X_0 = x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(F_n|X_0 = x), \tag{36.65}$$

et

$$\begin{aligned}
P(F_n|X_0 = x) &= P(X_{n+k} \neq x, \forall k \geqslant 1, X_n = x|X_0 = x) && \text{(36.66a)}\\
&= P(X_{n+k} \neq x, k \geqslant 1|X_n = x, X_0 = x)P(X_n = x|X_0 = x) && \text{(36.66b)}\\
&= P(X_{n+k} \neq x, k \geqslant 1|X_n = x)P(X_n = x|X_0 = x) && \text{(36.66c)}\\
&= P(X_k \neq x, k \geqslant 1|X_0 = x)P(X_n = x|X_0 = x) && \text{(36.66d)}\\
&= P(T(x) = \infty|X_0 = x)P(X_n = x|X_0 = x) && \text{(36.66e)}
\end{aligned}$$

Justifications :

(1) Pour (36.66c), nous utilisons le fait que la chaîne soit «sans mémoire».

(2) Pour (36.66d), nous utilisons le fait que la chaîne soit homogène.

(3) Pour (36.66e), l'événement $X_k \neq x$ pour tout $k \geqslant 1$ est exactement l'événement $T(x) = \infty$.

En nous servant de la proposition 13.234 (théorème de Fubini et mesure de comptage), nous permutons l'espérance et la somme dans l'expression

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = x|X_0 = x) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(\mathbb{1}_{\{X_n=x\}}|X_0 = x) && \text{(36.67a)}\\
&= E\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}|X_0 = x\Big) && \text{(36.67b)}\\
&= E(N_x|X_0 = x). && \text{(36.67c)}
\end{aligned}$$

Voyons ce passage plus en détail. D'abord, en général nous avons

$$E(Y|X = x_0) = \int_{\{X=x_0\}} Y(\omega)dP(\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X=x_0\}}(\omega)Y(\omega)dP(\omega). \tag{36.68}$$

Dans notre cas,

$$E\big(\mathbb{1}_{\{X_n=x\}}|X_0 = x\big) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X_0=x}(\omega)\mathbb{1}_{\{X_n=x\}}(\omega)dP(\omega). \tag{36.69}$$

La fonction qui correspond à la proposiiton 13.234 est

$$f(n, \omega) = f_n(\omega) = \delta_{X_0(\omega),x}\delta_{X_n(\omega),x}, \tag{36.70}$$

qui est bien une fonction positive et mesurable.

Nous reprenons à présent le calcul (36.65) en remplaçant les éléments par leurs valeurs que nous avons calculées :

$$P(N_x < \infty|X_0 = x) = P\big(T(x) = \infty|X_0 = x\big)E(N_x|X_0 = x). \tag{36.71}$$

Si $x$ est récurrent, nous avons $P\big(T(x) = \infty|X_0 = x\big) = 0$, mais la relation (36.71) ne permet pas de conclure que le membre de gauche est nul parce qu'il reste la possibilité que $E(N_x|X_0 = x) = \infty$. Nous devons donc faire un pas en arrière et écrire cette espérance comme la limite des sommes partielles :

$$P(N_x < \infty|X_0 = x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} P\big(T(x) = \infty|X_0 = x\big)P(X_n = x|X_0 = x) = 0 \tag{36.72}$$

parce que tous les termes de la suite des sommes partielles sont nuls. Nous avons donc bien que $P(N_x < \infty | X_0 = x) = 0$. Il s'ensuit immédiatement que $E(N_x | X_0 = x) = 1$.

Nous devons maintenant démontrer l'implication inverse. Supposons que $P(N_x < \infty | X_0 = x) = 0$. Dans ce cas nous avons immédiatement $P(N_x = \infty | X_0 = x) = 1$ et $E(N_x | X_0 = x) = \infty$. L'équation (36.71) nous indique alors que

$$P\big(T(x) = \infty | X_0 = x\big) = 0, \tag{36.73}$$

c'est à dire que $x$ est récurrent. □

### 36.4.1 Chaînes irréductibles

**Proposition 36.24.**
*Soit $(X_n)$ une chaîne de Markov irréductible.*

*(1) Un état $x$ est récurrent si et seulement si tous les états sont récurrents.*

*(2) Un état $x$ est transient si et seulement si tous les états sont transients.*

*Démonstration.* Soient $x$ et $y$ des états de la chaîne de Markov. Nous devons tester la valeur de $P(X_n = y | X_0 = y)$. Afin d'exploiter l'hypothèse d'irréductibilité, nous considérons $r, s \in \mathbb{N}$ tels que

$$p^r(x, y) > 0 \tag{36.74a}$$
$$p^s(y, x) > 0 \tag{36.74b}$$

et nous calculons majorons en passant par quelques intermédiaires :

$$\begin{aligned} P(X_{n+r+s} = y | X_0 = y) &\geqslant P(X_{n+r+s} = y, X_{n+s} = x, X_s = x | X_0 = y) && \text{(36.75a)}\\ &= P(X_{n+r+s} = y | X_{n+s} = x, X_s = x, X_0 = y) && \text{(36.75b)}\\ &\quad P(X_{n+s} = x | X_s = x, X_0 = y) P(X_s = x | X_0 = y). \end{aligned}$$

Les deux premiers facteurs se calculent en utilisant la propriété de Markov et l'homogénéité de la chaîne. Pour le premier,

$$P(X_{n+s} = x | X_s = x, X_0 = y) = P(X_{n+s} = x | X_s = x) = P(X_n = x | X_0 = x). \tag{36.76}$$

Nous avons donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_{n+r+s} = y | X_0 = y) \geqslant p^r(x, y) p^s(y, x) \sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n = x | X_0 = x). \tag{36.77}$$

En réutilisant Fubini comme dans l'équation (36.67), nous avons

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_{n+r+s} = y | X_0 = y) \geqslant K E(N_x | X_0 = x) \tag{36.78}$$

où $K$ est une constante strictement positive, par hypothèse d'irréductibilité de la chaîne de Markov.

Si $x$ est un état récurrent, alors le membre de gauche est infini par la proposition (36.23) et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_{n+r+s} = y | X_0 = y) = \infty. \tag{36.79}$$

Aux $r + s$ premiers termes près (qui ne changent pas la somme), nous avons

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n = y | X_0 = y) = \infty, \tag{36.80}$$

ce qui signifie que $y$ est récurrent. □

Nous rappelons que $T(x)$ est le temps que première atteinte de l'état $x$. Nous notons

$$\pi(x) = \frac{1}{E\big(T(x)|X_0 = x\big)}. \tag{36.81}$$

Étant donné que $T(x)$ est un entier positif ou nul nous avons $E\big(T(x)|X_0 = x\big) \in [1, \infty]$ et donc $\pi(x) \in [0, 1]$.

Si $x$ est un état transient, alors $T(x) = \infty$ lorsque $X_0 = x$ et donc $E\big(T(x)|X_0 = x\big) = 0$ et $\pi(x) = 0$. Si $x$ est récurrent par contre, $P\big(T(x) < \infty|X_0 = x\big) = 1$ et il n'y a pas de garanties sur la valeur de $E\big(T(x)|X_0 = x\big)$.

**Corollaire 36.25.**
*Un état récurrent est récurrent positif si et seulement si $\pi(x) > 0$. Un état récurrent est récurrent nul si et seulement si $\pi(x) = 0$.*

*Démonstration.* C'est la formule (36.81). □

**Proposition 36.26.**
*Soit $(X_n)$ est une chaîne de Markov irréductible.*

*(1) Si $x$ est un état récurrent, alors $T(X) < \infty$ presque sûrement.*

*(2) Nous avons une égalité entre les lois*

$$\mathscr{L}\big(X_{k+T(x)}|T(x) < \infty\big) = \mathscr{L}(X_k|X_0 = x). \tag{36.82}$$

### 36.4.2 Nombre de visites

La fonction

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \tag{36.83}$$

est la **fréquence empirique** de la chaîne de Markov.

Soit $x$ un état récurrent, c'est à dire que $P\big(T(x) < \infty|X_0 = x\big) = 1$. Nous classons les visites de la façon suivante :

$$T_1(x) = T(x) = \inf\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_k = x\} \tag{36.84a}$$
$$T_2(x) = \inf\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_{T_1(x)+k} = x\} \tag{36.84b}$$
$$\vdots \tag{36.84c}$$
$$T_n(x) = \inf\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_{T_{n-1}(x)+k} = x\} \tag{36.84d}$$

La variable aléatoire $T_i$ représente le temps entre la visite numéro $i-1$ et la visite numéro $i$ (si $X_0 \neq x$, sinon il faut décaler). Nous définissons l'instant la na visite numéro $n$ :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k(x). \tag{36.85}$$

**Lemme 36.27.**
*Les variables aléatoires $T_i$ sont indépendantes.*

*Démonstration.* Nous choisissons $n$ des $T_i$ et nous calculons la probabilité

$$\spadesuit = P(T_{i_1} = k_1, T_{i_2} = k_2, \dots, T_{i_n} = k_n) \tag{36.86}$$

où nous supposons $i_1 > i_2 > \dots > i_n$. Nous décomposons cette probabilité en sommant sur toute les histoires de la chaîne de Markov compatibles avec les nombres $k_i$ donnés :

$$\spadesuit = \sum_{\substack{\{z_j\}\\ \text{compatibles}}} P(X_j = z_j, j = 1, \dots, N). \tag{36.87}$$

Notons qu'ici, le numéro du dernier terme de la somme n'est pas certain parce que tous les $T_i$ ne sont pas fixés. Nous l'avons noté $N$, mais en réalité il est différent d'un terme à l'autre de la somme. Il est certain que $z_N = x$ et $z_{N-k_1} = x$ et si $N - k_1 < j < N$, alors $z_j \neq x$. Cela est simplement le fait que nous demandions aux $z_i$ de respecter les conditions données par les $k_i$. Nous avons

$$\spadesuit = \sum_{\{z_j\}} P(X_N = x, X_j = z_j, N - k_1 < j < N | X_j = z_j, j \leqslant N - k_1) P(X_j = z_j, j < N - k_1) \tag{36.88a}$$

$$= \sum_{\{z_j\}} P(X_N = x, X_j = z_j, N - k_1 < j < N | X_{N-k_1} = x) P(X_j = z_j, j < N - k_1) \tag{36.88b}$$

$$\tag{36.88c}$$

Le premier facteur est $P(T_{i_1} = k_1)$ tandis que le second facteur est précisément $P(T_j = k_j, j > 1)$. Nous avons donc montré que

$$P(T_{i_1} = k_1, T_{i_2} = k_2, \ldots, T_{i_n} = k_n) = P(T_{i_1} = k_1) P(T_j = k_j, j > 1), \tag{36.89}$$

et donc les $T_i$ sont indépendants. □

**Proposition 36.28.**
*Si $(X_n)$ est une chaîne de Markov irréductible et si $x \in E$ alors*

$$\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} \tag{36.90}$$

*presque sûrement.*

*Démonstration.* Étant donné que la chaîne est irréductible, les états sont soit tous transient soit tous récurrents par la proposition 36.24. Nous commençons par considérer que $x$ est transient.

En comparant la définition (36.63) de $N_x$ et le membre de droite de (36.90), nous avons pour chaque $n$ l'inégalité

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} \leqslant \frac{1}{n} E(N_x). \tag{36.91}$$

Dans le cas d'un élément transient, nous avons $\pi(x) = 0$, donc il serait bon de montrer que $E(N_x) < \infty$, de sorte que prendre la limite $n \to \infty$ dans (36.91) donne zéro.

Nous décomposons le calcul en deux morceaux :

$$E(N_x) = E\big(N_x | T(x) = \infty\big) P\big(T(x) = \infty\big) + E\big(N_x | T(x) < \infty\big) P\big(T(x) < \infty\big). \tag{36.92}$$

Le fait que le premier terme soit fini découle immédiatement du fait que $T(x) = \infty$ implique $X_k \neq x$ pour tout $k \geqslant 1$. Dans ce cas l'espérance de $N_x$ est évidemment finie.

Pour le second terme nous avons

$$E\big(N_x | T(x) < \infty\big) = E\big( \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} | T(x) < \infty \big) \tag{36.93a}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\big(\mathbb{1}_{\{X_k = x\}} | T(x) < \infty\big). \tag{36.93b}$$

Pour inverser la somme et l'espérance, nous avons utilisé le théorème de théorème de Fubini-Tonelli qui est encore valable pour des fonctions qui prennent la valeur $\infty$. Le fait d'inverser ne signifie pas que ni la somme ni l'intégrale soit finie. D'ailleurs c'est exactement ce que nous sommes en train de déterminer.

Étant donné que nous voulons seulement savoir si cette somme est finie ou non, nous pouvons nous restreindre à la somme depuis $k = 1$ ou oublier le premier terme. D'autre par nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{j+T(x)}=x\}} \tag{36.94}$$

parce que les $T(x)$ premiers termes sont par définition nuls. Nous regardons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} E\big(\mathbb{1}_{X_{j+T(x)}=x}|T(x)<\infty\big) &= \sum_j P\big(X_{j+T(x)}=x|T(x)<\infty\big) && \text{(36.95a)}\\
&= \sum_j P(X_j=x|X_0=x) && \text{(36.95b)}\\
&= \sum_j E\big(\mathbb{1}_{\{X_j=x\}}|X_0=x\big) && \text{(36.95c)}\\
&= E\big(\sum_j \mathbb{1}_{X_j=x}|X_0=x\big) && \text{(36.95d)}\\
&= E(N_x|X_0=x) && \text{(36.95e)}\\
&< \infty \qquad \text{parce que } x \text{ est transient.} && \text{(36.95f)}
\end{aligned}$$

L'équation (36.95b) provient de la proposition 36.26 et plus précisément de l'égalité entre les lois (36.82). Nous avons terminé la preuve dans le cas où $x$ est transient.

Nous passons maintenant au cas où $x$ est récurrent, c'est à dire $P(T(x) < \infty|X_0 = x) = 1$. Les variables aléatoires $T_i$ définies en (36.84) pour $i \geqslant 2$ sont indépendantes et identiquement distribuées et

$$\mathscr{L}\big(T_k(x)\big) \sim \mathscr{L}\big(T(X)|X_0=x\big). \tag{36.96}$$

La loi des grands nombres nous indique que

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{n} = \frac{T_1(x)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} T_k(x) &\xrightarrow{p.s.} E\big(T_2(x)\big) && \text{(36.97a)}\\
&= E\big(T(x)|X_0=x\big). && \text{(36.97b)}
\end{aligned}$$

**Remarque 36.29.**
La loi des grands nombres est encore vraie sans l'hypothèse de variables aléatoires dans $L^1$ pourvu qu'elles soient positives. Alors dans la conclusion de la loi nous devons accepter la possibilité que l'espérance soit infinie.

Nous posons pour $m \in \mathbb{N}$

$$n(m) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} \tag{36.98}$$

qui est le nombre de visites de $x$ avant l'instant $m$. Nous avons évidemment $n(m) \leqslant m$. Mais $S_n$ est l'instant de la $n$ième visite, par conséquent $S_{n(m)}$ est l'instant de la dernière visite avant le moment $m$. Pour tout $m$ nous avons les inégalités

$$S_{n(m)} \leqslant m < S_{n(m)+1}. \tag{36.99}$$

Nous divisons par $n(m)$ et nous effectuons la limite $m \to \infty$ :

$$\frac{S_n(m)}{n(m)} \leqslant \frac{m}{n(m)} \leqslant \frac{S_{n(m)}+1}{n(m)} \tag{36.100}$$

En ce qui concerne la limite de $n(m)$, nous utilisons la définition (36.98) :

$$n(m) \to \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} = \tag{36.101}$$

heur...

$$\lim_{m\to\infty} n(m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} \xrightarrow{p.s.} \infty \tag{36.102}$$

par la proposition (36.23). Plus précisément, la limite vaut $N_x$ qui vaut presque sûrement $\infty$ dans le cas où $x$ est récurrent. Par ailleurs la loi des grands nombres (36.97) nous enseigne en particulier que

$$\frac{S_{n(m)}}{n(m)} \xrightarrow{p.s.} E\big(T(x)|X_0 = x\big). \tag{36.103}$$

Le terme de droite dans (36.100) se traite de façon usuelle :

$$\frac{S_{n(m)+1}}{n(m)} = \frac{S_{n(m)+1}}{n(m)+1}\frac{n(m)+1}{n(m)}. \tag{36.104}$$

Le dernier facteur tend vers 1 et le tout a pour limite $E\big(T(x)|X_0 = x\big)$. Par conséquent nous avons

$$\frac{m}{n(m)} \xrightarrow{p.s.} E\big(T(x)|X_0 = x\big) \tag{36.105}$$

et

$$\frac{n(m)}{n} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} \to \frac{1}{E\big(T(x)|X_0 = x\big)} = \pi(x). \tag{36.106}$$

□

**Lemme 36.30.**
*Soit $(X_k)$ une chaîne de Markov dont l'espace des états est noté $E$. Pour chaque $x \in E$ nous notons*

$$T(x) = \inf\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_k = x\} \tag{36.107}$$

*et*

$$T_p(x) = \inf\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_{k+p} = x\} \tag{36.108}$$

*Alors nous avons*

$$P(T_p(x) = k|X_p = y) = P(T(x) = k|X_0 = y). \tag{36.109}$$

La proposition suivante nous permet de parler de chaîne de Markov **récurrence positive**.

**Proposition 36.31.**
*Soit $(x_n)$ une chaîne de Markov irréductible.*

*(1) Un état $x$ est transient si et seulement si tous les états sont transients.*

*(2) Un état est récurrent positif si et seulement si tous les états sont récurrents positifs.*

*Démonstration.* Nous rappelons (proposition 36.28) que si la chaîne est irréductible

$$\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_k=x]} \tag{36.110}$$

Notons aussi que

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k=x} = \begin{cases} 0 & \text{si } N < T(x) \\ \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x} & \text{si } N > T(x) \end{cases} \tag{36.111}$$

où dans la seconde ligne nous avons effectué le changement de variable de sommation $k' = k+T(x)$. Dans la limite (36.110) nous sommes toujours dans le cas où $N$ est assez grand. Nous pouvons donc écrire

$$\pi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x}. \tag{36.112}$$

Nous pouvons aussi écrire

$$\frac{1}{N-T(x)}\sum_{k=0}^{N-T(x)}\mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}}=\frac{N}{N-T(x)}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-T(x)}\mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}}. \tag{36.113}$$

Dans cette dernière égalité le membre de droite tend vers $\pi(x)$ et nous avons

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N-T(x)}\sum_{k=0}^{N-T(x)}\mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}}=\pi(x) \tag{36.114}$$

ou encore

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}}=\pi(x) \tag{36.115}$$

Étant donné que $\pi(x)$ est une constante nous avons évidemment $E(\pi(x))=\pi(x)$. Nous pouvons cependant considérer les variables aléatoires

$$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}} \tag{36.116}$$

et remarquer que $Z_n\xrightarrow{p.s.}\pi(x)$ avec $0\leqslant Z_n\leqslant 1$. Le théorème de la convergence dominée (13.134) nous permet d'inverser la limite et l'espérance et écrire

$$\pi(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\big(\mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}}\big) \tag{36.117a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P\big(X_{k+T(x)}=x\big). \tag{36.117b}$$

Par le lemme 36.30 nous avons

$$P(X_{k+T(x)}=x)=P(X_k=k|X_0=x) \tag{36.118}$$

et $\pi(x)$ prend la forme

$$\pi(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(X_k=x|X_0=x). \tag{36.119}$$

Soit maintenant un état $x$ positif récurrent et $y$, un autre état. Par définition 36.22 et par corollaire 36.25 nous avons $\pi(x)>0$. Nous devons prouver que $\pi(y)>0$.

Étant donné que la chaîne est irréductible il existe $r$ et $s$ tels que

$$\begin{cases} p^r(x,y)=P(X_r=y|X_0=x)>0 & \text{(36.120a)}\\ p^s(x,y)=P(X_s=x|X_0=y)>0 & \text{(36.120b)}\end{cases}$$

Nous reprenons l'équation (36.77) multipliée par $1/N$ :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(X_{r+s+n=y|X_0=y})\geqslant\underbrace{p^r(x,y)p^s(y,x)}_{\geqslant 0}\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(X_n=x|X_0=x)}_{\to\pi(x)} \tag{36.121}$$

et nous prenons la limite lorsque $N\to\infty$. À $r+s$ termes près, nous trouvons à gauche l'expression (36.119) de $\pi(y)$. Par conséquent

$$\pi(y)\geqslant\lim_{N\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{N}P(X_{r+s+n}=y|X_0=y)\geqslant\alpha\pi(x) \tag{36.122}$$

où $\alpha$ est une constante positive. Le nombre $\pi(x)$ étant strictement positif par hypothèse nous avons montré que $\pi(y)>0$, c'est à dire que $y$ est récurrent positif. □

## 36.5 Mesure invariante

**Définition 36.32.**
*Une mesure de probabilité $\mu$ sur l'espace des états $E$ d'une chaîne de Markov est* ***invariante*** *si pour tout $x \in E$*

$$\mu(x) = \sum_{y \in E} p(y, x)\mu(y). \tag{36.123}$$

**Remarque 36.33.**
Une mesure invariante est une mesure de probabilité et nous noterons par abus $\mu(x)$ pour $\mu(\{x\})$. Si $A \subset E$ nous avons

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(x). \tag{36.124}$$

**Remarque 36.34.**
Une loi invariante associée à une chaîne de Markov est une loi associée à la matrice de transition de la chaîne, mais pas à la loi de $X_0$. Par conséquent nous pouvons tester si $\mu$ est une mesure invariante pour une certaine chaîne de Markov $(X_k)$ en considérant la chaîne $(Y_k)$ avec $Y_k = X_k$ pour $k > 0$ et $Y_0$ arbitraire.

L'adjectif *invariant* provient du lemme suivant.

**Lemme 36.35.**
*Soit $(X_n)$ une chaîne de Markov telle que $X_0 \sim \mu$ où $\mu$ est une mesure invariante sur l'espace des états. Alors $X_k \sim \mu$ pour tout $k$.*

*Démonstration.* Par hypothèse, $P(X_0 = x) = \mu(x)$. Ensuite nous avons

$$P(X_1 = y) = \sum_{x \in E} P(X_1 = y | X_0 = x)P(X_0 = x) \tag{36.125a}$$

$$= \sum_{x} p(x, y)\mu(x) \tag{36.125b}$$

$$= \mu(y). \tag{36.125c}$$

Par conséquent $X_1$ suit également la loi $\mu$. Par récurrence tous les états suivent cette même loi. □

Si les états d'une chaîne de Markov ont comme loi une mesure invariante, alors nous disons que la chaîne est **stationnaire**.

**Remarque 36.36.**
Pour une chaîne de Markov stationnaire de loi invariante $\mu$ nous avons

$$\mu(x) = \sum_{y} p(y, x)\mu(y) \tag{36.126}$$

et si l'ensemble $E$ est fini cette équation signifie

$$\mu = Q\mu \tag{36.127}$$

où $Q$ est la matrice de transition de la chaîne de Markov.

**Théorème 36.37** (Théorème ergodique)**.**
*Une chaîne de Markov irréductible est positive récurrente si et seulement si elle accepte une mesure invariante. Cette mesure est invariante est alors unique et vérifie $\mu = Q\mu$ où $Q$ est la matrice de transition.*

*Démonstration.* Nous allons seulement prouver le théorème ergodique dans le cas où $E$ est fini. Soit $(X_n)$ une chaîne de Markov récurrente positive ; nous avons $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Nous allons montrer que $\pi$ est une mesure invariante.

Nous commençons par montrer que

$$\sum_{x\in E}\pi(x)=1. \tag{36.128}$$

Pour cela nous reprenons la propriété de chaîne irréductible pour écrire

$$\pi(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{1}_{X_k=x} \tag{36.129}$$

Étant donné que $E$ est fini nous pouvons sommer sur $x\in E$ et permuter la somme avec la limite :

$$\sum_{x\in E}\pi(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\underbrace{\sum_{x\in E}\mathbb{1}_{X_k=x}}_{=1}. \tag{36.130}$$

Nous nous retrouvons donc avec $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}N=1$. La fonction $\pi$ définit donc bien une mesure de probabilité sur $E$.

Nous montrons à présent que cette mesure est invariante, c'est à dire que

$$\pi(x)=\sum_{y\in E}p(y,x)\pi(y). \tag{36.131}$$

Pour cela nous utilisons encore le théorème de la convergence dominée pour permuter la limite et l'intégrale dans

$$\pi(x)=E(\pi(x))=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\underbrace{E\big(\mathbb{1}_{X_k=x}\big)}_{P(X_k=x)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}P(X_{k+1}=x). \tag{36.132}$$

La dernière égalité découle du fait que en divisant par $N$ et en faisant tendre $N$ vers l'infini, le fait d'enlever un terme à la somme ne change pas la valeur de la limite. Nous pouvons substituer dans (36.132) la valeur

$$P(X_{k+1}=x)=\sum_{y\in E}p(y,x)P(X_k=y). \tag{36.133}$$

Nous avons alors

$$\pi(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{y\in E}p(y,x)P(X_k=y) \tag{36.134a}$$

$$=\sum_{y\in E}p(y,x)\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}P(X_k=y) \tag{36.134b}$$

$$=\sum_{y\in E}p(y,x)\pi(y), \tag{36.134c}$$

ce qui signifie que $\pi$ est une mesure invariante. Notons que nous avons encore utilisé le fait que $E$ soit fini pour permuter avec la limite.

Il nous reste à montrer l'unicité de la mesure invariante sur la chaîne de Markov. Soit $\mu$ une mesure invariante pour la chaîne de Markov $(X_k)$. Comme indiqué dans la remarque 36.34 nous pouvons supposer que $X_0$ suit la loi $\mu$. Par le lemme 36.35 nous avons $P(X_k=x)=\mu(x)$ pour tout $k$. Par conséquent

$$\pi(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}P(X_k=x)=\mu(x). \tag{36.135}$$

□

**Théorème 36.38** (loi des grands nombres pour les chaîne de Markov)**.**
*Soit $(X_n)$ une chaîne de Markov irréductible acceptant une mesure invariante. Soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction dans $L^1(E,\mu)$. Alors nous avons*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(X_k) \xrightarrow{p.s.} \sum_{x\in E} f(x)\mu(x). \tag{36.136}$$

En ce qui concerne les notations, l'hypothèse $f \in L^1(E,\mu)$ signifie

$$\sum_{x\in E} |f(x)|\mu(x) = \int_E |f(x)|d\mu(x) < \infty. \tag{36.137}$$

*Démonstration.* Nous prouvons le théorème dans le cas où $E$ est fini. Si nous écrivons

$$f(X_k) = \sum_{y\in E} f(y)\mathbb{1}_{X_k=y}, \tag{36.138}$$

alors

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(X_k) = \sum_{y\in E} f(y)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{1}_{X_k=y}. \tag{36.139}$$

Étant donné que $E$ est fini nous pouvons permuter les sommes et prendre la limite $N \to \infty$ :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_k f(X_k) = \sum_{y\in E} f(y)\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{1}_{X_k=y} = \sum_{y\in E} f(y)\pi(y). \tag{36.140}$$

□

## 36.6 Convergence vers l'équilibre

Nous voudrions savoir sous quelles conditions la variable aléatoire $X_n$ converge en loi vers quelque chose lorsque $n \to \infty$. Une telle loi limite doit dépendre de la loi initiale[2] comme le montre l'exemple de la chaîne de Markov

$$1\circlearrowright A \xleftarrow{1/2} C \xrightarrow{1/2} B \circlearrowleft 1 \tag{36.141}$$

Si $X_0 = C$, alors la loi limite est

$$\frac{1}{2}(\delta_A + \delta_B). \tag{36.142}$$

Si par contre $X_0 = B$, la loi limite est $\delta_B$. Notons que la chaîne de Markov proposée ici est irréductible.

Notons qu'il n'y a pas toujours de lois limite comme le montre l'exemple

$$A \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} B \tag{36.143}$$

avec $X_0 = A$. La loi en est

$$X_k = \begin{cases} \delta_A & \text{si } k \text{ est pair} \\ \delta_B & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \tag{36.144}$$

**Lemme 36.39.**
*Si nous avons une loi limite*

$$P(X_n = x) \to l(x), \tag{36.145}$$

*et que la chaîne est irréductible, alors nous avons $l = \pi$.*

2. Lorsque la loi limite ne dépend pas de la loi initiale, nous disons que la chaîne de Markov est ergodique, nous y reviendrons.

*Démonstration.* D'après la proposition 36.28 nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(X_k = x) \to \pi(x). \tag{36.146}$$

Par le lemme 10.66 sur la moyenne de Cesaro et l'hypothèse (36.145), nous avons aussi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(X_k = x) \to l(x). \tag{36.147}$$

Du coup $\pi(x) = l(x)$. □

**Lemme 36.40** ([358])**.**
*Si $\pi$ est une loi stationnaire et si $x$ est un étant transient, alors $\pi(x) = 0$.*

Ce lemme (qui peut être prouvé rigoureusement) est principalement dû au fait que la chaîne de Markov ne visite un état transitoire qu'un nombre fini de fois par la proposition 36.23(1).

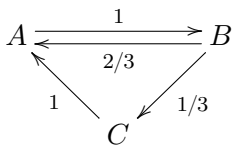
**Définition 36.41.**
*Un état $x \in E$ est* ***apériodique*** *si*

$$\text{pgcd}\{n \geqslant 1 \text{ tel que } p^n(x,x) > 0\} = 1. \tag{36.148}$$

Mettons que tous les $n$ tels que $p^n(x,x) > 0$ ont 2 comme diviseur. L'état n'est alors pas apériodique, mais on voit que si $X_0 = x$, alors les états impairs ne peuvent pas être sur $x$. Cela est une forme de périodicité.

Si un état est apériodique, il existe $p$ et $q$ premiers entre eux tels que $p^p(x,x)$ et $p^q(x,x)$ sont non nuls. En particulier pour tout $n \in p\mathbb{N} + q\mathbb{N}$, $P(X_n = x) \neq 0$. Par conséquent la proposition 3.34 nous indique qu'à partir d'un certain moment tous les $X_k$ pourraient être $x$.

L'état $C$ de la chaîne de Markov suivante est apériodique :




(36.149)

En effet $p^3(C,C) \neq 0$ par le chemin $C \to A \to B \to C$ tandis que $p^5(C,C) \neq 0$ également par le chemin $C \to A \to B \to A \to B \to C$. Or $\text{pgcd}\{3,5\} = 1$.

**Proposition 36.42** ([358])**.**
*Soit $(X_n)$, une chaîne de Markov irréductible. Un état $x$ est apériodique si et seulement s'il existe $N$ tel que*

$$p^k(x,x) = P(X_k = x | X_0 = x) > 0 \tag{36.150}$$

*pour tout $k \geqslant N$.*

La proposition suivante va nous permettre de parler de **chaîne apériodique** .

**Proposition 36.43.**
*Si une chaîne de Markov est irréductible, alors un état est apériodique si et seulement si tous les états sont apériodiques.*

*Démonstration.* Soit $x$ un état apériodique de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En vertu de la proposition 36.42 il existe $N_x$ tel que $p^k(x,x) \neq 0$ pour tout $k \geqslant N_x$. Soit $y \in E$. Étant donné que la chaîne est irréductible, il existe $r$ et $s$ tels que$p^r(x,y) > 0$ et $p^s(y,x) > 0$. Nous avons

$$p^{k+r+s}(y,y) = P(X_{k+r+s} = y | X_0 = y) \geqslant p^s(x,y)P(X_k = x | X_0 = x)p^r(y,x). \tag{36.151}$$

Si $k$ est assez grand, cette quantité est strictement positive. Donc il suffit de prendre $N_y = N_x + r + s$ pour savoir que $y$ est également apériodique. □

**Exemple 36.44**
Quelle est la différence entre une chaîne irréductible et une chaîne apériodique ? Une chaîne est irréductible lorsque aucune sous-chaîne ne peut piéger le système. Pour toute paire d'états $x, y \in E$, il existe un $n$ tel qu'il soit possible d'aller de $x$ à $y$ en $n$ pas. Une chaîne est apériodique lorsqu'après un temps suffisamment long, *tous* les états soient possibles en même temps.

Un exemple de chaîne irréductible non apériodique :

$$A \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} B \tag{36.152}$$

Cette chaîne est irréductible parce que le graphe est connexe, par contre il n'est pas apériodique parce que si $X_0 = A$ il n'est pas possible d'être dans l'état $A$ après un nombre impair de pas.

Plus formellement, $p^n(A, A) = 1$ dès que $n$ est pair ; le PGCD de la définition 36.41 n'est donc certainement pas 1. △

Si $E$ est fini et si la chaîne de Markov est irréductible, alors en posant $N = \max_{x\in E} N(x)$, la matrice $P^k$ a des éléments non nuls sur toute la diagonale pour tout $k > N$. Ces éléments diagonaux ne sont autre que les $p^k(x, x)$.

**Théorème 36.45** (Convergence en loi des chaîne de Markov)**.**
*Si $(X_n)$ est*

*(1) irréductible,*

*(2) récurrente positive,*

*(3) apériodique,*

*alors $X_n$ converge en loi vers l'unique probabilité invariante $\pi$ vérifiant*

$$\pi(x) = \sum_{u\in E} p(y, x)\pi(y) = \frac{1}{E\big(T(x)|X_0 = x\big)}. \tag{36.153}$$

*Cette convergence est indépendante de la loi de $X_0$ et on a*

$$P(X_n = x|X_0 = y) \to_{n\to\infty} \pi(x). \tag{36.154}$$

## 36.7 Processus de Galton-Watson

Nous considérons une maladie et notons $Z_n$ le nombre de malades à l'instant $n$. Nous posons $Z_0 = 1$ et

$$Z_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_n = 0 \\ \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)} & \text{sinon} \end{cases} \tag{36.155}$$

où $\xi_i^{(n)}$ est le nombre de personnes contaminées par le malade $i$ à l'instant $n$. Nous supposons que ces variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées et admettent un moment d'ordre 1.

L'équation de propagation 36.155 signifie que nous supposons qu'une personne malade à l'instant $n$ n'est plus malade à l'instant $n+1$. Par ailleurs les hypothèses d'indépendance signifient qu'à chaque instant, le nombre de personnes contaminées par le malade $i$ est indépendant du nombre de personnes contaminées par le malade $j$. De plus la façon dont la contamination se passe à l'instant $n$ est indépendant de la façon dont la contamination se passe à l'instant $m$. Ces hypothèses sont raisonnables tant que le nombre de personnes non contaminées est grand. À partir du moment où presque tout le monde est malade, l'approximation de Galton-Watson ne fonctionne plus.

Nous notons $\xi$ la loi parente des $\xi_i^{(n)}$. Ensuite nous considérons

$$G(s) = E(s^\xi) \tag{36.156a}$$

$$m = E(\xi) \tag{36.156b}$$

$$G_n(s) = E(s^{Z_n}). \tag{36.156c}$$

Par le théorème de transfert (proposition 34.60) avec $f(t) = s^t$. Ce que nous avons est

$$G_n(s) = E\big(f(Z_n)\big) = \int_{\mathbb{R}} s^x dP_{Z_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_n = k) \tag{36.157}$$

où l'intégrale s'est transformée en somme parce que la loi de $Z_n$ est discrète : $dP_{Z_n}$ est une somme de masses de Dirac. En particulier nous avons

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_n = k) \tag{36.158a}$$

$$G(0) = P(Z_n = 0) \tag{36.158b}$$

et

$$\eta = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} G_n(0). \tag{36.159}$$

D'où l'intérêt d'étudier $G_n$.

**Lemme 36.46.**
*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $s \in [0,1]$, nous avons*

$$G_n(s) = \underbrace{G \circ G \circ \ldots \circ G(s)}_{n \text{ fois}}. \tag{36.160}$$

*Démonstration.* Pour $n = 1$, nous avons $Z_1 = \xi_1^{(1)}$ et donc

$$G_1(s) = E(s^{\xi}) = G(s), \tag{36.161}$$

comme il se doit.

Si $n \neq 1$ nous écrivons

$$G_n(s) = E(s^{Z_n}) \tag{36.162a}$$

$$= E\left(s^{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i^{(n-1)}}\right) \tag{36.162b}$$

$$= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}} s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}}\right). \tag{36.162c}$$

À ce niveau, nous voulons permuter la somme et l'espérance. Étant donné que le lemme est facile à vérifier pour $s = 1$, nous supposons $s < 1$. Du coup

$$s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}} < 1 \tag{36.163}$$

et ce qui se trouve dans l'espérance est majoré par

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_{n-1}=k} = 1. \tag{36.164}$$

La fonction constante 1 est intégrable sur $\Omega$ (ici nous utilisons à fond le fait que l'espace $\Omega$ soit un espace de probabilité) et nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue 15.19 pour permuter la somme et l'intégrale. Nous continuons donc le calcul (36.162) :

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}} s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}}\right). \tag{36.165}$$

La tribu engendrée par la variable aléatoire $\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}}$ est une fonction des variable aléatoires $\xi_i^{(m)}$ avec $m \leqslant n-2$ tandis que la variable aléatoire $s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}}$ est une fonction des variable aléatoires

$\xi_i^{(n-1)}$. Par conséquent le lemme de regroupement 34.16 nous dit que ces variables aléatoires sont indépendantes, donc

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{E\big(\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}}\big)}_{=P(Z_{n-1}=k)} E\big(s^{\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{(n-1)}}\big). \tag{36.166}$$

Nous avons utilisé le fait que l'espérance d'une fonction indicatrice est la probabilité de l'événement.

En ce qui concerne la puissance de $s$, les événements $\xi_i^{n-1}$ sont indépendants et suivent tous la même loi $\xi$, donc

$$s^{\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{(n-1)}} = \prod_{i=1}^{k} s^{\xi_i^{(n-1)}} \tag{36.167}$$

et

$$E\big(\prod_{i=1}^{k} s^{\xi}\big) = E(s^{\xi})^k = G(s)^k. \tag{36.168}$$

En mettant tout bout à bout,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z_{n-1}=k)G(s)^j = G_{n-1}\big(G(s)\big). \tag{36.169}$$

□

**Théorème 36.47.**
*La probabilité d'extinction $\eta$ est donnée par*

$$\eta = P\left(\bigcup_{n\geqslant 1}(Z_n=0)\right) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n=0). \tag{36.170}$$

*Ce nombre est la plus petite solution positive de l'équation $G(s)=s$.*

*De plus la classification des cas est comme suit.*

*(1) Si $P(\xi=0)=0$ alors $\eta=0$.*

*(2) Si $P(\xi=0)\neq 0$ alors*

*(a) si $m\leqslant 1$ alors $\eta=1$,*

*(b) si $m>1$ alors $\eta\in\,]0,1[$.*

Le cas $m<1$ est dit **sous-critique**, le cas $m=1$ est dit **critique**. Le cas $m>1$ est dit **sur-critique**.

*Démonstration.* Commençons par prouver que $G$ est une fonction continue. En utilisant la théorème de transfert comme pour l'équation (36.157) nous trouvons que

$$G(s) = E(s^{\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \tag{36.171}$$

où nous avons noté $p_k = P(\xi=k)$. Si $r<1$, alors la suite $p_k r^k$ est bornée, donc le critère d'Abel (15.26) nous indique que la série (36.171) converge absolument et la théorie générale des séries entières conclut que la fonction $G$ est en particulier dérivable terme à terme pour tout $s\in\,]-1,1[$.

**Le probabilité d'extinction est un point fixe de $G$** En utilisant la continuité de $G$ en 0 nous passons à la limite dans $G_{n+1}(0)=G\big(G_n(0)\big)$ et nous obtenons

$$\eta = G(\eta), \tag{36.172}$$

ce qui signifie que la probabilité d'extinction est un point fixe de $G$.

**$\eta$ est le plus petit point fixe de $G$** Nous démontrons maintenant que $\eta$ est plus précisément le plus petit point fixe de $G$ sur $[0,1]$. Nous allons effectuer cette partie en décomposant selon les valeurs de $p_0$ et de $p_1$.

Au vu de l'écriture (36.171), si $p_1 = 1$ alors $G(s) = s$ pour tout $s \in [0,1]$. Mais dans ce cas nous savons par ailleurs que l'extinction est impossible. Zéro est bien la plus petite solution de $G(s) = s$.

Supposons maintenant que $p_1 < 1$ et $p_0 + p_1 = 1$. Alors $G(s) = p_0 + p_1 s$ et $s = 1$ est l'unique solution. Mais vu que nous savons que $\eta$ est solution, c'est que $\eta = 1$ et l'extinction est certaine.

Nous passons au cas général : $p_0 + p_1 < 1$. D'abord nous remarquons que $s = 1$ est solution parce que

$$G(1) = p_0 + p_1 + \cdots = 1. \tag{36.173}$$

Remarquons aussi que dans ce cas $s = 0$ n'est plus solution.

La fonction $G$ est strictement convexe sur $[0,1]$ (parce que $G'' > 0$). Cela se voir en effectuant deux dérivations termes à termes (le rayon de convergence de la dérivée est le même que celui de la fonction). Cette stricte convexité entraine que l'équation $G(s) = s$ a au maximum une autre solution que $s = 1$. Nous nommons $s_0$ la plus petite solution dans $[0,1]$. Étant donné que $G$ est croissante on a

$$G(0) \leqslant G(s_0) = s_0. \tag{36.174}$$

En appliquant $G$ à cette équation nous obtenons $G\big(G(s_0)\big) \leqslant G(s_0) = s_0$ et en appliquant $n$ fois,

$$G_n(0) \leqslant s_0. \tag{36.175}$$

En passant à la limite, $\eta \leqslant s_0$ mais $\eta$ étant solution, nous avons $\eta = s_0$. Nous avons donc prouvé que la probabilité d'extinction $\eta$ est la plus petite solution de $G(s) = s$.

**Classification des cas** Nous devons encore discuter les cas. Si $P(\xi = 0) = 0$, alors $p_0 = 0$ et $G(0) = 0$, ce qui signifie que $s_0 = \eta = 0$ et l'extinction est impossible.

Nous passons au cas $p_0 \neq 0$. Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $m = p_1 < 1$ et nous avions déjà vu que dans le cas $p_0 + p_1 = 1$, la probabilité d'extinction est $\eta = 1$.

Il nous reste à traiter le cas $p_0 + p_1 < 1$. Encore une fois, la courbe $G$ est strictement convexe sur $[0,1]$ et elle est en particulier plus grande que sa tangente en $s = 1$, c'est à dire

$$G(s) > G'(1)(s-1) + G(1). \tag{36.176}$$

Nous savons que $G(1) = 1$. En ce qui concerne $G'(1)$, nous dérivons encore terme à termes :

$$G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}, \tag{36.177}$$

donc

$$G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = E(\xi) = m. \tag{36.178}$$

Ce que nous avons donc est

$$G(s) > 1 + m(s-1). \tag{36.179}$$

Nous nous particularisons au cas sous-critique ($m \leqslant 1$). En nous rappelant que $s - 1 < 0$,

$$G(s) > 1 + (s-1) = s, \tag{36.180}$$

donc $s = 1$ est la plus petite solution et effectivement nous avons déjà vu que $\eta = 1$ dans ce cas.

Si $m > 1$, alors on a

$$G(s) > 1 + m(s-1). \tag{36.181}$$

Mais dire $m > 1$ revient à dire $G'(1) > 1$ et donc dans un voisinage de $s = 1$ on a

$$\frac{G(s) - G(1)}{s - 1} > 1, \tag{36.182}$$

ce qui implique que

$$G(s) < s - 1 + G(1) = s. \tag{36.183}$$

Nous avons donc $G(s) < s$ dans un voisinage de 1. Mais $G(0) - 0 = p_0 > 0$, donc la fonction $f(s) = G(s) - s$ est positive en 0 et négative proche de $s = 1$. Le théorème de la valeur intermédiaire nous indique alors qu'il existe un $s \in ]0, 1[$ tel que $f(s) = 0$, c'est à dire tel que $G(s) = s$.

□

# Chapitre 37

# Martingales

## 37.1 Convergence de martingales

**Définition 37.1.**
*Si $\mathcal{A}$ est une tribu, une **filtration** de $\mathcal{A}$ est une suite croissante de sous-tribus $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_{i+1} \subseteq \mathcal{A}$.*

*Nous disons qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)$ est **adaptée** à une filtration $(\mathcal{F}_n)$ si $X_i$ est $\mathcal{F}_i$-mesurable pour tout $i$.*

Ces définitions impliquent immédiatement que si $(X_n)$ est adapté à $(\mathcal{F}_n)$ alors $X_n$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable pour $k \geqslant n$.

**Définition 37.2.**
*Une **martingale** adaptée à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires $M_n \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que*

*(1) $M_n$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable,*

*(2) $E(M_{n+1}|\mathcal{B}_n) = M_n$.*

*Le processus $M_n$ est une **sur-martingale** si $E(M_{n+1}|\mathcal{B}_n) \leqslant M_n$, et c'est une **sous-martingale** si $E(M_n|\mathcal{B}_n) \geqslant M_n$.*

**Exemple 37.3**
Si $M \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et si $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration, nous pouvons considérer la martingale $M_n = E(M|\mathcal{B}_n)$. △

**Exemple 37.4**
Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées. On pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \tag{37.1}$$

et la filtration $\mathcal{B}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Pour montrer que cela est une martingale, nous commençons par remarquer que

$$E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = E(X_{n+1}) = 0 \tag{37.2}$$

par indépendance des tribus $\mathcal{B}_n$ et $\sigma(X_{n+1})$. Ici c'est le lemme 34.38 qui joue.

Ensuite nous argumentons que $E(X_1 + \cdots + X_n|\mathcal{B}_n) = X_1 + \cdots + X_n$. En effet d'une part $X_1 + \cdots + X_n$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable et évidemment la condition intégrale de l'espérance conditionnelle est satisfaite.

Plus généralement si $X$ est une variable aléatoire et si $\sigma(X) \subset \mathcal{B}$ alors $E(X|\mathcal{B}) = X$. △

**Lemme 37.5.**
*Soit $(M_n)$ une martingales adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et $n \geqslant k$. Alors*

$$E(M_n|\mathcal{F}_k) = M_k \tag{37.3a}$$

$$E(M_k|\mathcal{F}_n) = M_k. \tag{37.3b}$$

*Démonstration.* La seconde relation revient seulement à dire que $M_k$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, ce qui est évident parce que $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$.

Nous prouvons la première par récurrence (à l'envers) sur $k$. D'abord si $k = n$, l'égalité $E(M_n|\mathcal{F}_n) = M_n$. Nous supposons maintenant que $E(M_n|\mathcal{F}_k) = M_k$, et nous prouvons que $E(M_n|\mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1}$. Si $B_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}$, nous avons

$$\int_{B_{k-1}} M_{k-1} = \int_{B_{k-1}} M_k = \int_{B_{k-1}} M_n. \tag{37.4}$$

La première égalité est la définition d'une martingale, et la seconde est l'hypothèse de récurrence. □

**Théorème 37.6** ([359, 360])**.**
*Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale bornée dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire telle que*

$$\alpha = \sup_{n\geqslant 0} E(M_n^2) < \infty. \tag{37.5}$$

*Alors la suite $M_n$ converge dans $L^2(\Omega)$.*

*Démonstration.* Nous écrivons $M_n$ en somme télescopique

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \tag{37.6}$$

où $\Delta_k = M_k - M_{k-1}$. Nous commençons par monter que les incréments sont orthogonaux au sens où $E(\Delta_n\Delta_k) = 0$. Pour $n > k$, la variable aléatoire $E\big(\Delta_n\Delta_k|\mathcal{F}_{n-1}\big)$ est la variable aléatoire $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable telle que

$$\int_{B_{n-1}} E\big(\Delta_n\Delta_k|\mathcal{F}_{n-1}\big) = \int_{B_{n-1}} \Delta_n\Delta_k \tag{37.7}$$

pour tout $B_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$. En particulier avec $B_{n-1} = \Omega$ nous trouvons

$$E\Big(E\big(\Delta_n\Delta_k|\mathcal{F}_{n-1}\big)\Big) = E(\Delta_n\Delta_k) \tag{37.8}$$

par la définition de l'espérance (34.51). Par conséquent, en utilisant le lemme 37.5 nous avons[1]

$$E(\Delta_n\Delta_k) = E\Big(E(\Delta_n\Delta_k|\mathcal{F}_{n-1})\Big) = E\Big(\Delta_k E(\Delta_n|\mathcal{F}_{n-1})\Big) = 0 \tag{37.9}$$

parce que $E(\Delta_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) - E(M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$.

Utilisant l'orthogonalité des incréments, nous avons

$$E(M_n^2) = E(M_0^2) + \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k^2). \tag{37.10}$$

En prenant le supremum (par rapport à $n$ des deux côtés),

$$E(M_0^2) + \sum_{k=1}^{\infty} E(\Delta_k^2) = \alpha < \infty. \tag{37.11}$$

Cela prouve que la suite $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k$ converge dans $L^2(\Omega)$. Nous en déduisons immédiatement que $(M_n)$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ parce que si $k, l > n$, nous avons (en utilisant encore l'orthogonalité des incréments)

$$E\big(|M_k - M_l|^2\big) = \sum_{i=k+1}^{l} E(\Delta_i^2) \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} E(\Delta_i^2), \tag{37.12}$$

qui tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. □

1. À ce niveau je crois qu'il y a une faute dans [360] qui conditionne par rapport à $\mathcal{F}_n$.

Le théorème suivant complète la conclusion du théorème 37.6.

**Théorème 37.7** ([360])**.**
*Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale bornée dans $L^2$. Alors $(M_n)$ converge dans $L^2(\Omega)$ et presque sûrement vers une même variable aléatoire $M_\infty$ qui vérifie*

$$M_n = E(M_\infty|\mathcal{F}_n). \tag{37.13}$$

Notons en particulier que la variable aléatoire $M_\infty$ est presque sûrement finie parce qu'en vertu de (37.13) nous avons

$$\int_\Omega M_\infty = \int_\Omega M_n < \infty. \tag{37.14}$$

**Exemple 37.8**
Soient des variables aléatoires indépendantes $V_k \sim \mathscr{E}(2^n\lambda)$ et la variable aléatoire somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k. \tag{37.15}$$

Nous allons montrer que $S_n \xrightarrow{p.s.} X$ où $X$ est une variable aléatoire presque sûrement finie. Nous posons

$$M_n = S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\lambda} \tag{37.16}$$

Cela est une martingale adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(V_1, \dots, V_n)$ en vertu de l'exemple 37.4. Nous montrons à présent qu'elle est bornée dans $L^2(\Omega)$ au sens où $\sum_{n\geqslant 1} E(M_n^2) < \infty$. Nous avons

$$E(M_n^2) = E\left(\big[S_n - \sum_k \frac{1}{2^k\lambda}\big]^2\right) = E\left(\big[\sum_k (V_k - \frac{1}{2^k\lambda})\big]^2\right). \tag{37.17}$$

La variable aléatoire $V_k - 1/2^k\lambda$ est une variable aléatoire centrée de variance $1/(2^k\lambda)^2$ (voir proposition 34.97). Étant donné que $M_n$ est centrée, $\text{Var}(M_n) = E(M_n^2)$ et nous avons

$$E(M_n^2) = \sum_{k=1}^{n} \text{Var}\left(V_k - \frac{1}{2^k\lambda}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2^k\lambda)^2}, \tag{37.18}$$

cette dernière somme étant bornée par $l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k\lambda)^2}$, nous avons

$$E(M_n^2) \leqslant l \tag{37.19}$$

avec $l$ indépendant de $n$. C'est pour cela que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans $L^2(\Omega)$. Par le théorème 37.7 nous avons $M_n \to M_\infty$ et en faisant $n \to \infty$ dans

$$S_n = M_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\lambda}, \tag{37.20}$$

nous trouvons

$$S_n \to M_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k\lambda} = M_\infty + \frac{1}{\lambda} \tag{37.21}$$

qui est presque sûrement finie. △

## 37.2 Temps d'arrêt et martingale terminée

**Définition 37.9.**
*Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité filtré. Une application $T\colon \Omega \to \bar{\mathbb{N}}$ est un **temps d'arrêt** adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$.*

*Le temps d'arrêt $T$ est **borné** s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $T(\omega) \leqslant k$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.*

**Lemme 37.10.**
*Si $T$ est un temps d'arrêt presque sûrement fini, alors*[2]
— $T \wedge n \xrightarrow{p.s.} T$,
— $\lim_{n\to\infty} E(T \wedge n) = E(T)$.

*Démonstration.* Vu que $T$ est presque sûrement finie, il suffit de prouver que

$$(T \wedge n)(\omega) \to T(\omega) \tag{37.22}$$

pour tout $\omega$ tel que $T(\omega) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit donc $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) = k$ et $n > k$. Nous avons

$$(T \wedge n)(\omega) = T(\omega) \wedge n = k = T(\omega). \tag{37.23}$$

En ce qui concerne la seconde assertion, la suite de variables aléatoires $X_x = T \wedge n$ est croissante et positive, donc le théorème de la convergence monotone 13.129 montre que

$$\lim_{n\to\infty} E(T \wedge n) = E(T). \tag{37.24}$$

□

**Remarque 37.11.**
Notons la différence subtile entre $S_T(\omega)$ et $(S_T)(\omega)$. La première est la variable aléatoire

$$\omega' \mapsto S_{T(\omega')}(\omega) \tag{37.25}$$

et la seconde est le nombre $S_{T(\omega)}(\omega)$.

**Théorème 37.12** (Théorème d'arrêt borné[360])**.**
*Soit $(X_n)$ une sur-martingale et $S \leqslant T$, deux temps d'arrêts bornés. Alors*

*(1) les variables aléatoires $X_S$ et $X_T$ sont intégrables,*

*(2) $E(X_T|\sigma(S)) \leqslant X_S$ presque sûrement.*

*Si par contre $(X_n)$ est une martingale alors $X_S$ et $X_T$ sont bornées, et*

$$E(X_T|\sigma(S)) = X_S. \tag{37.26}$$

**Remarque 37.13.**
Un cas particulier intéressant de ce théorème 37.12 est le cas $S = 0$ qui est un temps d'arrêt vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$. Si $X$ est n'importe quelle variable aléatoire, la tribu engendrée $\sigma(X)$ est toujours indépendante de la tribu $\{\Omega, \varnothing\}$, donc le résultat $E(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$ donne

$$E(X_T) = X_0. \tag{37.27}$$

**Théorème 37.14** (Premier théorème d'arrêt de Doob[361])**.**
*Soit $(X_n)$ une martingale et $T$ un temps d'arrêt ; tous deux pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$. Nous supposons qu'une des trois propriétés suivantes soit vérifiée :*

*(1) $T$ est presque sûrement bornée.*

2. Dans [2], dans le problème de la ruine du joueur, la seconde assertion est avec une limite sup et non avec une limite normale.

*(2)* $E(T) < \infty$ *et il existe une constante* $c$ *telle que*

$$E\big(|X_{n+1} - X_n| \,|\mathcal{F}_n\big) \leqslant c \tag{37.28}$$

*sur l'événement* $\{T \geqslant n\}$.

*(3) Il existe une constante* $c$ *telle que* $|X_{T\wedge n}| \leqslant c$ *presque sûrement*[3].

*Alors* $X_T$ *est une variable aléatoire presque sûrement bien définie nous avons*

$$E(T_T) = E(X_0). \tag{37.29}$$

*Si* $(X_n)$ *est une sur-martingale, alors la conclusion est* $E(X_T) \leqslant E(X_0)$ *et si* $(X_n)$ *est une sous-martingale, la conclusion est* $E(X_T) \geqslant E(X_0)$.

**Remarque 37.15.**
Sous l'hypothèse (3), il est possible d'avoir $T = \infty$ sur un ensemble de mesure non nulle. Sur cet ensemble, la variable aléatoire $X_T$ doit être définie de façon plus fine.

**Problèmes et choses à faire**

D'après la page de discussion de l'article sur Wikipédia, il semblerait que la seconde condition soit mal énoncée. Je n'ai pas vérifié.

**Définition 37.16.**
*Nous disons que la martingale* $(M_n)_{n\geqslant 1}$ *est* ***terminée*** *s'il existe* $M \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *telle que* $E(M|\mathcal{A}_n) = M$ *pour tout* $n > 1$.

**Définition 37.17.**
*Un ensemble* $H \subset L^1(\Omega, \mu)$ *est* ***équi-intégrable*** *si*

$$\lim_{a\to\infty} \left( \sup_{f\in H} \int_{|f|>a} |f(x)| d\mu(x) \right) = 0. \tag{37.30}$$

Notons dans cette définition que vu que $f \in L^1$ nous avons toujours

$$\lim_{a\to\infty} \int_{|f|>a} |f(x)| d\mu(x) = 0. \tag{37.31}$$

L'équi-intégrabilité donne une sorte d'uniformité en $f$ de cette limite.

**Théorème 37.18.**
*Si* $(M_n)$ *est une martingale, nous avons équivalence entre*

*(1)* $(M_n)$ *converge dans* $L^1$ *;*

*(2)* $(M_n)$ *est terminée ;*

*(3) l'ensemble* $\{M_n\}_{n\geqslant 1}$ *est équi-intégrable.*

Attention : en vertu de la proposition 24.14 et surtout de l'exemple 24.15, la convergence $L^1$ n'implique pas la convergence presque partout.

**Théorème 37.19** (Théorème de Doob[159])**.**
*À propos de convergence de martingales.*

*(1) Toute martingale terminée converge presque sûrement et pour la norme* $L^1$.

*(2) Toute martingale bornée dans* $L^2$ *converge presque sûrement et pour la norme* $L^2$.

**Proposition 37.20** ([362])**.**
*Soit* $(M_n)$ *une martingale et* $T$ *un temps d'arrêt (pour la même filtration* $(\mathcal{B}_n)$*). Alors le processus* $V_n = M_{n\wedge T}$ *est une martingale.*

3. Il est d'usage assez classique de noter $a \wedge b$ le minimum de $a$ et $b$.

*Démonstration.* Nous décomposons $V_n$ de la façon suivante :

$$V_n = M_{n\wedge T} = M_n \mathbb{1}_{T\geqslant n} + M_T \mathbb{1}_{T<n} = M_n \mathbb{1}_{T\geqslant n} + \sum_{k<n} M_k \mathbb{1}_{T=k}. \tag{37.32}$$

Nous avons, grâce au lemme 13.3,

$$\{T \geqslant n\} = \complement\{T < n\} = \complement\{T \leqslant n-1\} \in \mathcal{B}_{n-1} \tag{37.33}$$

et, si $k \leqslant n$,

$$\{T = k\} = \underbrace{\{T \leqslant k\}}_{\in\mathcal{B}_k} \setminus \underbrace{\{T \leqslant k-1\}}_{\in\mathcal{B}_{k-1}} \in \mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}_n. \tag{37.34}$$

La forme (37.32) donne donc manifestement la $\mathcal{B}_n$-mesurabilité de $V_n$.

En ce qui concerne l'espérance nous devons calculer

$$E(V_{n+1}|\mathcal{B}_n) = E(M_{n+1}\mathbb{1}_{T\geqslant n+1}|\mathcal{B}_n) + \sum_{k<n+1} E(M_k \mathbb{1}_{T=k}|\mathcal{B}_n) \tag{37.35}$$

où nous avons utilisé la proposition 34.25. Étant donné que $\mathbb{1}_{T\geqslant n+1}$ et $\mathbb{1}_{T=k}$ sont des variables aléatoires $\mathcal{B}_n$-mesurables nous pouvons utiliser la proposition 34.41 pour les sortir :

$$E(V_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \mathbb{1}_{T\geqslant n+1} M_n + \sum_{k\leqslant n} \mathbb{1}_{T=k} M_k = M_{T\wedge n} = V_n. \tag{37.36}$$

Pour cela nous avons utilisé $E(M_{n+1}|\mathcal{B}_n) = M_n$ (parce que $(M_n)$ est une martingale) et $E(M_k|\mathcal{B}_n) = M_k$ parce que $M_k$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable. □

**Définition 37.21.**
*Si $(X_n)$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et si $T$ est un temps d'arrêt $\mathcal{F}_n$-mesurable alors le **processus arrêté** à l'instant $T$ est le processus $Y_n = X_{n\wedge T}$.*

Nous avons déjà vu par la proposition 37.20 que si $(X_n)$ est une martingale alors son processus arrêté est encore une martingale.

## 37.3 Décomposition de martingales

**Définition 37.22** (Processus croissant prévisible[360])**.**
*Un processus $X_n$ adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$ est un processus **croissant prévisible** si*

*(1)* $A_0 = 0$

*(2)* $A_n \leqslant A_{n+1}$ *; c'est cette condition qui correspond à «croissant»,*

*(3)* $A_{n+1}$ *est $\mathcal{F}_n$-mesurable ; c'est cette condition qui correspond à «prévisible».*

**Proposition 37.23** (Décomposition de Doob pour une sous-martingale[360])**.**
*Toute sous-martingale $(X_n)$ s'écrit de façon unique sous la forme*

$$X_n = M_n + A_n \tag{37.37}$$

*où $(M_n)$ est une martingale et $(A_n)$ est un processus croissant prévisible.*

*Démonstration.* Nous considérons le processus

$$\begin{cases} A_0 = 0 & \text{(37.38a)} \\ A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n). & \text{(37.38b)} \end{cases}$$

Nous vérifions que cela est un processus croissant prévisible. D'abord $E(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - E(X_n|\mathcal{F}_n)$. Le second terme est égal à $X_n$ parce que cette variable aléatoire est $\mathcal{F}_n$-mesurable tandis que $(X_n)$ étant une sous-martingale nous avons $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geqslant X_n$. Nous avons donc bien $A_{n+1} \geqslant A_n$ et le processus $(A_n)$ est croissant.

En ce qui concerne la prévisibilité nous devons prouver que $A_{n+1}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. D'une part $A_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et d'autre part par définition de l'espérance conditionnelle, la variable aléatoire $E(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n)$ est également $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Nous posons alors $M_n = X_n - A_n$ et nous devons prouver que cela est une martingale. Nous avons

$$E(M_{n+1}-M_n|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n) - E(A_{n+1}-A_n|\mathcal{F}_n). \tag{37.39}$$

Le second terme vaut

$$E(A_{n+1}-A_n|\mathcal{F}_n) = E\Big(E(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_n\Big) = E(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n) \tag{37.40}$$

par la proposition 34.36. Le processus $(M_n)$ est donc une martingale. La preuve de l'existence d'une décomposition (37.37) est achevée.

Nous passons maintenant à l'unicité en posant $X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$. Nous avons $A_0 = A'_0 = 0$ et $A'_n = X_n - M'_n$, donc

$$A'_{n+1} - A'_n = X_{n+1} - X_n + M'_{n+1} - M'_n = X_{n+1} - X_n - (M'_{n+1} - M'_n). \tag{37.41}$$

Nous appliquons $E(.|\mathcal{F}_n)$ des deux côtés de cette égalité :

$$\underbrace{E(A'_{n+1}-A'_n|\mathcal{F}_n)}_{=A'_{n+1}-A'_n} = E(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n) - \underbrace{E(M'_{n+1}-M'_n|\mathcal{F}_n)}_{=0}. \tag{37.42}$$

Nous avons utilisé le que que $(M_n)$ étant une martingale, $E(M_{n+1}-M_n\mathcal{F}_n) = 0$, et idem avec $(M'_n)$. Donc

$$A'_{n+1} - A'_n = E(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n) = E(M_{n+1}-M_n|\mathcal{F}_n) + E(A_{n+1}-A_n|\mathcal{F}_n) = A_{n+1}-A_n. \tag{37.43}$$

Nous avons donc montré que $A_{n+1}-A_n = A'_{n+1}-A'_n$ et donc que $A_n = A'_n$ pour tout $n$. Nous en déduisons immédiatement que $M_n = M'_n$ pour tout $n$ et l'unicité de la décomposition. □

**Lemme 37.24.**
*Si $(X_n)$ est une martingale de carré intégrable adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ alors*

*(1) Le processus $(X_n^2)$ est une sous-martingale.*

*(2) Si $X_n^2 = M_n + A_n$ est la décomposition de Doob, alors*

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \Big(E(X_i^2|\mathcal{A}_{i-1}) - X_{i-1}^2\Big) = \sum_{i=1}^{n} E\Big((X_i - X_{i-1})^2|\mathcal{A}_{i-1}\Big). \tag{37.44}$$

*Démonstration.* Pour la première assertion, nous utilisons l'inégalité de Jensen 34.52 :

$$E(X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) \geqslant \big(E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})\big)^2 = X_n^2 \tag{37.45}$$

parce que $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_n$ du fait que $(X_n)$ soit une martingale.

En ce qui concerne la seconde assertion, nous nous souvenons que le processus prévisible de la décomposition de Doob d'une sous-martingale est donné par la récurrence (37.38) que nous recopions ici :

$$\begin{cases} A_0 = 0 & \text{(37.46a)} \\ A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1}^2 - X_n^2|\mathcal{F}_n) & \text{(37.46b)} \end{cases}$$

Vu que $X_n^2$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, il peut sortir de l'espérance :

$$A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - X_n^2 \tag{37.47}$$

et donc

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \Big(E(X_i^2|\mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}^2\Big). \tag{37.48}$$

Pour obtenir la dernière partie de (37.44) nous travaillons un peu :

$$E\big((X_i - X_{i-1})^2|\mathcal{F}_{i-1}\big) = E\big(X_i^2 + X_{i-1}^2 - 2X_iX_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1}\big) \tag{37.49a}$$
$$= E(X_i^2|\mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 - 2E(X_iX_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1}) \tag{37.49b}$$
$$= E(X_i^2|\mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 - 2X_{i-1}E(X_i|\mathcal{F}_{i-1}) \tag{37.49c}$$
$$= E(X_i^2|\mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 - 2X_{i-1}X_i \tag{37.49d}$$

où nous avons utilisé la proposition 34.41 pour obtenir (37.49c). □

## 37.4 Problème de la ruine du joueur

Nous considérons un joueur compulsif qui joue à un jeu très simple[4] : il joue à pile ou face contre la banque avec une pièce truquée. Si pile sort, la banque donne 1 au joueur et si c'est face, c'est le joueur qui donne 1 à la banque. Nous nommons $a$ la fortune initiale du joueur, $b$ celle de la banque et $p$ la probabilité d'obtenir pile.

Nous supposons que le jeu se poursuit jusqu'à la ruine du joueur ou de la banque. La modélisation est comme suit : nous considérons $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi

$$Y_n \sim p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}. \tag{37.50}$$

C'est le résultat financier pour le joueur du $n^{\text{e}}$ lancé. La fortune du joueur au bout de $n$ lancés est la variable aléatoire

$$S_n = a + \sum_{j=1}^{n} Y_j. \tag{37.51}$$

Nous notons $Y_0 = a$.

Nous considérons la filtration

$$\mathcal{A}_n = \sigma\big(S_i \text{ tel que } 0 \leqslant i \leqslant n\big) = \sigma\big(Y_i \text{ tel que } 0 \leqslant i \leqslant n\big), \tag{37.52}$$

et le temps d'arrêt du jeu :

$$T = \inf\{n \geqslant 1 \text{ tel que } S_n \in \{0, a+b\}\}; \tag{37.53}$$

c'est le temps qu'il faut pour que tout l'argent appartienne soit au joueur soit à la banque.

Nous voulons étudier les paramètres suivants :

(1) $\rho = P(S_T = a+b)$, c'est à dire la probabilité que ce soit le joueur qui gagne contre la banque.

(2) $P(T < \infty)$, c'est à dire la probabilité que le jeu se finisse.

(3) $E(T)$, la durée moyenne du jeu.

**Lemme 37.25.**
*Le processus $S_n$ du problème de la ruine du joueur est vérifie*

$$E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} + p - q. \tag{37.54}$$

*De plus le processus $S_n$ est*

*(1) une martingale si $p = q = \frac{1}{2}$,*

*(2) une sous-martingale si $p > q$.*

4. Le gros des choses dites à propos de la ruine du joueur provient de [2].

*Démonstration.* Pour $n \geqslant 1$ nous avons

$$E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) = a + \sum_{j=1}^{n} E(Y_j|\mathcal{A}_{n-1}) = a + \sum_{j=1}^{n-1} E(Y_j|\mathcal{A}_{n-1}) + E(Y_n|\mathcal{A}_{n-1}). \tag{37.55}$$

Si $j \leqslant n-1$ alors $Y_j \in m(\mathcal{A}_{n-1})$. Mais nous savons que si $X$ est $\mathcal{F}$-mesurable, alors $E(X|\mathcal{F}) = X$ (c'est la définition de l'espérance conditionnelle), donc $\sum_{j=1}^{n-1} E(Y_j|\mathcal{A}_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j$.

En ce qui concerne le terme $j = n$ nous utilisons le fait que $\sigma(Y_n)$ soit une tribu indépendante de $\mathcal{A}_{n-1}$ ; nous avons donc au final pour tout $j$ que $E(Y_j|\mathcal{A}_{n-1}E(Y_j) = p - q$. Nous avons donc

$$E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} + p - q. \tag{37.56}$$

Si $p = q = \frac{1}{2}$ alors c'est une martingale, et si $p > q$ c'est une sous-martingale. □

**Lemme 37.26.**
*La variable aléatoire $T$ est un temps d'arrêt.*

*Démonstration.* Par définition $T = \inf\{n \geqslant 1 \text{ tel que } S_n \in \{0, a+b\}\}$. Vu que les variables aléatoires $S_i$ avec $i \leqslant n$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables, les ensembles $\big\{S_k \notin \{0, a+b\}\big\}$ avec $k \leqslant n$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables. Donc les ensembles

$$\{T = n\} = \bigcap_{k \leqslant n} \big\{S_k \notin \{0, a+b\}\big\} \cap \big\{S_n \in \{0, a+b\}\big\} \tag{37.57}$$

sont $\mathcal{F}_n$-mesurables. Nous en concluons que l'ensemble $\{T \leqslant n\}$ est également mesurable. □

### 37.4.1 Le cas où la pièce est truquée

Nous supposons être dans le cas $p > q$.

#### 37.4.1.1 Introduction d'une martingale

Considérons le processus

$$\begin{cases} A_0 = 0 & \text{(37.58a)} \\ A_n = A_{n-1} + E(S_n - S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}). & \text{(37.58b)} \end{cases}$$

Vu que $E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} + p - q$ (lemme 37.25) et que $E(S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1}$ (parce que $S_{n-1}$ est dans la tribu de $\mathcal{A}_{n-1}$), nous avons $A_n = A_{n-1} + (p - q)$ et donc

$$A_n = n(p - q). \tag{37.59}$$

Ce processus $(A_n)$ est croissant et prévisible. Nous introduisons le processus

$$M_n = S_n - A_n \tag{37.60}$$

et nous montrons que c'est une martingale[5]. Nous conditionnons la définition (37.60) par rapport à $\mathcal{A}_{n-1}$ :

$$\begin{aligned} E(M_n\mathcal{A}_{n-1}) &= E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) - \underbrace{E(A_n|\mathcal{A}_{n-1})}_{=A_n} && \text{(37.61a)} \\ &= A_n - A_{n-1} + E(S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) - A_n && \text{(37.61b)} \\ &= E(S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) - A_{n-1}. && \text{(37.61c)} \end{aligned}$$

Mais $S_{n-1}$ est $\mathcal{A}_{n-1}$-mesurable, donc $E(S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1}$ et

$$E(M_n|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}, \tag{37.62}$$

ce qui signifie que $(M_n)$ est une martingale.

5. Ceci est un peu le contraire de la décomposition de Doob.

#### 37.4.1.2 Finitude du temps d'arrêt

Nous montrons maintenant, en étudiant $M_{T\wedge n}$ que $T$ est intégrable et nous prouvons que $P(T=\infty)=0$.

Nous voulons maintenant étudier la variable aléatoire $M_{T\wedge n}$ où nous rappelons que le lemme 37.26 nous indique que $T$ est un temps d'arrêt. Le temps d'arrêt $T\wedge n$ est borné (par $n$ évidemment) et nous pouvons donc lui appliquer le théorème d'arrêt 37.14 pour dire que

$$E(M_{T\wedge n})=E(M_0). \tag{37.63}$$

Le membre de droite est simple parce que $M_0=S_0-A_0=S_0=a$ parce que c'est l'argent de départ du joueur. Pour l'autre :

$$E(M_{T\wedge n})=E(S_{T\wedge n})-E(A_{T\wedge n}). \tag{37.64}$$

D'une part, $E(A_{T\wedge n})=E\big((T\wedge n)(p-q)\big)$ et d'autre part, $E(S_{T\wedge n})\leqslant a+b$ parce que $S_T$ vaut zéro ou $a+b$ (avec des probabilités encore inconnues[6]). En combinant avec ce qui était dit juste au dessus et remarquant que $(p-q)E(T\wedge n)\geqslant 0$ nous pouvons écrire

$$0\leqslant (p-q)E(T\wedge n)\leqslant b. \tag{37.65}$$

La suite de variables aléatoires $T\wedge n$ est donc croissante, positive et intégrable[7] et donc nous avons du travail pour le théorème de la convergence monotone 13.129. La variable aléatoire $T$ est alors mesurable et

$$\lim_{n\to\infty} E(T\wedge n)=E(T). \tag{37.66}$$

Notons que nous n'avons pas encore prouvé que $E(T)<\infty$, mais en passant à la limite dans (37.65) nous écrivons

$$0\leqslant (p-q)E(T)\leqslant b. \tag{37.67}$$

Maintenant nous avons prouvé que $T$ est intégrable et même $L^1$. Par conséquent

$$P(T=\infty)=0. \tag{37.68}$$

Le jeu se termine donc presque certainement après un temps fini.

#### 37.4.1.3 Temps moyen de jeu

Le lemme 37.10 nous indique que $S_{T\wedge n}\xrightarrow{p.s.}S_T$.

Nous avons les bornes $0\leqslant S_{T\wedge n}\leqslant a+b$ et comme $a+b$ est intégrable, $S_{T\wedge n}$ l'est aussi et nous pouvons parler de $E(S_{T\wedge n})$. Repartons de (37.64) :

$$a=E(M_0)=E(M_{T\wedge n})=E(S_{T\wedge n})-E(A_{T\wedge n})=E(S_{T\wedge n})-(p-q)E(T\wedge n). \tag{37.69}$$

La variable aléatoire $S_{T\wedge n}$ est majorée par $a+b$ indépendamment de $n$ ; donc le théorème de la convergence dominée 13.134 donne $\lim_{n\to\infty}E(S_{T\wedge n})=E(S_T)$. En ce qui concerne le second terme, la convergence dominée ne fonctionne pas parce que $T\wedge n$ n'est pas a priori majoré par quelque chose d'indépendant de $n$, mais le théorème de la convergence monotone donne $\lim_{n\to\infty}E(T\wedge n)=E(T)$. Au final en passant à la limite dans (37.69) nous avons

$$a=E(S_T)-(p-q)E(T). \tag{37.70}$$

Étant donné que $T>0$ et $p-q>0$ nous pouvons récrire cela sous la forme

$$0\leqslant (p-q)E(T)=E(S_T)-a. \tag{37.71}$$

6. Mais on y travaille.

7. Je rappelle que les constantes sont des fonctions intégrables sur $\Omega$. Oui, je sais, quand on est habitué à faire de l'analyse sur $\mathbb{R}^n$ c'est un truc qu'on perd toujours un peu de vue.

Par définition de $T$ nous avons aussi

$$E(S_T) = (a+b)P(S_T = a+b) + 0 \cdot P(S_T = 0) = \rho(a+b). \tag{37.72}$$

Nous déduisons

$$E(T) = \frac{(a+b)\rho - a}{p-q}. \tag{37.73}$$

Ne crions pas victoire trop vite : nous n'avons pas encore d'expression de $\rho = P(S_T = a+b)$. Le temps moyen de jeu n'est donc pas encore tout à fait connu.

#### 37.4.1.4 Probabilité de victoire du joueur

Nous avons besoin d'exprimer $\rho$ en termes de $a$, $b$ et $p$. Pour cela nous introduisons la variable aléatoire [8]

$$U_n = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n}. \tag{37.74}$$

Nous commençons par prouver que c'est une martingale en calculant

$$E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}|\mathcal{A}_{n-1}\right) \tag{37.75}$$

Nous utilisons la proposition 34.41. Dans notre cas, $S_{n-1}$ et $Y_n$ sont des variables aléatoires $\mathcal{A}_n$-mesurables ; la variable aléatoire $Y_n$ est même $\mathcal{A}_{n-1}$-mesurable et sort donc du conditionnement ; nous avons donc

$$E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\right) \tag{37.76}$$

Nous allons utiliser le théorème de transfert 34.60 :

$$E(s^{Y_n}) = \int_\Omega s^{Y_n(\omega)} DP(\omega) = \int_{Y_n=1} s dP(\omega) + \int_{Y_n=-1} \frac{1}{s} dP(\omega). \tag{37.77}$$

Mais nous savons que $P(Y_n = 1) = p$ et $P(Y_n = -1) = 1 - p = q$, donc

$$E(s^{Y_n}) = ps + \frac{1-p}{s} \tag{37.78}$$

et

$$E\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n}\right) = p + q = 1. \tag{37.79}$$

Donc

$$E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n-1} = U_{n-1}, \tag{37.80}$$

ce qui prouve que $(U_n)$ est une martingale.

Par définition nous avons toujours $S_n \geqslant 0$ tant que $n \leqslant T$ [9], donc $U_{T\wedge n} \in [0,1]$. Il est donc évident que si $a \geqslant 1$ nous avons

$$\int_{|U_{T\wedge n}|>a} |U_{T\wedge n}| dP = 0 \tag{37.81}$$

parce que le domaine d'intégration est vide. Donc les variables aléatoires $V_n = U_{T\wedge n}$ sont équi-intégrables [10] et le théorème 37.18 montre que la martingale $(V_n)$ est terminée ; par ricochet [11] le théorème de Doob 37.19 montre qu'il existe une variable aléatoire $X$ telle que $V_n \xrightarrow{p.s.} X$. Nous

8. Nous dirons un mot sur ce choix dans le «petit complément» plus bas
9. Pour $n > T$ le jeu est terminé, donc on ne se pose pas la question.
10. Définition 37.17.
11. Nous rappellons que la convergence $L^1$ n'implique pas la convergence presque partout.

allons prouver que $X = U_T$ presque partout. Nous savions déjà (voir l'équation (37.22) et ses alentours) que

$$S_{n\wedge T} \xrightarrow{p.s.} S_T. \tag{37.82}$$

Nous avons alors (au sens du presque sûrement) :

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} U_{T\wedge n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{T\wedge n}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_T} = U_T. \tag{37.83}$$

Donc par unicité de la limite presque partout nous avons $X = U_T$ presque partout. Par le théorème de transfert 34.60 nous évaluons

$$E(U_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^0 P(S_T = 0) + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} P(S_T = a+b) = (1-\rho) + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} \rho. \tag{37.84}$$

La remarque 37.13 nous permet de dire que

$$E(U_{T\wedge n}) = U_0. \tag{37.85}$$

Mais par définition

$$U_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_0} = \left(\frac{q}{p}\right)^a, \tag{37.86}$$

donc nous avons

$$E(U_{T\wedge n}) = \left(\frac{q}{p}\right)^a. \tag{37.87}$$

Nous voudrions passer à la limite $n \to \infty$ dans cette équation. Pour permuter la limite et l'espérance, il faut utiliser le théorème de la convergence dominée 13.134. Vu que nous avons choisi $q > p$, nous avons $q/p > 1$ et donc $U_{T\wedge n} \leqslant (q/p)^{a+b}$, ce qui montre que la fonction $\omega \mapsto (U_{T\wedge n})(\omega)$ est majorée par une constante (qui est une fonction intégrable). Nous pouvons donc permuter la limite et l'espérance :

$$\lim_{n\to\infty} E(U_{T\wedge n}) = E\big(\lim_{n\to\infty} U_{T\wedge n}\big). \tag{37.88}$$

Mais nous avion déjà montré que $U_{T\wedge n} \xrightarrow{p.s.} U_T$. Donc

$$E(U_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^a. \tag{37.89}$$

En égalisant avec l'expression (37.84) de $E(U_T)$ nous trouvons

$$\rho = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} \tag{37.90}$$

et ensuite nous trouvons $E(T)$ en remettant ce $\rho$ dans l'expression (37.73) donnée plus haut.

### 37.4.2 Le cas où la pièce est non truquée

Maintenant $p = q = 1/2$.

#### 37.4.2.1 Probabilité de gagner

Le lemme 37.25 nous indique alors que $(S_n)$ est une martingale et le lemme 37.24 nous permet de dire que $(S_n^2)$ est alors une sous-martingale. Le processus croissant prévisible de $(S_n^2)$ est donné par (37.38) qui en adaptant les notations est

$$\begin{cases} B_0 = 0 & \text{(37.91a)} \\ B_n = B_{n-1} + E\Big((S_n - S_{n-1})^2 | \mathcal{A}_{n-1}\Big). & \text{(37.91b)} \end{cases}$$

Nous avons toujours $S_n - S_{n-1} = \pm 1$ parce que soit le joueur gagne soit le joueur perd, mais de toutes façons sa fortune varie de 1 à chaque étape du jeu. Donc (37.91b) nous donne $B_n = B_{n-1} + 1$ et

$$B_n = n. \tag{37.92}$$

Cela nous dit que la variable aléatoire

$$S_n^2 - B_n = S_n^2 - n \tag{37.93}$$

est une martingale (une sur-martingale moins son processus prévisible croissant). Nous lui appliquons le théorème d'arrêt 37.12 avec les temps d'arrêt 0 et $T \wedge n$ :

$$E(S_{T\wedge n}^2 - T \wedge n | \mathcal{F}_0) = S_0^2 - 0 \tag{37.94}$$

où $\mathcal{F}_0$ est la tribu engendrée par la variable aléatoire 0, c'est à dire $\{\Omega, \varnothing\}$. Cette tribu est indépendante de toute autre tribu et nous pouvons donc supprimer le conditionnement dans (37.94). Nous avons aussi $S_0 = a$ par définition. Avec tout ça nous avons la majoration

$$E(T \wedge n) = E(S_{T\wedge n}^2) - a^2 \leqslant (a+b)^2 - a^2 \tag{37.95}$$

parce que $S_k$ est toujours positif et entre 0 et $a + b$. En utilisant le lemme 37.10 et en passant à la limite,

$$E(T) \leqslant (a+b)^2 - a^2. \tag{37.96}$$

En particulier, $T \in L^1(\Omega)$ et $P(T < \infty) = 1$.

En suivant exactement les mêmes étapes que dans le lemme 37.1037.10 nous avons aussi

$$\lim_{n\to\infty} S_{T\wedge n} = S_T \tag{37.97}$$

presque partout. De plus nous savons que

$$0 \leqslant S_{T\wedge n}^2 \leqslant (a+b)^2, \tag{37.98}$$

et nous pouvons donc utiliser le théorème de la convergence dominée 13.134 pour dire que

$$\lim_{n\to\infty} E(S_{T\wedge n}^2) = E(S_T^2). \tag{37.99}$$

Nous montrons à présent que $S_{T\wedge n} \xrightarrow{L^2} S_T$. Pour cela nous devons évaluer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |S_{T\wedge n} - S_T|^2. \tag{37.100}$$

La fonction $|S_{T\wedge n} - S_T|^2$ est majorée par $(a+b)^2$ et nous pouvons à nouveau appliquer la convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} E(|S_{T\wedge n} - S_T|^2) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |S_{T(\omega)\wedge n}(\omega) - S_{T(\omega)}(\omega)|^2 dP(\omega) = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |S_{T\wedge n} - S_T|^2 = 0. \tag{37.101}$$

La même chose en n'écrivant pas les carrés montre que l'on a aussi $S_{T\wedge n} \xrightarrow{L^1} S_T$.

Il n'y a pas que $n \mapsto S_n^2 - n$ qui est une martingale. Il y a aussi $(S_n)$ lui-même (lemme 37.25). Nous pouvons lui appliquer le théorème d'arrêt 37.12 pour les temps d'arrêts $T \wedge n$ et 0 :

$$E(S_{T\wedge n}) = E(S_0) = a. \tag{37.102}$$

En passant à la limite, $E(S_T) = a$. L'espérance $E(S_T)$ peut par ailleurs être calculée comme

$$E(S_T) = 0 \cdot P(S_T = 0) + (a+b)P(S_T = a+b). \tag{37.103}$$

En égalisant les valeurs (37.102) et (37.103) de $E(S_T)$ nous trouvons

$$\rho = \frac{a}{a+b}. \tag{37.104}$$

Cette formule est assez logique : la probabilité que le joueur gagne est égale à la proportion d'argent en jeu qu'il a amené.

#### 37.4.2.2 Temps moyen de jeu

Nous calculons maintenant l'espérance $E(T)$ du temps de jeu (sans compter les pauses ni les jours de fermeture du casino [12]).

Nous recopions la première égalité de (37.95) sous la forme

$$a^2 = E(S_{T\wedge n}^2 - T \wedge n) \tag{37.105}$$

et nous passons à la limite [13] en sachant que $E(S_T^2) = \rho(a+b)^2$ :

$$a^2 = \rho(a+b)^2 - E(T). \tag{37.106}$$

En reprenant la valeur (37.104) de $\rho$,

$$E(T) = ab. \tag{37.107}$$

Et là, on voit que si le joueur amène 1000 euros contre une banque qui en a un million, et si ils jouent toutes les secondes , on en a pour 32 ans de jeu en moyenne.

Voila. C'est fini pour la ruine du joueur.

### 37.4.3 Un petit complément

Nous avons introduit lors de l'équation (37.74) la variable aléatoire $U_n = (p/q)^{S_n}$. Sans aller jusqu'à motiver complètement ce choix, nous nous proposons maintenant de voir que parmi les variables aléatoires $U_n = s^{S_n}$, le choix $s = p/q$ est le seul qui donne une martingale.

Soit donc $U_n = s^{S_n}$ et exprimons le fait que ce soit une martingale. Nous avons

$$E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = E(s^{S_{n-1}}s^{Y_n}|\mathcal{A}_{n-1}) \tag{37.108a}$$
$$= s^{S_{n-1}}E(s^{Y_n|\mathcal{A}_{n-1}}) \tag{37.108b}$$
$$= s^{S_{n-1}}E(s^{Y_n}). \tag{37.108c}$$

Le passage à (37.108b) se justifie en disant que $s^{S_{n-1}}$ est une variable aléatoire bornée et $\mathcal{A}_{n-1}$-mesurable, et en invoquant proposition 34.41. La variable aléatoire $Y_n$ vaut 1 avec probabilité $p$ et $-1$ avec probabilité $q$ ; donc l'espérance est vite vue :

$$E(s^{Y_n}) = ps + q\frac{1}{s} \tag{37.109}$$

et nous avons

$$E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = \left(ps + q\frac{1}{s}\right)s^{S_{n-1}} = (ps + \frac{q}{s})U_{n-1}. \tag{37.110}$$

Pour que $(U_n)$ soit une martingale il faut (et il suffit) que

$$ps + \frac{q}{s} = 1. \tag{37.111}$$

Les solutions de cette équation sont $s \in \{1, \frac{p}{q}\}$. C'est évidemment $s = p/q$ qui donne une martingale non triviale. Attention pour être complet, il faut se demander ce qu'il se passe si $s = 0$ séparément parce que manifestement l'équation (37.111) ne traite pas ce cas. Encore une fois, en repartant du début, $s = 0$ ne se révèle pas être une martingale très excitante.

Bref, nous devons poser

$$U_n = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n} \tag{37.112}$$

pour avoir une martingale.

12. Le joueur est un *vrai* joueur compulsif.

13. Comme il est dit dans La Grande Illusion, à quoi sert un $n$ ? À passer à la limite.

# Chapitre 38

# Processus de Poisson

## 38.1 Processus de Poisson

**Définition 38.1.**
*Une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est une **processus de Poisson** d'intensité $\lambda$ s'il existe une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ telles que*

$$N_t = \sup\{n \geqslant 0 \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} T_k \leqslant t\}. \tag{38.1}$$

Si nous posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, alors nous avons une expression plus pratique pour $N_t$ :

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n\leqslant t\}}. \tag{38.2}$$

Nous avons par la proposition 34.103 vu que $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.

Pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ est une fonction (pas du tout strictement) croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. Cette fonction part de 0 et fait un saut de taille 1 après des intervalles de temps $T_1(\infty)$, $T_2(\omega)$, etc. Elle est continue à droite.

Nous avons les égalités d'événements suivantes qui sont pratiques :

$$\{s < S_n \leqslant t\} = \{N_t \geqslant n > N_s\} \tag{38.3a}$$
$$\{N_t = n\} = \{S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}\}. \tag{38.3b}$$

**Théorème 38.2.**
*Les variables aléatoires $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda$ si et seulement si elles vérifient les trois propriétés suivantes.*

**Accroissements indépendants** *Pour tout choix $0 < t_0 < t_1 < \dots t_n$, les variables aléatoires $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ sont indépendantes.*

**Accroissements stationnaires** *Si $0 < s < t$ et $h > 0$ alors*

$$N_{t+h} - N_{s+h} \overset{\mathcal{L}}{=} N_t - N_s, \tag{38.4}$$

*c'est à dire que les accroissements décalés suivent les mêmes lois.*

**Poisson** *Pour tout $t$ nous avons $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.*

Une conséquence des accroissements stationnaires est que $N_t - N_s \overset{\mathcal{L}}{=} N_{t-s} - N_0 = N_{t-s}$ parce que $N_0 = 0$.

**Proposition 38.3.**
*Si $(N_t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda$, alors*

$$\lim_{t\to\infty} N_t = +\infty \tag{38.5}$$

*presque sûrement. De plus*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \tag{38.6}$$

*presque sûrement.*

La relation (38.6) est appelée **loi des grands nombres**.

*Démonstration.* Par définition nous savons que

$$N_t = \sup\{n \geqslant 0 \text{ tel que } S_n \leqslant t\}. \tag{38.7}$$

Évidemment la fonction $t \mapsto N_t$ est croissante, donc la limite

$$\lim_{t\to\infty} N_t(\omega) \tag{38.8}$$

existe dans $[0, \infty]$. Nous pouvons nous restreindre à $t \in \mathbb{N}$ et considérer $L(\omega) = \lim_{n\to\infty} N_n(\omega)$. Par somme télescopique avec $N_0 = 0$,

$$\frac{N_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(N_k - N_{k-1})}{n}. \tag{38.9}$$

Étant donné que le processus est de Poisson, les variables aléatoires $(N_k - N_{k-1})_{k=1,\dots,n}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de $N_1 - N_0$, c'est à dire la loi de $N_1$. Encore par le fait que $N_t$ soit de Poisson nous savons que $N_1 \sim \mathscr{P}(\lambda)$. La loi des grands nombres (34.83) appliquée aux variables aléatoires $N_k - N_{k-1}$ nous dit que

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E(N_1) = \lambda > 0. \tag{38.10}$$

Du coup $N_n \to \infty$ et $L(\omega) = \infty$.

Nous démontrons maintenant la loi des grands nombres pour les processus de Poisson. Étant donné que pour les entiers $N_n/n \to \lambda$, pour les réels, si la limite existe, ça ne peut pas être autre chose. Si nous notons $\bar{t}$ la partie entière de $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{N_t}{t} = \frac{N_t - N_{\bar{t}}}{t} + \frac{N_{\bar{t}}}{t}. \tag{38.11}$$

Le second terme est relativement simple à traiter :

$$\frac{N_{\bar{t}}}{t} = \underbrace{\frac{N_{\bar{t}}}{\bar{t}}}_{\to\lambda} \cdot \underbrace{\frac{\bar{t}}{t}}_{\to 1}. \tag{38.12}$$

où nous avons utilisé le premier point, $\bar{t}$ étant entier. Pour le premier terme nous savons que $t \mapsto N_t$ est croissante et donc que

$$\frac{N_t - N_{\bar{t}}}{t} \leqslant \frac{N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}}}{t} = \frac{N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}}}{\bar{t}+1}\frac{\bar{t}+1}{t}. \tag{38.13}$$

Le second facteur tend vers 1 lorsque $t \to \infty$. Le premier s'écrit

$$\frac{N_n - N_{n-1}}{n} \tag{38.14}$$

et tend vers zéro en tant que terme général de la série (38.9) qui converge. □

**Proposition 38.4.**
*La variable aléatoire $N_t/t$ est un estimateur sans biais de $\lambda$. De plus il converge vers $\lambda$ en moyenne quadratique.*

*Démonstration.* Vu que $N_t/t \to \lambda$ presque sûrement, la variable aléatoire $N_t/t$ est un estimateur de $\lambda$. Le fait qu'il soit sans biais a été fait dans l'exemple 35.25.

D'autre part nous avons (voir théorème 34.96)

$$\operatorname{Var}\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\operatorname{Var}(N_t) = \frac{\lambda}{t}. \tag{38.15}$$

En appliquant la formule $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ à $X = N_t/t$ nous trouvons

$$E\left(\frac{N_t^2}{t^2}\right) = \frac{\lambda}{t} + \lambda^2. \tag{38.16}$$

Cela montre que $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{L^2} \lambda$. □

Pour le théorème central limite d'un processus de Poisson, nous visons un résultat du style de

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_i X_i - mn}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1). \tag{38.17}$$

Nous écrivons le théorème central limite pour le nombre de sauts que le processus de Poisson a connu en un temps $t$. Le rôle de la moyenne empirique est joué par $N_t$. Nous considérons avoir fait *une seule expérience* qui a duré un temps $t$. Donc le rôle de $n$ est joué par 1 (et non $t$ comme on pourrait le croire). Pour le reste, le nombre de succès en un temps $t$ d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda t$, en vertu de ce qui est raconté au point 34.5.8. C'est cela qui motive l'énoncé suivant.

**Théorème 38.5** (Théorème central limite pour les processus de Poisson)**.**
*Si $(N_t)_{t>0}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda$, alors nous avons*

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1). \tag{38.18}$$

**Remarque 38.6.**
Avant de nous lancer dans la démonstration, remarquons que si nous nous limitons à $t \in \mathbb{N}$, alors nous avons

$$\frac{N_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(N_k - N_{k-1}) - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} \tag{38.19}$$

or par définition nous avons les égalités de lois

$$N_k - N_{k-1} \sim N_1 \sim \mathscr{P}(\lambda), \tag{38.20}$$

donc

$$\frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} = \frac{\frac{1}{n}S_n - \lambda}{\frac{\sqrt{\lambda n}}{n}} = \frac{\frac{1}{n}S_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}/\sqrt{n}}, \tag{38.21}$$

ce qui est exactement le théorème central limite pour une suite de lois de Poisson [1].

*Démonstration.* Nous écrivons $\bar{t}$ la partie entière de $\bar{t}$ et nous décomposons :

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} = \underbrace{\frac{N_t - N_{\bar{t}}}{\sqrt{\lambda t}}}_{A} + \underbrace{\frac{N_{\bar{t}} - \lambda \bar{t}}{\sqrt{\lambda t}}}_{B} + \underbrace{\frac{\lambda \bar{t} - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}}_{C}. \tag{38.22}$$

En ce qui concerne le terme $B$, nous avons

$$B = \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}}\frac{N_{\bar{t}} - \lambda \bar{t}}{\sqrt{\lambda \bar{t}}} \to \mathscr{N}(0,1). \tag{38.23}$$

1. Au fait près que nous devrions encore montrer que $S_n$ est de carré intégrable.

Notons que nous utilisons le fait que si $a_n \to 1$ (en tant que suite de nombre) et si $X_n \to \mathscr{N}(0,1)$ (limite en loi), alors $a_n X_n \to \mathscr{N}(0,1)$ en loi.

Le terme $C$ est également facile parce que $\lambda\bar{t} - \lambda t$ est majoré en norme par $\lambda$. Du coup

$$-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda t}} \leqslant C \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda t}}. \tag{38.24}$$

Donc $\lim_{t\to\infty} C = 0$.

Reste à travailler sur $A$. Vu que $t \mapsto N_t$ est croissante, la différence $N_t - N_{\bar{t}}$ est positive. Soit $\eta > 0$, nous avons

$$P(|A| > \eta) = P(N_t - N_{\bar{t}} > \sqrt{\lambda t}\eta) \leqslant P\big(N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}} \geqslant \sqrt{\lambda t}\eta\big) = P(N_1 \geqslant \eta\sqrt{\lambda t}) \tag{38.25}$$

parce que nous savons que $N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}} \sim N_1 \sim \mathscr{P}(\lambda)$. En vertu des propriétés de la loi de Poisson,

$$\lim_{t\to\infty} P(N_1 \geqslant \eta\sqrt{\lambda t}) = 0. \tag{38.26}$$

En effet si $Z$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda$ nous avons

$$P(Z > l) = \sum_{k=l}^{\infty} P(Z = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{38.27}$$

Nous reconnaissons la queue de série de $e^{\lambda}$, qui tend donc vers zéro lorsque $l \to \infty$. Nous avons donc prouvé que

$$\lim_{t\to\infty} P\big(|A| > \eta\big) = 0, \tag{38.28}$$

c'est à dire la convergence en probabilité de $A$ vers zéro.

Nous avons montré que

$$B + C \xrightarrow{\mathscr{L}} U \sim \mathscr{N}(0,1) \tag{38.29a}$$

$$A \xrightarrow{P} 0. \tag{38.29b}$$

Le lemme de Slutsky (34.74) nous avons une convergence du couple

$$(A, B + C) \xrightarrow{\mathscr{L}} (0, U). \tag{38.30}$$

Utilisant le corollaire 34.76, nous trouvons la convergence en loi

$$A + (B + C) \xrightarrow{\mathscr{L}} 0 + U, \tag{38.31}$$

ce qu'il fallait. □

## 38.2 Quelques trucs sur la simulation

Le théorème ergodique dit que

$$\pi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k = x}. \tag{38.32}$$

C'est avec cela qu'on calcule $\pi(x)$ à partir d'une simulation de chaîne de Markov.

### 38.2.1 Le théorème central limite pour Markov

**Théorème 38.7** (Version allégée)**.**
*Si $(X_n)$ est irréductible et positive récurrente, alors pour toute fonction $f$,*

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\left[\sum_{k=1}^{N} -N\int f d\pi\right] \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,\sigma^2) \tag{38.33}$$

*où $\sigma^2$ dépend de la fonction $f$ et de la chaîne de Markov.*
*Ici, $\int f d\pi = \sum_{x\in E} f(x)\pi(x)$.*

Nous allons simuler la variable aléatoire

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\sum f(X_k) - N\sum_{x\in E} f(x)\pi(x)\right] \tag{38.34}$$

et puis on va mettre sa réalisation dans un histogramme. Dans le cas où on prend $f(i) = \mathbb{1}_{i=i_0}$, il y a de la simplification dans l'intégrale qui devient

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k=i_0} - N\pi(i_0)\right]. \tag{38.35}$$

### 38.2.2 Feuille 5

On pose

$$D_n = \sqrt{n}\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|. \tag{38.36}$$

On en génère un milliers de fois $D_n$, on note $D_n^{(k)}$ ces réalisations, et on regarde ce que vaut

$$\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000} \mathbb{1}_{D_n^{(k)}\geqslant c}. \tag{38.37}$$

Cela nous donne une approximation de

$$P\big(\sqrt{n}\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \geqslant c\big). \tag{38.38}$$

Note que chacun des $D_n^{(k)}$ demande de créer un nouveau vecteur $Y_i$ de lois qu'on veut regarder. Par exemple de loi exponentielle.

### 38.2.3 Feuille 6

Pour créer une fonction qui renvoie $i$ avec probabilité $p_i$ pour $i = 1, 2, 3$, on peut faire

$$U \sim \mathscr{U}[0,1] \tag{38.39}$$

et puis on a

$$P(U < p_0) = p_0 \tag{38.40a}$$
$$P(p_0 < U < p_0 + p_1) = p_1 \tag{38.40b}$$
$$P(p_0 + p_1 < U < p_2) = p_2. \tag{38.40c}$$

Une façon de faire une loi uniforme $[0,1]$ est de faire `rand`

### 38.2.4 Feuille 7

L'échantillon est $(Y_1, \dots, Y_n)$ et nous écrivons le vecteur

$$Y = X\beta + \epsilon \tag{38.41}$$

où $Y \sim \mathcal{N}(X\beta, \sigma^2 \mathrm{Id})$ et $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathrm{Id})$. Nous utilisons le principe de maximum de vraisemblance. Soit $(y_1, \dots, y_n)$ un échantillon et

$$P_\theta(y_1, \dots, y_n) = \prod_i \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - X_i^t\beta}{\sigma}\right)^2\right]. \tag{38.42}$$

L'astuce est de faire que $y_i - X_i^t\beta$ est la $i$ième composante du vecteur $Y - X\beta$ et donc la somme qui est dans l'exponentielle devient la norme de $Y - X\beta$ :

$$f_\theta(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\|Y - X\beta\|^2\right]. \tag{38.43}$$

On passe au logarithme et on dérive par rapport à $\sigma^2$. Attention : la variable est $\sigma^2$, donc la dérivée de $\sigma^2$ est 1 et non $2\sigma$. Bref, on trouve

$$\sigma^2 = \frac{1}{2n}\|U + X\beta\|. \tag{38.44}$$

### 38.2.5 Simuler des lois conditionnelles

Nous voulons générer des couples $(X, Y)$ tels que $Y$ prend les valeurs 0 ou 1 et tels que

$$\begin{cases} P(X|Y=0) \sim \mathscr{E}(\lambda_0) & \text{(38.45a)} \\ P(X|Y=1) \sim \mathscr{E}(\lambda_1). & \text{(38.45b)} \end{cases}$$

Le plus simple est de générer une liste

$$(X_1, 0) \qquad (X_4, 1) \tag{38.46a}$$
$$(X_2, 0) \qquad (X_5, 1) \tag{38.46b}$$
$$(X_3, 0) \qquad (X_6, 1) \tag{38.46c}$$

avec $X_1, X_2, X_3 \sim \mathscr{E}(\lambda_0)$ et $X_4, X_5, X_6 \sim \mathscr{E}(\lambda_1)$.

Avec cette méthode cependant la liste est triée et en plus on a autant de 1 que de 0. On peut faire un peu plus technologique pour corriger cela. Pour créer un couple, on commence par $Y \sim \mathscr{B}(p)$ et puis suivant que $Y = 0$ ou $y = 1$, on génère $X \sim \mathscr{E}(\lambda_0)$ ou $X \sim \mathscr{E}(\lambda_1)$.

# Chapitre 39

# Utilisation dans les autres sciences

Dans ce chapitre nous donnons des applications de divers théorèmes dans les autres sciences que la mathématique.

## 39.1 Démystification du MRUA

### 39.1.1 Preuve de la formule

Nous sommes maintenant en mesure de donner une démonstration complète de la formule du MRUA :

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0. \tag{39.1}$$

Au niveau de la physique, nous considérons un mobile qui se déplace avec une accélération constante $a$. Nous notons par $v_0$ sa vitesse initiale et par $x_0$ sa position initiale.

Nous savons que, pour tout mouvement, si $x(t)$ est la position en fonction du temps, et si $v(t)$ et $a(t)$ représentent la vitesse et l'accélération en fonction du temps, alors

$$v(t) = x'(t) \quad \text{et} \quad a(t) = v'(t) = x''(t). \tag{39.2}$$

Afin de trouver $x(t)$ en connaissant $a(t)$, il « suffit » donc de prendre deux fois la primitive. Essayons ça dans le cas facile du MRUA où $a(t) = a$ est constante.

La vitesse $v(t)$ doit être une primitive de la constante $a$. Il est facile de voir que $v(t) = at$ est une primitive de $a$. Par le corollaire 12.136(bis),

$$v(t) = at + C_1 \tag{39.3}$$

pour une certaine constante $C_1$. Afin de fixer $C_1$, il faut faire appel à la physique : d'après la formule (39.3), la vitesse initiale est $v(0) = C_1$. Donc il faut identifier $C_1$ à la vitesse initiale : $C_1 = v_0$. Nous avons donc déjà obtenu que

$$v(t) = at + v_0. \tag{39.4}$$

Afin de trouver $x(t)$, il faut trouver une primitive de $v(t)$. Il n'est pas très difficile de voir que $at^2/2 + v_0 t$ fonctionne, donc il existe une constante $C_2$ telle que

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C_2. \tag{39.5}$$

Encore une fois, regardons la condition initiale : la formule donne comme position initiale $x(0) = C_2$, et donc nous devons identifier $C_2$ avec la position initiale $x_0$. En définitive, nous avons bien

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0. \tag{39.6}$$

Cette formule est donc maintenant *démontrée* à partir de la seule définition de la vitesse comme dérivée de la position et de l'accélération comme dérivée de la vitesse.

Remarquons cependant que la preuve complète fut *très* longue. En effet, nous avons utilisé les règles de dérivation 12.118 et 12.114, pour la démonstration desquels, les résultats 12.31 et 12.30 ont étés utiles. Mais nous avons surtout utilisé le corollaire 12.136(bis) qui repose sur le théorème de Rolle 12.127, qui lui-même demande le théorème de Borel-Lebesgue 12.66 dans lequel la notion d'ensemble compact a été cruciale.

### 39.1.2 Interprétation graphique

La distance parcourue $x(t)$ en un temps $t$ est la primitive de la vitesse. Nous avons, par ailleurs, que l'opération inverse de la dérivée donnait la surface. Pour reprendre les mêmes notations, nous notons $S_v(t)$ la surface contenue en dessous de la fonction $v$ entre 0 et $x$. Nous ne serions donc pas étonné que

$$S_v(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 \tag{39.7}$$

soit la surface en dessous de la fonction $v(t) = at + v_0$. Nous voyons que la surface totale sous la fonction $v(t) = at + v_0$ est exactement

$$S_v(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t. \tag{39.8}$$

Cela est un bon début, mais hélas nous ne retrouvons pas le terme « $+x_0$ » de la formule (39.7). Cela n'est pas tout à fait étonnant parce que nous savons que la surface sous une fonction était *une* primitive de la fonction, mais nous n'avons pas dit *laquelle*. D'après le fameux corollaire 12.136(bis), la primitive n'est définie qu'à une constante près. Ici, c'est la constante $x_0$ qu'on a perdue en chemin.

Nous parlerons plus en détail du lien entre les surfaces et les primitives dans la section dédié à l'intégration.

## 39.2 Relativité en mécanique newtonienne

### 39.2.1 Relativité du mouvement

Prenons quelqu'un qui cours le cent mètres en onze secondes. Par rapport à un spectateur dans les gradins, il se sera déplacé de cent mètres. Mais si je cours à côté de lui de telle façon à avoir parcouru 80 mètres le temps qu'il en fasse cent, alors par rapport à moi l'athlète ne se sera déplacé que de 20 mètres. Par contre, par rapport à mon chronomètre, il aura également mit onze secondes : ce n'est pas parce que je cours que mon chronomètre s'affole !

Entre moi et les spectateurs, on a donc une loi de transformation

$$x' = x - vt \qquad\qquad t' = t. \tag{39.9}$$

C'est à dire que la distance $x'$ qu'aura parcouru l'athlète par rapport à moi vaut la distance $x$ parcourue par le spectateur moins la vitesse que j'ai courue moi-même, c'est à dire moins $vt$.

### 39.2.2 Bob et Alice

Formalisons le concept de changement de repères. Pour cela, prenons deux amoureux, Bob et Alice[1]. Mettons que Bob reste assis sur un banc pendant qu'Alice cours en ligne droite à une vitesse $v$. Tout deux déclenchent leur chronomètre quand Alice passe devant Bob. À tout moment, Bob et Alice ont leur repères de temps et d'espace. Par exemple si après un temps $t$, Alice voir une peau de banane à 1 mètre devant elle, elle va dire « Il y a une peau de banane à un mètre . », tandis que Bob va dire « Il y a une peau de banane à $(1 + vt)$ mètres ».

Plus généralement, s'il se passe quelque chose à la position $x$ au temps $t$ pour Bob, ce quelque chose se passera au temps $t' = t$ à l'endroit $x' = x - vt$ pour Alice parce qu'en un temps $t$, elle aura déjà avancé d'une distance $vt$.

Ça c'est ce dont tout le monde était persuadé depuis Galilée jusqu'au début du vingtième siècle.

1. C'est plus poétique que dire « soit $A$ et $B$, deux observateurs ».

## 39.3 Invariance de la vitesse de la lumière

### 39.3.1 Champ de gravitation et électrique

Nous savons que que la force de gravitation s'écrit :

$$F_{grav} = G\frac{mm'}{r^2},$$

tandis que la force électrique entre deux charges $q$ et $q'$ est donnée par

$$F_{elec} = k\frac{qq'}{r^2}. \tag{39.10}$$

Nous avons aussi fait remarquer que dans le cas de la gravitation, la force a l'air d'être instantanée, et que cela posait quelque problèmes conceptuels. La force électrique a apparemment le même problème. Une différence entre les deux est qu'une charge électrique c'est tout petit et qu'on peut expérimenter à souhait, tandis que pour avoir une masse dont on peut mesurer le champ de gravitation correctement, il faut quelque chose grand comme la Terre [2].

#### 39.3.1.1 Finitude de la vitesse de propagation de la force électrique

Si un micro est placé juste à côté de ton oreille, et qu'il commence à faire biiiiip, tu l'entends directement. Quand il s'arrête, tu ne l'entends plus. Si le micro est placé à 600 m de toi, tu ne commenceras à l'entendre que deux secondes après le commencement du son, et tu continueras à l'entendre deux secondes après qu'il ait fini.

Eh bien, pour la force électrique, on a pu mesurer que c'est la même chose (sauf que ça va beaucoup plus vite). Si on place une charge quelque part, on ne ressent la force (39.10) qu'après qu'elle ait eut le temps d'arriver. Si on déplace la charge électrique, on continue à ressentir la même force pendant un certain temps : il faut que la modification du champ électrique ait le temps d'arriver. Exactement comme quand on fait des remous quelque part dans un étang : il faut du temps que les remous arrivent plus loin.

On a pu faire des dizaines d'expériences de ce type avec l'électricité, le magnétisme et la lumière ; et les résultats sont clairs : il faut du temps pour que ça se déplace. Tout cela provoque des ondes électromagnétiques qui se déplacent à une vitesse finie. On peut produire de telles ondes avec n'importe quel courant électrique alternatif.

#### 39.3.1.2 Pourquoi pas la gravitation ?

La gravitation telle que donnée par Newton pose le même problème de vitesse de propagation que l'électricité. Est-ce qu'en réalité la gravitation se propage également à une vitesse finie ?

Avec la gravitation c'est beaucoup plus compliqué parce qu'elle est beaucoup plus faible, et donc c'est beaucoup plus difficile à détecter. D'après la théorie d'Einstein de la gravitation, la gravitation devrait également produire des ondes gravitationnelles. Seulement, si un simple courant électrique suffit pour mesurer une onde électromagnétique, affin de mesurer une onde gravitationnelle, il faudrait un déplacement de masse de l'ampleur d'une étoile qui explose. Or ça, on ne sait pas produire dans un laboratoire. Les physiciens sont donc pour l'instant (2009) en train d'attendre qu'une étoile explose pas trop loin d'ici affin d'être capable de mesurer une onde gravitationnelle.

L'existence de ces ondes de gravitation ne fait aucun doute dans la tête d'aucun physicien parce qu'elles sont une conséquence logique (et mathématique) de la théorie de la relativité générale, laquelle a déjà eut beaucoup de confirmations expérimentales. Mais comme on est dans le cadre d'une science expérimentale, il faut être patient et attendre d'en avoir effectivement observée une avant de dire avec certitude que ça existe.

2. Une autre différence fondamentale est qu'il existe des charges électriques négatives, mais pas de masses négatives ; de ce fait on ne peut pas construire d'isolant gravitationnel, contrairement aux isolants électriques qui existent. Cela augmente encore la difficulté de faire des expériences avec la gravitation.

### 39.3.2 Support du champ : pas d'éther

Nous avons dit qu'une onde électromagnétique se propage comme une onde sonore (quoique beaucoup plus vite). Une question se pose alors. En effet, une onde sonore est matérialisé par de l'air qui vibre. Qu'est-ce qui vibre pour une onde électromagnétique ?

Étant donné que les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide (c'est pour ça que la radio fonctionne dans l'espace), la question est problématique. Les physiciens ont donc supposé que tout l'univers était rempli d'un fluide invisible appelé **l'éther**. L'électromagnétisme consiste en une vibration de l'éther, exactement comme l'acoustique consiste en une vibration de l'air.

En fait, vérifier cette hypothèse n'est pas très compliqué. En effet il n'y a aucune raison que l'éther suive la Terre dans son mouvement. Or la Terre se déplace à environ 30 km/s autour du Soleil. Donc les ondes électromagnétiques doivent se propager plus vite dans le sens du mouvement de la Terre que dans le sens perpendiculaire. Tout comme le son se propage plus vite dans le sens du vent.

La célèbre expérience de Michelson-Morley a mesuré cet effet ... et ce fut la consternation : il n'y a aucun effet ! Or, la lumière se déplace à 300.000 km/s ; une variation de 30 km/s devrait être détectable !

Mais rien ! On a recommencé les expériences dans tout les sens, à tous les mois de l'année, à tous les endroits de la Terre. On n'a pas observé un poil de variation de la vitesse de la lumière. Et ça, ça pose un gros problème à la physique.

### 39.3.3 Le problème

Si je joue au football dans un train qui avance à 100 km/h et que je lance une balle à 20 km/h, quelqu'un au sol mesura la vitesse de la balle soit à 120 km/h soit à 80 km/h d'après que l'on ait shooté vers l'avant ou l'arrière du train. Cela paraît logique. Mais ce qu'on vient de voir c'est que ça ne marche pas avec la lumière.

Si un train avance à 100.000 km/s et qu'on y allume une lampe de poche, la lumière avancera à 300.000 km/s par rapport au train et 400.000 km/s par rapport au sol. Non ! Justement pas ! La lumière avancera quand même à 300.000 km/s par rapport au sol.

Là encore, on a fait des dizaines d'expériences partout, sur Terre, dans des avions, dans l'espace avec des atomes, des lampes de poche et des horloges atomique, et dans tous les sens, le sens de déplacement de la Terre, le sens inverse, le sens perpendiculaire, vers le haut, vers le bas : rien ! Personne n'a jamais observé un rayon de lumière se déplacer à une autre vitesse que 300.000 km/s.

Le problème est que le principe d'addition des vitesse est faux pour la lumière. Puisque l'expérience nous force, nous devons faire avec.

**Loi numéro 1.**
*La réalité est que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels. On note c cette vitesse. C'est une constante fondamentale de la Nature.*

Étant donné que c'est une loi expérimentale, nous n'en pouvons rien. C'est la nature qui est comme ça. En particulier tu ne peux pas en vouloir à ton prof de physique d'avoir inventé une théorie compliquée. Ce n'est pas lui qui l'a inventée et ce n'est pas de sa faute.

## 39.4 Conséquences

C'est maintenant que les choses vraiment graves commencent (cela soit dit sans vouloir te faire peur). Affin d'un peu simplifier les choses, nous n'allons étudier que les mouvements en une dimension, c'est à dire sur une droite.

### 39.4.1 Ligne d'univers

Un événement a une coordonnée $(t, x)$. Si je pose un objet juste à mes pieds (disons en $x = 0$), ses coordonnées seront à tout moment $(t, 0)$. Il est bon de voir cette coordonnée comme l'équation

paramétrique d'une droite horizontale dans le plan des coordonnées $t$ et $x$. Plus généralement quand un mobile effectue un mouvement $x(t)$, on appelle la **ligne d'univers** du mobile la ligne (pas forcément droite) $(t, x(t))$. Dans le premier exemple, on avait $x(t) = 0$ pour tout $t$.

Le cas d'un mobile se déplaçant à vitesse constante $v$ donne comme ligne d'univers la droite[3] $(t, x_0 + vt)$, et un objet qui se déplace selon un MRUA a comme ligne d'univers

$$\big(t, x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\big).$$

### 39.4.2 Transformations de Lorentz

Reprenons les amours scientifiques de Bob et Alice, mais cette-fois, analysons celles-ci en tenant compte du fait que la vitesse de la lumière soit invariante. Maintenant, si Bob voit se passer quelque chose au temps $t$ à l'endroit $x$, on va dire qu'Alice voit cette chose au temps $t'$ à la position $x'$, et on va chercher $(t', x')$ en fonction de $(t, x)$.

Posé en termes mathématiques, le problème s'énonce ainsi : trouver les fonctions $f$ et $g$ telles que les formules

$$t' = f(t, x) \tag{39.11a}$$
$$x' = g(t, x) \tag{39.11b}$$

donnent les coordonnées vues par Alice pour un événement vu par Bob à l'instant $t$ au point $x$. Une première étape importante est franchie par la proposition suivante[4].

**Proposition 39.1.**
*Les fonctions $f$ et $g$ contenues dans les transformations* (39.11) *sont nécessairement linéaires (affines), c'est à dire qu'elles doivent s'écrire sous la forme*

$$t' = \alpha t + \beta x + p$$
$$x' = \gamma t + \delta x + q$$

*pour certaines fonctions $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $p$ et $q$ de la vitesse d'Alice relativement à Bob.*

*Démonstration.* Pendant qu'Alice court et que Bob la regarde, Ève tente de lancer une pierre sur Alice (Ève est jalouse). Bob et Alice regardent deux événements. Le premier est la pierre qui quitte la main de Ève, et le second est la pierre qui percute le sol. Pour Bob, le jet s'est passée au temps $t_0$ au point $x_0$, et la pierre touche le sol un petit peu plus tard, au temps $t_0 + \Delta t$ et un peu plus loin, au point $x_0 + \Delta x$. Bob écrit donc ceci sur sa feuille de papier :

$$E_1 = (t_0, x_0)$$
$$E_2 = (t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x),$$

tandis qu'Alice, en observant les mêmes deux événements, aura noté

$$E_1' = \big(f(t_0, x_0), g(t_0, x_0)\big)$$
$$E_2' = \big(f(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x), g(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)\big).$$

Bob et Alice se demandent combien de temps la pierre est restée en l'air et quelle distance elle a parcourue. Par le principe général d'homogénéité, les deux seules quantités pertinentes (qui ont un sens physique) pour Bob sont $(t_0 + \Delta t) - t_0$ et $(x_0 + \Delta x) - x_0$, c'est à dire $\Delta t$ et $\Delta x$. En effet, si Bob avait choisit de s'asseoir autre part et si Alice avait commencé à courir un peu plus tard, ça n'aurait rien changé à la longueur du jet de Ève.

D'une façon ou d'une autre, il doit exister une façon de déduire les mesures de Alice en connaissant celles de Bob ; je ne connais pas avec quelles formules, mais ces formules ne peuvent contenir que $\Delta t$, $\Delta x$ et $v$ parce que ce sont les seules quantités qui définissent tous les événements.

3. bon exercice de révision de ton cours de math de vérifier que c'est une droite.
4. dont je te suggère fortement de ne pas lire la preuve si tu ne veux pas que ton cerveau éclate.

Cela dit, Alice va caractériser le mouvement de la pierre avec la différence des coordonnée entre le jet et la chute sur le sol mesurées par elle-même. En d'autres termes, pour Alice ce qui compte c'est la différence entre $E_1'$ et $E_2'$, soit

$$\big(f(t_0+\Delta t,x_0+\Delta x),g(t_0+\Delta t,x_0+\Delta x)\big)-\big(f(t_0,x_0),g(t_0,x_0)\big). \tag{39.12}$$

Mais nous venons de signaler que ce qu'Alice mesurait devait pouvoir être exprimé en termes de $\Delta t$ et $\Delta x$. Nous concluons que la différence (39.12) ne dépend en fait pas de $x$ et $t$ mais seulement de $\Delta t$ et $\Delta t$.

Prenons maintenant une notation plus compacte et notons $X=(t,x)$, $\Delta X=(\Delta t,\Delta x)$ puis $F=(f,g)$. Avec ça, l'expression (39.12) se note $F(X+\Delta X)-F(X)$. Comme mentionné, cette expression ne dépend que de $\Delta x$. En particulier, elle ne dépend pas de $X$.

Maintenant tu vas comprendre pourquoi on apprend les dérivées dans ton cours de math. Comme $F(X+\Delta X)-F(X)$ ne dépend pas de $X$, le rapport $\big(F(X+\Delta X)-F(X)\big)/\Delta X$ non plus. La limite de ce rapport quand $\Delta X$ tend vers zéro non plus :

$$\lim_{\Delta X\to 0}\frac{F(X+\Delta X)-F(X)}{\Delta X} \tag{39.13}$$

ne dépend pas de $X$. Tu reconnais là la dérivée de $F$ au point $X$. En d'autres termes, $F'(X)$ est constante, elle ne dépend pas de $X$. Disons donc que $F'(X)=a$. Tu connais beaucoup de fonctions dont la dérivée est constante ? Non ? En effet, il n'y en a pas beaucoup. Les fonctions qui vérifient $F'(X)=a$ signifie sont toutes de la forme

$$F(X)=aX+b.$$

À ce niveau, il convient de re-déballer les notations compactes : si $a=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ et $b=(p,q)$ on trouve

$$f(t,x)=\alpha t+\beta x+p \tag{39.14a}$$
$$g(t,x)=\gamma t+\delta x+q, \tag{39.14b}$$

comme annoncé.

□

Nous savons que lorsque $(t,x)=(0,0)$, alors $(t',x')=(0,0)$. En effet, Bob et Alice ont lancés leurs chronos en même temps au moment où ils étaient au même endroit. En mettant $(t,x)=(0,0)$ dans les équations (39.14), on trouve $(t',x')=(p,q)$, et donc $p=q=0$. Ça fait une chose de réglée ; on se retrouve avec

$$\begin{cases} t'=\alpha t+\beta x & \text{(39.15a)}\\ x'=\gamma t+\delta x. & \text{(39.15b)}\end{cases}$$

Quelles sont les contraintes à vérifier pour que ces transformations décrivent correctement la physique que l'on cherche à écrire ?

(1) Il faut que les transformations décrivent correctement que Alice avance à une vitesse $v$ par rapport à Bob,

(2) dans le même ordre d'idée, il faut que l'on trouve que Bob avance à la vitesse $-v$ par rapport à Alice,

(3) il faut que si Alice et Bob observent un rayon lumineux, ce rayon aille à la vitesse $c$ par rapport à Alice et à la *même* vitesse $c$ par rapport à Bob,

(4) enfin, il faut avoir le principe de relativité, c'est à dire que comme les équations (39.15) disent ce que Alice voit en fonction de ce que Bob voit, on demande que les équations qui disent ce que Bob voit en fonction de ce que Alice voit soient les mêmes. En d'autres termes, il faut que les transformations et les transformations inverses soient les mêmes au changement près du signe de $v$.

Étudions une à une ce que chacune de ses contraintes impose. Rappelons que $(t,x)$ et $(t',x')$ sont les coordonnées que Bob et Alice mettent sur le même événement. Par exemple sur l'événement qui consiste à ce que Ève, par jalousie envers Bob, jette une peau de banane sous les pieds d'Alice. Cet événement a lieu à un certain moment, à un certain endroit. C'est ce moment et cet endroit qui sont notés $(t,x)$ et $(t',x')$.

(1) Les coordonnées $(t,x)$ et $(t',x')$ peuvent décrire n'importe quoi. Regardons les coordonnées de Alice qui cours. Pour Alice, cela correspond à $(t',x') = (t',0)$ parce que si $x'$ désigne la position de Alice par rapport à Alice, alors $x'$ est toujours nul. Pour Bob par contre, Alice ne reste pas en place, mais se déplace à une vitesse $v$. C'est à dire que si $(t,x)$ sont les coordonnées de Alice pour Bob, alors $x/t = v$. Écrivons les équations (39.15) en tenant compte de tout ça : avec $x' = 0$, la seconde équation donne

$$0 = \gamma t + \delta x, \tag{39.16}$$

d'où on déduit que $x/t = -\gamma/\delta$. En imposant que cela soit $v$, on trouve $\gamma = -v\delta$, et on ré-écrit les transformations en tenant compte de ça :

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x & \text{(39.17a)} \\ x' = -v\delta t + \delta x. & \text{(39.17b)} \end{cases}$$

Nous voila débarrassé d'un paramètre.

(2) Maintenant, on regarde ce qu'il se passe quand $(t,x)$ et $(t',x')$ décrivent les positions de Bob. On a que $(t,x) = (t,0)$ parce que selon Bob, Bob est au repos. Les équations deviennent :

$$t' = \alpha t \qquad\qquad x' = -v\delta t. \tag{39.18}$$

La vitesse de Bob par rapport à Alice est $-v$, donc on exige que $x'/t' = -v$, c'est à dire que

$$\frac{-v\delta t}{\alpha t} = -v,$$

ce qui implique que $\delta = \alpha$. On avance encore un peu. Écrivons à nouveau les lois de transformation en en tenant compte :

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x & \text{(39.19a)} \\ x' = -v\alpha t + \alpha x. & \text{(39.19b)} \end{cases}$$

(3) Si maintenant Bob et Alice regardent un même rayon de lumière (comme c'est romanesque !), on a que $(t,x)$ et $(t',x')$ expriment les coordonnées d'un rayon lumineux expriment les coordonnées d'un rayon lumineux. Le fait que Bob regarde un rayon lumineux fait que $x = ct$, et donc que les coordonnées du rayon lumineux, observé par Alice sont :

$$t' = \alpha t + \beta ct \qquad\qquad x' = -\alpha v t + \alpha ct. \tag{39.20}$$

L'invariance de la vitesse de la lumière exige que Alice mesure une vitesse $c$ pour le rayon de lumière, c'est à dire $x' = ct'$. On exige donc que

$$-\alpha v t + \alpha ct = c\alpha t + \beta c^2 t,$$

ce qui implique que

$$\beta = -\frac{\alpha v}{c^2}.$$

Une fois de plus, l'avant-dernière, on ré-écrit les lois de transformations en tenant compte de ce fait ; mais cette fois, on fait l'effort d'écrire aussi les transformations inverses :

$$t' = \alpha t - \frac{\alpha v}{c^2}x \qquad\qquad t = \frac{1}{\Delta}\big(\alpha t' + \frac{\alpha v}{c^2}x'\big) \tag{39.21}$$

$$x' = -\alpha v t + \alpha x \qquad\qquad x = \frac{1}{\Delta}(\alpha v t' + \alpha x') \tag{39.22}$$

où $\Delta = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 v^2}{c^2}$ que tu noteras au passage être toujours positif, et nul uniquement quand $v = c$.

(4) Maintenant il reste à imposer le principe de relativité. Les transformations (39.21) montrent comment Alice voit le monde (c'est à dire $(t', x')$) en fonction de la façon dont Bob voit le monde (c'est à dire $(t, x)$). On se demande donc quelle seraient, pour Bob, les coordonnées $(t, x)$ d'un point vu en $(t', x')$ par Alice. Cela signifie que l'on impose que les deux systèmes (39.21) soient en réalité les mêmes, à un changement de signe près.
Attention : il *a priori* faux de dire qu'en changeant le signe de $v$ dans $\alpha v/c^2$, j'obtiens $-\alpha v/c^2$ parce que $\alpha$ est une fonction de $v$. En réalité, il faut noter $\alpha(v)v/c^2$ et donc le changement de signe de $v$ donne $-\alpha(-v)v/c^2$. Ceci étant clair, on peut un petit peu calculer.
Commençons par égaliser le coefficient de $x$ dans $t'$ à celui de $x'$ dans $t$, en changeant le signe de $v$ :

$$\frac{\alpha(-v)v}{c^2} = \frac{\alpha(v)v}{c^2},$$

et donc $\alpha(v) = \alpha(-v)$. Ça c'est une bonne nouvelle. Égalisons maintenant le coefficient de $t$ dans $t'$ à celui de $t'$ dans $t$ en changeant le signe de $v$ :

$$\alpha(-v) = \frac{\alpha(v)}{\Delta(v)} = \frac{\alpha(v)}{\alpha(v)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Comme $\alpha(-v) = \alpha(v)$, on en déduit que

$$\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{39.23}$$

Maintenant qu'on a tout, on peut écrire les transformations de Lorentz. On met donc l'expression (39.23) dans les lois de transformations (39.21) :

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad & t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) & x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(vt' + x'). \end{aligned} \tag{39.24}$$

Tu remarqueras que $\Delta = 1$ ; si tu ne sais pas ce qu'est le déterminant d'une application linéaire, ça n'a pas d'importance. Mais si tu sais ce qu'est le déterminant d'une application linéaire, alors ce $\Delta = 1$ est crucial !

Affin d'avoir des équations un peu plus courtes, à partir de maintenant nous allons noter

$$\gamma(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

### 39.4.3 Conditions d'existence

Comme tu vois une racine carrée et un dénominateur dans ces formules, tu dois te demander quelles sont les conditions d'existence. Étant donné que $v < c$, on a que $v^2/c^2 \leqslant 1$ et en particulier, $v^2/c^2 = 1$ si et seulement si $v = c$.

Ce qui se trouve dans la racine carré ne pose donc jamais de problèmes parce que ce n'est jamais négatif.

Le dénominateur est par contre plus problématique : quand $v = c$ il n'y a plus rien qui fonctionne. Quelle est la physique de ce problème ? Pour le comprendre, il faut se souvenir ce que représente $v$. Nous avons dit que $v$ est la vitesse à laquelle Alice court. Ce que la condition d'existence nous enseigne, c'est que personne ne peut courir à la vitesse de la lumière. C'est une vitesse que l'on ne peut pas atteindre.

Dit en termes plus savants, on ne peut pas choisir un repère qui se déplace à la vitesse de la lumière.

La question qui se pose alors est « ah bon, on ne peut pas atteindre la vitesse de la lumière ! Et la lumière, comment elle fait ? ». Bonne question, merci de l'avoir posée. Hélas la réponse sort du cadre de ce cours.

**Loi numéro 2.**
*Aucun objet ne peut atteindre la vitesse de la lumière.*

**Loi numéro 3.**
*Tu ne dois pas te demander pourquoi la lumière elle-même se déplace à la vitesse de la lumière malgré la loi numéro 2.*

### 39.4.4 La notion d'intervalle

Un **événement** est quelque chose qui se passe à un endroit à un certain moment. C'est donc caractérisé par le moment et le lieu. Comme on travaille à une dimension, c'est un couple de réels $(t, x)$.

Regardons un rayon de lumière. Un événement est le fait d'allumer une lampe de poche, et un autre est le fait que le lumière arrive sur l'objet qu'on éclaire. Appelons-les $(t_1, x_1)$ et $(t_2, x_2)$. Comme d'habitude, on note $\Delta t = t_2 - t_1$ et $\Delta x = x_2 - x_1$. Comme le rayon de lumière va à la vitesse $c$, on a $c = \Delta x/\Delta t$, ou encore

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0.$$

Pour cette raison, on va dire que l'**intervalle** entre deux événements $(t_1, x_1)$ et $(t_2, x_2)$ vaut en général

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2. \tag{39.25}$$

Par invariance de la vitesse de la lumière, si un intervalle est nul pour un observateur, il sera nul pour tous les observateurs.

#### 39.4.4.1 En mécanique newtonienne

Affin de voir un peu mieux l'enjeu de l'invariance de l'intervalle, regardons un exemple chiffré. Si par exemple je me déplace de 10 m en 5 s, mon intervalle mesuré par une personne extérieure est

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = (300.000.000)^2 \cdot (5)^2 - (10)^2 = 2,25 \cdot 10^{18}\,\text{m}.$$

Si je fais le calcul pour moi, j'ai que $\Delta x' = 0$ parce que je ne me déplace pas, et $\Delta t' = 5$ parce que je me suis déplacé en 5 secondes. Le truc est que à côté de $(300.000.000)^2$, l'intervalle spatial $\Delta x$ ne pèse pas grand chose. Ça ne change presque rien qu'il soit de 5 mètres ou de zéro. Ça ne change pas grand chose, mais ça change quand même ! Entre moi qui calcule ou une personne extérieure, l'intervalle change de 100 sur un nombre de la grandeur de 200.000.000.000.000.000.0000 !

Reprenons plus clairement le raisonnement. D'après la mécanique classique, l'intervalle mesuré par deux personnes est différent, mais très peu différent. Inutile de dire que du temps de Newton, on n'avait pas les moyens techniques de mesurer si cet intervalle est effectivement différent ou bien s'il est en réalité égal. C'est un peu comme si on te mettait un spot dans les yeux et qu'on te demandait si c'est un spot de 1000 W ou de 1001 W. Bonne chance pour le dire !

#### 39.4.4.2 En mécanique relativiste

Maintenant qu'on a des moyens techniques nettement plus poussés que Newton, on a pu mesurer que l'intervalle est égal. L'intervalle est un invariant. Cela n'est pas un nouveau principe physique parce qu'il découle des transformations de Lorentz.

### 39.4.5 Le cône de lumière d'un point

Il est intéressant de dessiner dans le plan $(t, x)$ l'ensemble des points atteins par le rayon lumineux. Le point $(t, x)$ est atteint si $c^2t^2 - x^2 = 0$, ou encore si $x = \pm ct$. Cela forme deux droites dans le plan tracé par les coordonnées $t$ et $x$. Ces deux droites forment ce qu'on appelle le **cône de lumière** du point $(0, 0)$.

### 39.4.6 Contraction des longueurs

Bob prend un morceau de bois qu'il mesure de longueur $l$ et le dépose devant lui. À l'instant $t$ (de Bob), les deux extrémités sont aux coordonnées $e_1 = (t, 0)$ et $e_2 = (t, l)$.

Afin de savoir quelle est la longueur de ce même morceau de bois pour Alice, il faut qu'elle mesure les deux extrémités en même temps (pour elle), et qu'elle fasse la différence. Comme Bob et Alice déclenchent leurs chronomètres en même temps, le plus simple est de faire la mesure à cet instant.

Pour Bob, c'est clair : les coordonnées des deux extrémités sont $e_1 = (0, 0)$ et $e_2 = (0, l)$. La longueur du bois est $l$. Pour savoir quelle est la longueur mesurée par Alice, on utilise les transformations de Lorentz qui donnent les coordonnées $e'_1$ et $e'_2$ relatives à Alice. On trouve $e'_1 = (0, 0)$ et

$$e'_2 = \left( \frac{-vl/c^2}{\gamma(v)}, \frac{l}{\gamma(v)} \right). \tag{39.26}$$

En d'autres termes, on a $x_1 = 0$ et $x_2 = l/\gamma(v)$, ce qui fait que la longueur observée par Alice est $l' = x_2 - x_1 = l/\gamma(v)$.

Eh bien ce résultat est faux. Si tu vois pourquoi sans lire la suite, tu es très fort.

Pour mesurer la longueur d'un objet, il faut mesurer la position des deux bouts *en même temps* puis faire la différence entre les deux. Effectivement, $e_1$ et $e_2$ sont en même temps pour Bob, et donc Bob peut mesurer la longueur de son bout de bois en faisant la différence $x_2 - x_1$. Mais comme le montre les coordonnées (39.26), les événements $e'_1$ et $e'_2$ ne se passent pas en même temps pour Alice ! Eh oui : $t'_1 = 0$ et $t'_2 = -vl/c^2\gamma(v)$ ; c'est pas la même chose.

Il faut donc trouver un événement qui pour Alice correspond à l'extrémité du bout de bois au temps $t' = 0$. Comme l'événement général qui correspond au bout du bois pour Bob est $(t, l)$, l'événement général est pour Alice

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}l}{\gamma(v)} \qquad\qquad x' = \frac{l - vt}{\gamma(v)}. \tag{39.27}$$

Affin d'avoir $t' = 0$, il faut $t = vl/c^2$. En mettant cette valeur de $t$ dans $x'$, on trouve

$$x' = \frac{l - v\left(\frac{vl}{c^2}\right))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l\gamma(v).$$

Et là, c'est la bonne formule. Si un objet a une longueur $l$ dans le référentiel où il est au repos, il aura une longueur

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{39.28}$$

dans un référentiel qui se déplace à la vitesse $v$ par rapport à l'objet.

### 39.4.7 Dilatation des intervalles de temps

Encore un petit effort et promit, je te donne une application concrète que tu connais des bizarreries de la relativité. Mais en attendant, regarde bien ta montre, tu ne va pas en croire tes yeux !

Reprenons Bob et Alice. On se rappelle que Bob et Alice avaient déclenchés leurs chronomètres en même temps quand Alice était passée devant Bob. Un peu plus tard, Alice regarde sa montre qui indique un temps $t$. Et elle se demande si Bob a aussi à ce moment une montre qui indique un temps $t$.

Ce serait dingue que non hein ! ? ! En effet, si je synchronise ma montre avec quelqu'un et que je pars faire un tour, ma montre ne sera pas tout d'un coup désynchronisée. Oui, mais Alice, elle cours presque à la vitesse de la lumière ... et à ces vitesses-là, on a déjà vu des choses incroyables. Calculons donc pour en avoir le cœur net.

Le fait qu'Alice regarde sa montre est un événement qui se passe pour Alice aux coordonnées $(t', 0)$ (le zéro c'est parce que par rapport à elle-même, Alice est toujours au repos). À quelles coordonnées $(t, x)$ pour Bob correspond cet événement ?

L'équation de $t$ en fonction de $t'$ et $x'$ dans les transformations de Lorentz (39.24) prise avec $x' = 0$ donnent

$$t = \frac{t'}{\gamma(v)}.$$

Et si, juste pour le plaisir, on faisait l'inverse ? Bob regarde sa montre, il voir un temps $t$ et sa coordonnée spatiale est $x = 0$. À quel temps d'Alice cela correspond ? Mettons $x = 0$ dans la transformation de Lorentz de $t'$ en fonction de $t$ et $x$. Ce qu'on obtient c'est

$$t' = \frac{t}{\gamma(v)}.$$

N'est-ce pas génial ? C'est la même ! Évidement, ça ne pouvait pas être autre chose : le principe de relativité demande qu'on ne puisse pas faire la différence entre Alice qui cours vers la droite avec Bob assis et Alice assise avec Bob qui cours vers la gauche. C'est exactement pour ça que dans une gare, quand le train d'à côté démarre, il t'arrive de croire que c'est ton train qui démarre : tu ne peux pas faire la différence, c'est un principe physique.

### 39.4.8 Invariance de l'intervalle

Dans deux secondes, je vais te montrer comment une utilisation intelligente des exponentielles permet de trouver un résultat très fort en relativité. Quoi ? Les exponentielles, les mêmes qu'au cours de math ? Eh oui : la même exponentielle que celle qu'on t'a introduit avec des populations de bactéries qui se multiplient, cette même exponentielle qui la la miraculeuse propriété d'être égale à sa propre dérivée.

Mais n'anticipons pas.

Nous avons déjà signalé que si la quantité $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ était nulle pour un observateur, alors elle était nulle pour tous les observateurs. Supposons deux événements $A$ et $B$ observés par Alice et Bob. Bob les note aux coordonnées $(t_a, x_a)$, et $(t_b, x_b)$ tandis qu'Alice les note en $(t'_a, x'_a)$ et $(t'_b, x'_b)$.

L'intervalle entre les deux événements mesuré par Bob sera

$$s^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2,$$

tandis que ce même intervalle mesuré par Alice sera

$$s'^2 = c^2(t'_b - t'_a)^2 - (x'_b - x'_a)^2.$$

On peut bien entendu remplacer dans la première équation les $t_a$, $t_b$, $x_a$ et $x_b$ par leurs valeurs en termes de $t'_a$, $t'_b$, $x'_a$ et $x'_b$ données par les transformations de Lorentz. Tu paries que les trois quart des termes dans le calcul se simplifient et qu'il restera exactement $s'^2$ ? Je te dis que oui, et je te conseille de me croire sur parole, sinon tu vas devoir lire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} s^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2 = c^2 &\left(\frac{1}{\gamma(v)}(t'_b + \frac{v}{c^2}x'_b) - \frac{1}{\gamma(v)}(t'_a + \frac{v}{c^2}x'_a)\right)^2 \\ &- \left(\frac{1}{\gamma(v)}(vt'_b + x'_b) - \frac{1}{\gamma(v)}(vt'_a + x'_a)\right)^2. \end{aligned}$$

Jusqu'ici, on n'a fait que remplacer les choses par leurs valeurs données par les transformations de Lorentz. Maintenant on regroupe à l'intérieur de chaque parenthèse les termes de façon à faire

apparaître $\Delta x'$ et $\Delta t'$ :

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{c^2}{\gamma(v)^2}\Big((t'_b - t'_a) + \frac{v}{c^2}(x'_b - x'_a)\Big)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\gamma(v)^2}\big((x'_b - x'_a) + v(t'_b - t'_a)\big)^2 \\ &= \frac{c^2}{\gamma(v)^2}\left((\Delta t')^2 + 2\frac{v}{c^2}\Delta t'\Delta x' + \frac{v^2}{c^4}(\Delta x')^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma(v)^2}\Big((\Delta x')^2 + 2v\Delta x'\Delta t' + v^2(\Delta t')^2\Big). \end{aligned}$$

Là, on a utilisé le produit remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, et on a systématiquement renommé tous les intervalles avec la notation $\Delta$ pour être plus compact. Maintenant, on va regrouper tous les termes contentant $(\Delta t')^2$ ensemble, tous ceux qui contiennent $\Delta t'\Delta x'$ ensemble et ceux qui contiennent $(\Delta x')^2$ ensemble. Autre manière de le dire, on met les $\Delta$ en évidence comme on peut. On trouve ceci :

$$\begin{aligned} (\Delta t')^2\left(\frac{c^2}{\gamma(v)^2} - \frac{v^2}{\gamma(v)^2}\right) + \Delta t'\Delta x'\left(\frac{2vc^2}{\gamma(v)^2c^2} - \frac{2v}{\gamma(v)^2}\right) \\ + (\Delta x')^2\left(\frac{c^2v^2}{c^4\gamma(v)^2} - \frac{1}{\gamma(v)^2}\right). \end{aligned}$$

À partir de là, je te laisse vérifier (en utilisant le fait que $\gamma(v)^2 = 1 - v^2/c^2$) que les coefficients se simplifient beaucoup et valent finalement respectivement $c^2$, 0 et $-1$ comme il se doit. Avec tout ça, nous avons montré le résultat très important suivant :

> L'intervalle entre deux événements est invariant sous les changements de repères d'inertie, c'est à dire que la valeur mesurée par n'importe qui qui se déplace en MRU sera toujours la même.

Pourquoi cela est tellement important ? À cause de Pythagore et d'une petite démonstration à coups d'exponentielles [5].

#### 39.4.8.1 Rappel de trigonométrie hyperbolique

Les fonctions de trigonométrie hyperboliques sont :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{39.29}$$

Elles ont pas mal de propriétés en commun avec les sinus cosinus et normaux. D'abord, leurs dérivées sont faciles à calculer :

$$\begin{aligned} \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ \sinh'(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

où tu noteras qu'il n'y a pas de signe moins qui apparaît, contrairement au cas de la trigonométrie normale. Une autre propriété qui ressemble fort à une propriété de la trigonométrie est :

**Proposition 39.2.**
*Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{39.30}$$

*avec un signe moins comme différence avec la trigonométrie.*

5. oui oui tout ton cours de math va finir par y passer.

*Démonstration.* La preuve revient simplement à calculer en utilisant le produit remarquable de $(a+b)^2$. D'abord, on a :

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{4}\big(e^x + e^{-x}\big)^2 = \frac{1}{4}\big(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\big) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$

où l'on a utilisé le fait que $(e^x)^2 = e^{2x}$ et que $e^x e^{-x} = 1$. Il te reste à faire la même chose pour $\sinh^2(x)$, la réponse est :

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{4}\big(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\big).$$

En faisant la différence entre les deux, il reste 1. □

Une propriété qui est par contre très différente entre la trigonométrie plane et la trigonométrie hyperbolique, c'est la périodicité. Les fonctions usuelles cos et sin sont périodiques. Pas les fonctions hyperboliques.

**Proposition 39.3.**
*La fonction* $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est bijective.*

*Démonstration.* Il faut démontrer que sinus hyperbolique est injective et surjective. Calculons d'abord les limites. Comme tu sais que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, tu vois facilement que

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty. \tag{39.31}$$

Par ailleurs, la fonction sinus hyperbolique est continue et respecte donc le théorème de la valeur intermédiaire[6] 12.21. Soit $y \in \mathbb{R}$ et voyons s'il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x) = y$. Les deux limites indiquent qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x_1) < y$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x_2) > y$. Le théorème de la valeur intermédiaire conclu qu'il existe un $x$ entre $x_1$ et $x_2$ tel que $\sinh(x) = y$. Cela prouve la surjectivité.

Pour l'injectivité, on va utiliser le théorème de Rolle et une petite preuve par l'absurde. Supposons que $\sinh(x_1) = \sinh(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$. Dans ce cas, le théorème de Rolle nous dit qu'il existe un $x$ entre $x_1$ et $x_2$ tel que $\sinh'(x) = 0$. La dérivée de sinus hyperbolique étant cosinus hyperbolique, il faut se demander il existe un $x$ tel que $\cosh(x) = 0$. Étant donné que $e^x > 0$ pour tout $x$, en fait le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais. □

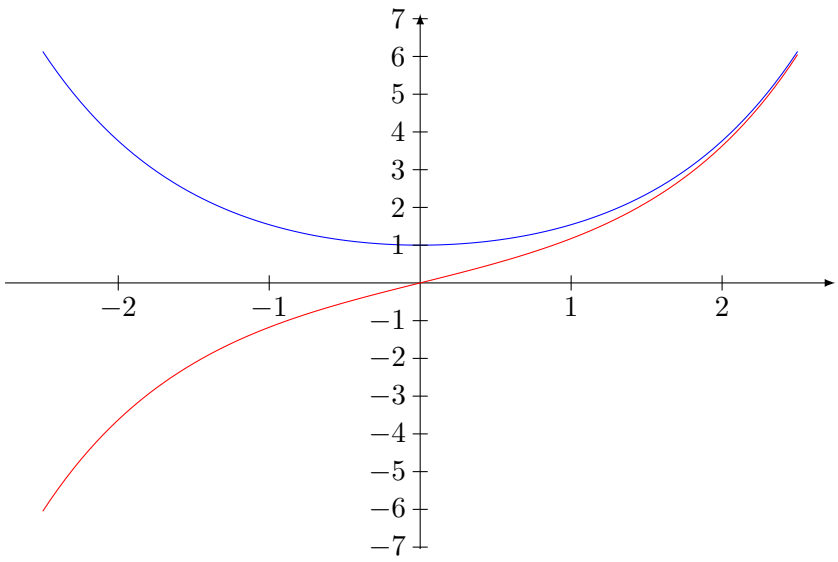



FIGURE 39.1 – En rouge, la fonction $x \mapsto \sinh(x)$ et en bleu, la fonction $x \mapsto \cosh(x)$.

6. Je t'avais dit que tout tons cours de math allait y passer hein.

Un très bon exercice serait de faire un étude complète des fonctions cosinus et sinus hyperbolique. Leur graphes sont donnés à la figure 39.1

Un corollaire de la surjectivité de sinh sur $\mathbb{R}$ est que si je prends n'importe quel deux nombres dont la différence des carrés vaut 1, alors ces carrés sont représentables avec des fonctions hyperboliques :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x^2 - y^2 = 1, \exists \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 = \cosh(\xi) \text{ et } y^2 = \sinh(\xi).$$

La **tangente hyperbolique** est définie par

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \tag{39.32}$$

Un bon exercice est de prouver les deux relations suivantes :

$$\sinh(x) = \frac{\tanh(x)}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}} \qquad \cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}}. \tag{39.33}$$

#### 39.4.8.2 Les transformations de Lorentz (bis)

Nous avons prouvé qu'en relativité, l'intervalle est un invariant. Pour cela, nous avons utilisé les transformations de Lorentz démontrées à partir de l'hypothèse d'invariance de la vitesse de la lumière. Eh bien, oublions un instant que la vitesse de la lumière soit invariante, et posons à la place comme hypothèse que l'intervalle soit invariant. C'est à dire que si Bob mesure un événement aux coordonnées $(t, x)$ et Alice en $(t', x')$, alors $c^2t^2 - x^2 = c^2(t')^2 - (x')^2$.

**Théorème 39.4.**
*Les transformations de Lorentz sont les seules qui laissent l'intervalle invariant.*

*Démonstration.* Toute la partie comme quoi les transformations doivent êtres linéaires reste parce que cette partie ne demandait pas l'invariance de la vitesse de la lumière.

Nous cherchons donc les transformations entre Alice et Bob sous la forme

$$\begin{aligned} t' &= \alpha t + \beta x \\ x' &= \gamma t + \delta x \end{aligned}$$

telles que $c^2(t')^2 - (x')^2 = c^2t^2 - x^2$. Lorsque Alice passe devant Bob, ils déclenchent tout deux leurs chronomètre et leurs axes. C'est à dire que si à ce moment un événement se trouve à droite pour Alice, il est aussi à droite pour Bob. On doit donc avoir, quand $t = t' = 0$, que $x > 0$ implique $x' > 0$. Cela donne la contrainte que $\delta > 0$. D'autre part, comme leurs chronomètres vont dans le même sens (ils choisissent tout les deux de *compter* le temps et non *décompter*), on a que $\alpha > 0$.

En développant l'expression de $(s')^2$ en termes de $t$ et $x$, on trouve la condition d'invariance de l'intervalle sous la forme :

$$c^2(\alpha^2t^2 + 2\alpha\beta tx + \beta^2x^2) - (\gamma^2t^2 + 2\gamma\delta tx + \delta^2x^2) = c^2t^2 - x^2, \tag{39.34}$$

qui doit être valable pour tout $t$ et pour tout $x$. En $t = 0$ on trouve la condition

$$\delta^2 - c^2\beta^2 = 1. \tag{39.35}$$

Cela implique qu'il existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\delta^2 = \cosh^2(\xi)$ et $c^2\beta^2 = \sinh(\xi)$. La première équation donne $\delta = \cosh(\xi)$ (il faut rejeter $\delta = -\cosh(\xi)$ parce qu'on a demandé que $\delta > 0$). Pour la seconde, on trouve $c\beta = \sinh(\xi)$ où l'on peut oublier la possibilité $c\beta = -\sinh(\xi)$ parce que cela revient juste à renommer $\xi \to -\xi$ (la fonction sinus hyperbolique est impaire). Bref, il existe un $\xi$ tel que

$$\begin{aligned} \delta &= \cosh(\xi) \\ \beta &= \frac{\sinh(\xi)}{c} \end{aligned} \tag{39.36}$$

En mettant maintenant $x = 0$ dans la condition (39.34), on trouve la condition

$$\alpha^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} = 1.$$

Pour les mêmes raisons qu'avant, il existe un $\eta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha &= \cosh(\eta) \\ \gamma &= c\sinh(\eta). \end{aligned} \tag{39.37}$$

Rien qu'en regardant deux cas très particuliers, on a déjà bien avancé, non ? Remettons maintenant les valeurs (39.36) et (39.37) dans la condition (39.34). En utilisant l'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, et en séparant les termes en $t^2$, $x^2$ et $tx$ pour satisfaire la condition, il faut

$$\cosh(\eta)\sinh(\xi) = \sinh(\eta)\cosh(\xi) \tag{39.38}$$

parce que les termes en $t^2$ et $x^2$ donnent exactement $c^2t^2 - x^2$ et qu'il faut que le terme en $tx$ s'annule. Mettons la condition (39.38) au carré, et substituons $\cosh^2(\eta) = 1 + \sinh^2(\eta)$ et $\cosh^2(\xi) = 1 + \sinh^2(\xi)$, il reste

$$\sinh^2\xi = \sinh^2\eta,$$

ce qui signifie $\sinh\xi = \pm\sinh\eta$, ou encore $\xi = \pm\eta$. On voit que $\xi = -\eta$ ne fonctionne pas dans (39.38), donc on reste avec $\xi = \eta$ et les transformations prennent la forme

$$\begin{aligned} t' &= \cosh(\xi)t + \frac{\sinh(\xi)}{c}x \\ x' &= c\sinh(\xi)t + \cosh(\xi)x. \end{aligned} \tag{39.39}$$

Ce que nous avons prouvé, c'est qu'il existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que les transformations entre Alice et Bob aient cette forme. Il faut trouver ce que vaut $\xi$ en fonction de la vitesse $v$ à laquelle Alice court.

Pour ce faire, étudions le mouvement d'Alice. Bob la voit aux coordonnées $(t, vt)$, ce qui correspond à

$$x' = c\sinh(\xi)t + \cosh(\xi)vt$$

pour Alice. Mais ces coordonnées sont celles de Alice elle-même, donc $x' = 0$, ce qui donne[7] $vt = -c\sinh(\xi)t/\cosh(\xi)$, ou encore

$$\tanh(\xi) = -\frac{v}{c} \tag{39.40}$$

En utilisant les relations (39.33), on trouve

$$\cosh(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \sinh(\xi) = \frac{-v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{39.41}$$

En remettant ces valeurs dans les transformations (39.39), on trouve

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\gamma(v)} \tag{39.42}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\gamma(v)}, \tag{39.43}$$

exactement les transformations de Lorentz !

□

Ce résultat est important pour une raison assez simple : maintenant, la théorie de la relativité est indépendante de toute considérations sur la lumière. En effet, ce que nous venons de prouver, c'est que s'il existe une vitesse $c$ telle que $c^2t^2 - x^2 = c^2(t')^2 - (x')^2$, alors $(t, x)$ et $(t', x')$ sont liés par les transformations de Lorentz.

7. Conditions d'existence : $\cosh(\xi) \neq 0$ ; heureusement, nous avons vu que le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais.

### 39.4.9 Vitesse limite

Affin de nous passer de l'hypothèse d'invariance de la vitesse de la lumière, nous avons prouvé que l'hypothèse d'invariance de l'intervalle était suffisante. Mais il faut avouer que cette hypothèse n'est pas très intuitive. Nous allons montrer maintenant que l'existence d'une vitesse limite est une troisième hypothèse qui peut être utilisée comme alternative aux deux premières.

## 39.5 Applications

Une première application sympa est le logiciel[8] *lightspeed*. Si tu es sous Ubuntu-Linux, installe juste le paquet nommé lightspeed, et régales-toi ! Tu verras c'est marrant. Si tu utilise des fenêtres, je laisse faire l'adage « Windows c'est facile ».

### 39.5.1 Le GPS

Pour qu'un système GPS puisse te localiser, en gros, il t'envoie un signal, tu lui réponds et il mesure le temps qu'il a fallu à la lumière pour faire l'aller-retour. Déjà, tu remarques que cela n'est possible que grâce au fait que la vitesse de la lumière soit finie. Sinon, le GPS ne fonctionnerait pas. Mais il y a mieux.

Comme pour te localiser il faut plusieurs satellites en plus de ton appareil, il faut que les horloges internes de tout ce petit monde soient bien synchronisées, sinon pour mesurer des intervalles de temps et calculer des distances, c'est mal parti. Eh mais un satellite, ça bouge assez vite (surtout que les mesures doivent être très précises), et en plus ça ne fait même pas un MRU, vu que ça tourne en rond. Comme tu vois tout le travail qu'il a fallu faire pour trouver les transformations de Lorentz d'un MRU, tu t'imagines le travail pour un mouvement circulaire ! Eh bien ce travail a été fait, et le résultat est que si on en tient pas compte, les contractions temporelles liées à la relativité sont suffisamment grandes pour complètement dérégler le GPS.

### 39.5.2 Les ondes électromagnétiques

Tu te souviens qu'au début du chapitre, nous avons dit que le problème qui a amené la relativité était la propagation du champ électrique. Maintenant que nous avons déjà vu une partie des conséquences du problèmes, il est temps de se rendre compte que les champs électriques et magnétiques sont les objets les plus soumis aux bizarreries relativistes du monde : elles se propagent à la vitesse de la lumière. Regarde un coup autour de toi ; tout ce qui est champ électromagnétique a besoin de la relativité pour être bien compris : GSM, lumière, four à micro-onde, radio, wifi, fibre optique, ...

Si un jour un ingénieur te dit qu'il n'y a pas besoin de connaître la relativité pour inventer la radio (c'est vrai : la radio a été inventée avant la relativité), ni pour construire une fibre optique, dis lui en pensant à moi qu'il utilise tout le temps les équations de Maxwell[9], et que ces équations sont relativistes.

Bref, soit convaincu que tu vis dans un monde relativiste et que les transformations de Lorentz te suivent à chacun de tes pas.

## 39.6 Mécanique relativiste

Cela est bien beau, mais la dilatation du temps, et les contractions de longueurs doivent bien avoir des répercussions sur la cinématique et la dynamique des objets. Est-ce que le théorème de l'énergie cinétique est encore valable ? est-ce que les lois de Newton tiennent encore la route ?

8. jeu de mot sur « application » ! ah ah !
9. C'est sous ce nom là qu'on nome l'ensemble des équations de l'électromagnétisme comme la loi de l'induction.

### 39.6.1 Des problèmes, toujours des problèmes

Attardons-nous un peu pour faire quelque commentaires sur cette citation du chevalier pégase dans les chevaliers du zodiaque :

> Ses coups vont à la vitesse de la lumière et pourtant je les vois distinctement arriver.

Est-ce possible ? Nous avons vu qu'il y avait des dénominateurs qui s'annulent quand des objets se déplacent plus vite que la lumière ; or pour voir venir un rayon de lumière qui vient vers soi, il faudrait que le rayon émette de la lumière devant elle. Ça semble un peu mal parti pour respecter les lois de la relativité, non ?

Cela pose en tout cas une question qu'il faudra résoudre. On *entend* venir une ambulance parce qu'elle émet du son qui avance plus vite qu'elle. Pas de problèmes avec ça. Mais quid de la *voir* venir ?

On peut voir venir un tram parce qu'il émet de la lumière ; cette lumière allant plus vite que le tram, elle arrive à nos yeux avant le tram lui-même. Cela est très bien. Mettons que le tram avance à 50 km/h ; pour le conducteur, la lumière de son phare avant avance devant lui à la vitesse $c$. Par conséquent pour un observateur au sol, cette même lumière devrait avancer à la vitesse $c + 50$. Encore une fois, on a un problème d'invariance de la vitesse de la lumière ; mais comme c'est de la lumière, on est habitué à ce que des trucs bizarres arrivent. On ne sera pas étonné que $c + 50 = c$ d'une manière ou d'une autre [10]. Pire. Si un vaisseau spatial avance à la vitesse 200000 km/s et qu'il envoie en reconnaissance un vaisseau devant lui à la vitesse de 150000 km/s, le vaisseau de reconnaissance ira à la vitesse 150000 km/s par rapport au vaisseau principal. Et par rapport au sol, il ira à la vitesse $150000 + 200000 = 350000$ km/s, ce qui est impossible. Il faudra trouver quelque chose pour que ça se passe bien.

Un autre problème maintenant.

Prenons une masse $m$ que l'on soumet à une force constante $F$. Par la loi de Newton, $a = F/m$ est constante et la vitesse après un temps $t$ vaut $v = Ft/m$. Pas de bol, ça devient plus grand que la vitesse de la lumière à partir du temps $t = cm/F$. Ça est un problème hein ? Il faut trouver un truc pour qu'avec une force constante, l'accélération diminue.

### 39.6.2 Loi d'addition des vitesses

Si Bob observe un objet se déplacer à la vitesse $V$, alors Alice devrait l'observer bouger à la vitesse $V - v$. Tout comme si une vache voit passer un train à 90 km/h, alors le vélo qui avance à 25 km/h le voit passer à 65 km/h.

Maintenant, tu es habitué à ce que rien ne se passe comme d'habitude, donc tu te doutes bien qu'en réalité la bonne formule ne va pas être $V - v$.

Bob observe l'objet aux coordonnées $(t, Vt)$, ce qui fait pour Alice :

$$\left(\frac{t - \frac{v}{c^2}Vt}{\gamma(v)}, \frac{Vt - vt}{\gamma(v)}\right).$$

En divisant le $x'$ d'Alice par le $t'$ d'Alice, on trouve la vitesse mesurée par Alice :

$$V' = \frac{(V-v)t}{\gamma(v)} \frac{\gamma(v)}{t\left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)} = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}.$$

La loi de transformation des vitesses relativiste est donc

$$V' = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}. \tag{39.44}$$

Qu'en est-il de notre $c + 50 = c$ ? Disons que Bob lance un bisou à Alice pendant qu'elle arrive vers lui. Le bisou arrive à la vitesse de la lumière (càd $V = c$) tandis que Alice s'approche de Bob

10. et je ne te cache pas que c'est ce qui va arriver.

à la vitesse 50 m/s (càd $v = 50$). Donc la vitesse à laquelle Alice devrait voir arriver le bisou est bien $c + 50$. En utilisant la formule d'addition relativiste des vitesses (39.44), nous trouvons

$$V' = \frac{c - 50}{1 - \frac{50c}{c^2}} = \frac{c - 50}{1 - \frac{50}{c}} = \frac{c(c - 50)}{c - 50} = c.$$

Donc effectivement en relativité quand on additionne des vitesses il faut penser à la règle du « $c + 50 = c$ ».

### 39.6.3 L'action d'une force

L'équation fondamentale de la mécanique classique est

$$F = ma.$$

Or tu n'es pas sans savoir que l'accélération est la dérivée seconde de la position par rapport au temps. Nous noterions donc $F = mx''(t)$. Le problème est évidement que si $F$ est constante, on trouve $v = Ft/m$ qui dépasse toujours la vitesse $c$ quand $t$ est assez grand. Il faudra donc modifier la loi $F = ma$. Pour cela, posons-nous des questions sur la dérivée $x'(t)$. On dérive par rapport au temps ; oui mais nous avons vu que le temps n'est pas le même pour tout le monde. Introduisons donc la notation

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{39.45}$$

qui ne signifie rien d'autre que nous dérivons $x$ par rapport à $t$ et non par rapport au temps $t'$ de quelqu'un d'autre. Dans le cadre de la relativité, ce que signifie l'équation (39.45) est que $v$ est la dérivée de $x$ par rapport à $t$. Dans le cas où $x$ et $t$ sont les coordonnées de la position d'Alice mesurées par Bob, cela signifie qu'on dérive la position *mesurée par Bob* par rapport au temps *mesuré par Bob*.

Ce que dit la relativité est que cette quantité $v$ ne peut pas varier proportionnellement à la force sous peine de dépasser la vitesse de la lumière. La subtilité est de modifier la loi de Newton en disant que la quantité qui varie sous l'action d'une force n'est plus $dx/dt = v$, mais

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

c'est à dire la dérivée de la position *mesurée par Bob* par rapport au temps *mesuré par Alice* ! La loi de Newton $v = Ft/m$ devient donc

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Ft}{m}. \tag{39.46}$$

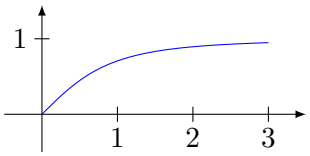
Est-ce que cela résous le problème ? Pour le savoir, regardons la vitesse acquise par le mobile de masse $m$ soumit à la force $F$ pendant un temps $t$ Il faut résoudre l'équation (39.46) par rapport à $v$ et voir si cela reste bien toujours inférieur à $c$. On commence par mettre la racine à droite et à élever toute l'équation au carré :

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{F^2t^2}{m^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ v^2\left(1 + \frac{F^2t^2}{c^2m^2}\right) &= \frac{F^2t^2}{m^2} \\ v &= \frac{\sqrt{F^2t^2/m^2}}{\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{c^2m^2}}}, \end{aligned}$$

et donc finalement

$$v(t) = \frac{Ft}{m\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{c^2m^2}}}. \tag{39.47}$$

Tu dois remarquer que si $F$ et $t$ ne sont pas trop grands, l'expression $F^2t^2/c^2m^2$ est minuscule parce que $c$ est énorme. Si on fait l'approximation $F^2t^2/c^2m^2 = 0$ dans cette expression, on retrouve $v = Ft/m$. Cela montre qu'à moins de faire des expérience avec de très grandes forces pendant énormément de temps, on ne peut pas voir la différence entre la mécanique de Newton et la mécanique relativiste.




Sur le graphe suivant, la vitesse en fonction du temps lorsqu'une particule de masse $m = 1$ est soumise à une force constante. Pour les besoin du graphique, nous avons mit à 1 la vitesse $c$. Tu vois que quand la vitesse n'est pas très grande, le graphiques est presque celui d'une droite ; et à partir d'un certain moment, la courbe s'infléchit pour tendre vers 1 sans l'atteindre.

Remarque que si on maintient une accélération constante égale à celle de la gravité terrestre pendant deux heures, on arrive déjà sur la Lune, à une vitesse de 75 km/s, c'est à dire encore rien par rapport à la vitesse de la lumière ! Cela pour te dire que la formule (39.47) a l'air d'être très différente de la formule classique $v = Ft/m$, mais en réalité tant qu'on n'atteint pas des forces énormes, elle ressemble très fort.

Vérifions maintenant que la formule (39.47) n'est pas en contradiction avec l'impossibilité de dépasser la vitesse de la lumière. Pour cela, regardons ce qu'il se passe si on applique une force constante $F$ sur un objet de masse $m$ pendant un temps très long. C'est à dire : calculons la limite

$$\lim_{t\to\infty} v(t).$$

Tu vois tout de suite qu'on est sur un cas $\frac{\infty}{\infty}$, ce qui t'oblige à utiliser la règle de l'Hospital. On peut cependant un peu réfléchir et deviner la réponse sans passer par des math trop compliquées.

En effet, quand $t$ est vraiment énorme, l'expression $\frac{F^2t^2}{m^2c^2}$ devient très grande, et le 1 qui se trouve à côté ne vaut plus grand chose, on peut le négliger.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{Ft}{m\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{c^2m^2}}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{Ft}{m\sqrt{\frac{F^2t^2}{m^2c^2}}} \\ &= \lim_{v\to\infty} \frac{Ft}{m\frac{Ft}{cm}} \\ &= c.\end{aligned} \tag{39.48}$$

Tout est bien : on arrive au maximum à la vitesse de la lumière, mais il faut un temps infini pour y parvenir. Conclusion : il n'est pas possible d'accélérer un objet jusqu'à atteindre la vitesse de la lumière.

### 39.6.4 Équivalence entre la masse et l'énergie

Le moment est venu de montrer ce que signifie la fameuse formule $E = mc^2$.

## 39.7 Principe de correspondance

Nous ne sommes pas parvenu à démontrer la formule (39.46) de la mécanique relativiste qui montre comme un objet accélère sous l'effet d'une force constante. Nous avons juste montré qu'il fallait modifier la loi $v = Ft/m$ et nous avons prit la première modification qui nous soit tombée sous la main, à savoir qu'il faut dériver la position par rapport au temps de l'objet qu'on observe plutôt que par rapport au temps de l'observateur.

En fait, il est possible de prouver rigoureusement [11] la formule

$$\frac{Ft}{m} = \frac{\alpha v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Mais il n'y a pas moyen de trouver la valeur de la constante $\alpha$. Tout ce qu'il y a moyen de trouver avec l'hypothèse de l'invariance de la vitesse de la lumière est l'existence d'une constante telle que cette formule soit vraie.

Affin de fixer la constante $\alpha$, il faut faire intervenir un principe physique supplémentaire, le **principe de correspondance**

**Loi numéro 4.**
*Lorsque la vitesse d'une particule est faible, les équations doivent être en première approximation les mêmes que celles de la mécanique classique.*

Que signifie *en première approximation* ? Tu sais qu'une fonction $x \mapsto f(x)$ peut être approximée (pour des petits $x$) par la formule

$$f(x) \simeq f(0) + xf'(0).$$

Nous voudrions donc que $Ft/m$ soit en première approximation égal à $v$. Nous devons étudier la fonction

$$f(v) = \frac{\alpha v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Voir ce que vaut cette fonction en première approximation lorsque $v$ est petit est un exercice de dérivation. En utilisant la règle de dérivation des fractions, on trouve que

$$f'(v) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\alpha v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

et donc que $f'(0) = \alpha$. Bien entendu, $f(0) = 0$. En première approximation, nous trouvons donc

$$f(v) \simeq \alpha v \tag{39.49}$$

qui doit être égal à la quantité non relativiste $v$. Nous en déduisons qu'il faut fixer $\alpha = 1$, et on tombe sur la formule relativiste proposée plus haut

$$\frac{Ft}{m} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'utilisation cruciale du principe de correspondance a une répercussion énorme sur notre vision de la physique. En effet, la relativité d'Einstein ne parvient pas à *remplacer* la mécanique de Newton. On a besoin d'invoquer la mécanique de Newton pour fixer la théorie. On peut écrire l'axiome suivant :

$$\lim_{v \to 0} \text{Einstein} = \text{Newton}. \tag{39.50}$$

Cela n'est pas une propriété de la théorie d'Einstein, mais un de ses axiomes !

La relativité ne fait donc pas table rase des principes physiques de la mécanique newtonienne : elle les complète et les contient.

11. Mais il n'existe pas de démonstrations simples à ma connaissance.

# Chapitre 40

# Exemples avec Sage

Ce chapitre est un foure-tout de choses que l'on peut faire avec Sage.
Certains exemples utilisent ce module qui sert à automatiser certaines tâches : `outilsINGE.sage`

```
# -*- coding: utf8 -*-
from sage.all import *

"""
This module provides _pragmatic_ tools for solving exercise for
a first year in general mathematics.
"""

# TODO : trouver une bonne traduction pour "point de selle."

def automatedVar(symbol,n):
  """ If symbol = "x" and n=4, return the string 'x1,x2,x3,x4'  ↩
      """
  s = ",".join([ symbol+str(i) for i in range(1,n+1)])
  return s

class SolveLinearSystem(object):
  """
  Solve Ax=v and print it in a nice way

  Example :

  A=matrix([ [1,-2,3,-2,0],[3,-7,-2,4,0],[4,3,5,2,0] ])
  v=vector((0,0,0,0,0))
  print SolveLinearSystem(A,v)
  """
  def __init__(self,A,v):
    self.matrix = A
    self.vector = v
    self.nvars = A.ncols()
    s = automatedVar("x",self.nvars)
    self.xx=var(s)
  def equations(self):
    """Return the equations corresponding to the
                  self.matrix and self.vector as a list of equations↩
                     """
    X=matrix( [self.xx[i] for i in range(0,self.nvars) ]).↩
```

```
      transpose()
    eqs=[]
    for i in range(0,self.matrix.nrows()):
      exp = (self.matrix*X)[i][0]==self.vector[i]
      eqs.append(exp)
    return eqs
  def solutions(self):
    return solve(self.equations(),self.xx)
  def latex(self):
    """Return the LaTeX's code of the system."""
    a=[]
    a.append(r"""

        \item
          $
          \left\{
          \begin{array}{ll}
    """)
    for eq in self.equations():
      a.append("          "+str(eq).replace("x","x_").replace("*",""
        ,"").replace("==","=")+"\\\\ \n")
    a.append(r"""
          \end{array}
          \right.
          $
          """)
    return "".join(a)
  def __str__(self):
    a = []
    a.append("The given matrix corresponds to the system")
    for eq in self.equations():
      a.append(str(eq))
    a.append("And the solutions are")
    a.append(str(self.solutions()))
    return "\n".join(a)

def QuadraticMap(A,v):
  """
  Return the result of the quadratic form associated
        with A applied on the vector v, that is the number
  A_ij v^iv^j
  using the summation convention.
  """
  n = A.nrows()
  if not A.is_symmetric():
    print "Warning : Given matrix is not symmetric"
  if not A.is_square():
    raise TypeError,"Error : The matrix A is not square"
  if not v.degree()==n :
    raise TypeError,"The size do not agree"
  return sum([ A[i,j]*v[i]*v[j] for i in range(n) for j in range(
     n)  ]).simplify_full()

```

```
class SymmetricMatrix(object):
  """
  Provide informations about the matrix A assuming it is symmetric.
  """
  def __init__(self,A):
    if not A.is_square():
      print "Error : A symmetric matrix must be square"
      raise TypeError
    self.matrix = A
    self.degree = A.nrows()
    self.matrix.set_immutable()
  def primary_principal_submatrix(self,n):
    """
    Return the primary principal submatrix of order n, that is the matrix obtained
             by removing the n last lines and columns from self.
    """
    taille=self.degree-n
    v=[]
    for i in range(0,taille):
      v.append(self.matrix[i][0:taille])
    return matrix(v)
  def principal_minors(self):
    """
    Return the list of principal minors. The principal minor of order k is
             the determinant of the primary principal matrix of order k.
    """
    a=[]
    for i in range(self.degree):
      a.append(self.primary_principal_submatrix(i).determinant())
    return a
  def genre_list(self):
    """
    Return the genius of the matrix as a list of booleans in the order
    positive defined, negative defined;
             semidefinite positive, semidefinite negative, indefinite.

    """
    defpos = True
    defneg = True
    semidefpos = True
    semidefneg = True
    indefinie=True
    mineurs = self.principal_minors()
    for i in range(len(mineurs)):
      m = mineurs[i]
      if m == 0:
```

```
132           defneg=False
133           defpos=False
134         if m < 0:
135           defpos=False
136           semidefpos=False
137           if i%2==0:
138             defneg=False
139         if m > 0:
140           semidefneg=False
141           if i%2==1:
142             defneg=False
143       if 0 not in mineurs:
144         semidefneg=False
145         semidefpos=False
146       if (defpos==True)or(defneg==True)or(semidefpos==True)or(↩
             semidefneg==True):indefinie=False
147       return [defpos,defneg,semidefpos,semidefneg,indefinie]
148     def __str__(self):
149       return str(self.matrix)
150
151 class QuadraticForm(SymmetricMatrix):
152     """
153     From a symmetric matrix A, provide informations concerning the ↩
          associated quadratic form.
154     """
155     def __init__(self,A):
156       SymmetricMatrix.__init__(self,A)
157       if not A.is_symmetric():
158         print "Warning : matrix is not symmetric"
159     def evaluate(self,v):
160       """
161       Return the value of the quadratic form on the vector v.
162       """
163       return QuadraticMap(self.matrix,v)
164     def diagonalizing_martrix(self):
165       """
166       Return the matrix B such that B^tAB is diagonal.
167       """
168       # The transposition is because, in the matrix B, the ↩
             eigenvectors have
169       # to be read as column while Sage's matrix constructor takes ↩
             rows.
170       return matrix(self.orthonormal_basis()).transpose()
171     def new_variables(self):
172       """
173       Give the change of variables needed to put the quadratic form ↩
             under its normal form
174       X=BY
175       where X are the "old" variables
176       """
177       variables = var(automatedVar("y",self.degree))
178       Y = vector(variables)
179       return self.diagonalizing_martrix()*Y
```

```
180   def eigenmatrix_left(self):
181     return self.matrix.eigenmatrix_left()
182   def eigenvectors(self):
183     """
184     Return a list of eigenvectors of the matrix.
185
186     As the matrix is symmetric, that list has to be a basis.
187     """
188     D,P = self.eigenmatrix_left()
189     return [P[i] for i in range(P.nrows())]
190   def eigenvalues(self):
191     """
192     Return a list of eigenvalues of the matrix in the same order ↩
          as the list of eigenvectors given in
193       self.eigenvectors()
194     """
195     D,P = self.eigenmatrix_left()
196     return [ D[i,i] for i in range(D.nrows()) ]
197   def orthonormal_basis(self):
198     """
199     Return a basis of eigenvectors normalised to 1 as a list.
200     """
201     M,mu = matrix(self.eigenvectors()).gram_schmidt()
202     return [ v/v.norm() for v in M ]
203   def verification(self):
204     """
205     return the value of the quadratic form on the vector ↩
          new_variables()
206     """
207     return self.evaluate(self.new_variables())
208
209   def __str__(self):
210     a = []
211     a.append("Hi guy; I'm the quadratic form associated with the ↩
          matix")
212     a.append(str(self.matrix))
213     a.append("My eigenvalues and eigenvectors are : ")
214     veps = self.eigenvectors()
215     vaps = self.eigenvalues()
216     for i in range(len(veps)):
217       a.append("%s -> %s"%(str(vaps[i]),str(veps[i])))
218     a.append("I've the following orthonormal basis of eigenvectors↩
          :")
219     for v in self.orthonormal_basis():
220       a.append(str(v))
221     a.append("A matrix B such that B^tAB is diagonal is ")
222     a.append(str(self.diagonalizing_martrix()))
223     a.append("I'm quite pretty in the following variables ...")
224     for i in range(self.degree):
225       a.append("x%s = %s"%(str(i+1),str(self.new_variables()[i]))↩
          )
226     a.append("Look at me when I wear my cool variables")
227     a.append(str(self.verification()))
```

```
228     return "\n".join(a)
229
230 class Extrema(object):
231   """
232   From a function f, provides the informations for the study of ↩
         the extrema :
233   partial derivative
234   critical points
235   Hessian matrix at the critical points
236   Genius of the Hessian and conclusion as local min/max
237
238   Dear student : remember that this class does not furnish any ↩
         informations
239       concerning *global* extrema. The latter have to be found
240     among the critical points OR on the border of the domain.
241   """
242   def __init__(self,f):
243     var('x,y')
244     self.fun = f
245     self.gx=self.fun.diff(x).full_simplify()
246     self.gy=self.fun.diff(y).full_simplify()
247     self.gxx=self.gx.diff(x).simplify_full()
248     self.gxy=self.gx.diff(y).full_simplify()
249     self.gyy=self.gy.diff(y).full_simplify()
250     self.cp = solve( [self.gx(x,y)==0,self.gy(x,y)==0],[x,y] )
251   def critical_points(self):
252     """
253     Return the critical points as a list of tuples (x,y)
254     """
255     a = []
256     for pt in self.cp :
257       try :
258         px = SR(pt[0].rhs())
259         py = SR(pt[1].rhs())
260         a.append((px,py))
261       except TypeError :
262         a.append("  I'm not able to solve these equations.")
263     return a
264   def hessienne(self,a,b):
265     return matrix(SR,2,2,[self.gxx(a,b),self.gxy(a,b),self.gxy(a,↩
         b),self.gyy(a,b)])
266   def __str__(self):
267     a = []
268     a.append ("The function :")
269     a.append(str(self.fun))
270     a.append ("Derivative x and y :")
271     a.append(str(self.gx))
272     a.append(str(self.gy))
273     a.append ("Hessian matrix :")
274     a.append(str(self.hessienne(x,y)))
275     a.append ("Critical points :")
276     for pt in self.critical_points() :
277       a.append(str(pt))
```

```
    for pt in self.critical_points():
      try :
        px = pt[0]
        py = pt[1]
        a.append("At (%s,%s), the Hessian is"%(str(px),str(py)))
        try :
          Hess = SymmetricMatrix(self.hessienne(px,py))
          for l in Hess.matrix:
            a.append("  "+str(l))
          a.append("  Primary principal minors are %s"%str(Hess.↩
              principal_minors()))
          l = Hess.genre_list()
          if l[0]==True:
            a.append("  Hessian positive defined")
            a.append("  local minimum")
          if l[1]==True:
            a.append("  Hessian negative defined")
            a.append("  local maximum")
          if l[2]==True:
            a.append("  Hessian positive semidéfinite")
            a.append("  I don't conclude")
          if l[3]==True:
            a.append("  Hessian negative semidefinite")
            a.append("  I don't conclude")
          if l[4]==True:
            a.append("  Undefinite Hessian")
            a.append("  «selle» point")
        except RuntimeError,data :
          a.append("  "+str(data))
      except TypeError :
        a.append("  I'm not able to solve these equations.")
    return "\n".join(a)
```

tex/sage/outilsINGE.sage

**Exemple 40.1**
Calculer la limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} \tag{40.1}$$

```
var('x')
f(x)=sin(x)*cos(x)/x
limit(f(x),x=oo)
```

La première ligne déclare que la lettre `x` désignera une variable. Pour la troisième ligne, notez que l'infini est écrit par deux petits « o ». △

**Exemple 40.2**
Quelques limites et graphes avec Sage.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$.
Pour effectuer cet exercice avec Sage, il faut taper les lignes suivantes :

```
sage: var('x,a,b')
```

```
(x, a, b)
sage: f(x)=sin(a*x)/sin(b*x)
sage: limit( f(x),x=0  )
a/b
```

Noter qu'il faut déclarer les variables `x`, `a` et `b`.

(2) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x-2}$

```
sage: f(x)=(sqrt(x**2+1))/(x-2)
sage: limit(f(x),x=oo)
1
sage: limit(f(x),x=-oo)
-1
```

Noter la commande pour la racine carré : `sqrt`. Étant donné que cette fonction diverge en $x = 2$, si nous voulons la tracer, il faut procéder en deux fois :

```
sage: plot(f,(-100,1.9))
Launched png viewer for Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(f,(2.1,100))
Launched png viewer for Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

La première ligne trace de $-100$ à 1.9 et la seconde de 2.1 à 100. Ces graphiques vous permettent déjà de voir les limites. Attention : ils ne sont pas des *preuves* ! Mais ils sont de sérieux indices qui peuvent vous inspirer dans vos calculs.

△

**Exemple 40.3**

Calculer les dérivées partielles $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial^2_x f$, $\partial^2_{xy} f$, $\partial^2_{yx} f$ et $\partial^2_y f$ des fonctions suivantes.

(1) $2x^3 + 3x^2y - 2y^2$
(2) $\ln(xy^2)$
(3) $\tan(x/y)$
(4) $\frac{xy^2}{x+y}$

Le script Sage suivant (`exoDV002.sage`) résout l'exercice :

```
# -*- coding: utf8 -*-

def LesCalculs(f):
  print "Pour la fonction %s"%str(f)
  print "d_x",f.diff(x).simplify_full()
  print "d_y",f.diff(y).simplify_full()
  print "d^2_x",f.diff(x).diff(x).simplify_full()
  print "d_xd_y",f.diff(x).diff(y).simplify_full()
  print "d_yd_x",f.diff(y).diff(x).simplify_full()
  print "d^2_y",f.diff(y).diff(y).simplify_full()
  print ""

def exercise_DV002():
  var('x,y')
  fa(x,y)=2*x**3+3*x**2*y-2*y**2
```

```
fb(x,y)=ln(x*y**2)
fc(x,y)=tan(x/y)
fd(x,y)=x*y**2/(x+y)
LesCalculs(fa)
LesCalculs(fb)
LesCalculs(fc)
LesCalculs(fd)
```

tex/sage/exoDV002.sage

La sortie est :

```
Pour la fonction (x, y) |--> 2*x^3 + 3*x^2*y - 2*y^2
d_x (x, y) |--> 6*x^2 + 6*x*y
d_y (x, y) |--> 3*x^2 - 4*y
d^2_x (x, y) |--> 12*x + 6*y
d_xd_y (x, y) |--> 6*x
d_yd_x (x, y) |--> 6*x
d^2_y (x, y) |--> -4

Pour la fonction (x, y) |--> log(x*y^2)
d_x (x, y) |--> 1/x
d_y (x, y) |--> 2/y
d^2_x (x, y) |--> -1/x^2
d_xd_y (x, y) |--> 0
d_yd_x (x, y) |--> 0
d^2_y (x, y) |--> -2/y^2

Pour la fonction (x, y) |--> tan(x/y)
d_x (x, y) |--> 1/(y*cos(x/y)^2)
d_y (x, y) |--> -x/(y^2*cos(x/y)^2)
d^2_x (x, y) |--> 2*sin(x/y)/(y^2*cos(x/y)^3)
d_xd_y (x, y) |--> -(2*x*sin(x/y) + y*cos(x/y))/(y^3*cos(x/y)^3)
d_yd_x (x, y) |--> -(2*x*sin(x/y) + y*cos(x/y))/(y^3*cos(x/y)^3)
d^2_y (x, y) |--> 2*(x^2*sin(x/y) + x*y*cos(x/y))/(y^4*cos(x/y)^3)

Pour la fonction (x, y) |--> x*y^2/(x + y)
d_x (x, y) |--> y^3/(x^2 + 2*x*y + y^2)
d_y (x, y) |--> (2*x^2*y + x*y^2)/(x^2 + 2*x*y + y^2)
d^2_x (x, y) |--> -2*y^3/(x^3 + 3*x^2*y + 3*x*y^2 + y^3)
d_xd_y (x, y) |--> (3*x*y^2 + y^3)/(x^3 + 3*x^2*y + 3*x*y^2 + y^3)
d_yd_x (x, y) |--> (3*x*y^2 + y^3)/(x^3 + 3*x^2*y + 3*x*y^2 + y^3)
d^2_y (x, y) |--> 2*x^3/(x^3 + 3*x^2*y + 3*x*y^2 + y^3)
```

△

**Exemple 40.4**

Résoudre les systèmes suivants.

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 3x_1-x_2-4x_3=0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=0 \\ x_1+4x_2+7x_3=0 \\ x_1+3x_2+3x_3=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=4 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=-4 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=0 \\ x_1+4x_2+3x_3=3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-6 \\ -3x_1+3x_2-x_3=17 \\ 2x_1-x_2=3 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 3x_1-7x_2-2x_3+4x_4=0 \\ 4x_1+3x_2+5x_3+2x_4=0 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3+3x_4=4 \\ 3x_1+3x_2+3x_3-3x_4=9 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 3x_1-x_2-4x_3=0 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=0 \\ x_1+4x_2+7x_3=0 \\ x_1+3x_2+3x_3=0 \end{cases}$

(12) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=4 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=-4 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=0 \\ x_1+4x_2+3x_3=3 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-6 \\ -3x_1+3x_2-x_3=17 \\ 2x_1-x_2=3 \end{cases}$

Nous résolvons les systèmes en utilisant Sage avec le script suivant.

```
# -*- coding: utf8 -*-
"""
Ce script Sage résout un certain nombre
de systèmes d'équations linéaires du cours INGE1121
"""

import outilsINGE

def exercise_1_1_bcdefhi():
  # Exercice 1.1.b (INGE1121)
  A=matrix([ [1,-2,3,-2,0],[3,-7,-2,4,0],[4,3,5,2,0] ])
  v=vector((0,0,0,0,0))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.c (INGE1121)
  A=matrix([ [2,1,-2,3],[3,2,-1,3],[3,3,3,-3] ])
  v=vector((0,4,9))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.d (INGE1121)
  A=matrix([ [1,2,-3],[2,5,2],[3,-1,-4] ])
  v=vector((0,0,0))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.e (INGE1121)
  A=matrix([ [1,2,-1],[2,5,2],[1,4,7],[1,3,3] ])
  v=vector((0,0,0,0))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.f (INGE1121)
  A=matrix([ [1,1,1,1],[1,1,1,-1],[1,1,-1,1],[1,-1,1,1] ])
  v=vector((0,4,-4,2))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
```

```
30  # Exercice 1.1.h (INGE1121)
31  A=matrix([ [1,3,3],[1,3,4],[1,4,3] ])
32  v=vector((1,0,3))
33  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
34  # Exercice 1.1.i (INGE1121)
35  A=matrix([ [1,-3,2],[-3,3,-1],[2,-1,0] ])
36  v=vector((-6,17,3))
37  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
```

tex/sage/exo11.sage

Le résultat est le suivant :

```
The given matrix corresponds to the system
x1 - 2*x2 + 3*x3 - 2*x4 == 0
3*x1 - 7*x2 - 2*x3 + 4*x4 == 0
4*x1 + 3*x2 + 5*x3 + 2*x4 == 0
And the solutions are
[
[x1 == -23/16*r19, x2 == -5/16*r19, x3 == 15/16*r19, x4 == r19, x5 == r18]
]
The given matrix corresponds to the system
2*x1 + x2 - 2*x3 + 3*x4 == 0
3*x1 + 2*x2 - x3 + 3*x4 == 4
3*x1 + 3*x2 + 3*x3 - 3*x4 == 9
And the solutions are
[
[x1 == 3*r20 - 7, x2 == -4*r20 + 11, x3 == r20, x4 == 1]
]
The given matrix corresponds to the system
x1 + 2*x2 - 3*x3 == 0
2*x1 + 5*x2 + 2*x3 == 0
3*x1 - x2 - 4*x3 == 0
And the solutions are
[
[x1 == 0, x2 == 0, x3 == 0]
]
The given matrix corresponds to the system
x1 + 2*x2 - x3 == 0
2*x1 + 5*x2 + 2*x3 == 0
x1 + 4*x2 + 7*x3 == 0
x1 + 3*x2 + 3*x3 == 0
And the solutions are
[
[x1 == 9*r21, x2 == -4*r21, x3 == r21]
]
The given matrix corresponds to the system
x1 + x2 + x3 + x4 == 0
x1 + x2 + x3 - x4 == 4
x1 + x2 - x3 + x4 == -4
x1 - x2 + x3 + x4 == 2
And the solutions are
[
[x1 == 1, x2 == -1, x3 == 2, x4 == -2]
]
```

```
The given matrix corresponds to the system
x1 + 3*x2 + 3*x3 == 1
x1 + 3*x2 + 4*x3 == 0
x1 + 4*x2 + 3*x3 == 3
And the solutions are
[
[x1 == -2, x2 == 2, x3 == -1]
]
The given matrix corresponds to the system
x1 - 3*x2 + 2*x3 == -6
-3*x1 + 3*x2 - x3 == 17
2*x1 - x2 == 3
And the solutions are
[
[x1 == 37, x2 == 71, x3 == 85]
]
```

△

**Exemple 40.5**

Pour chacun des systèmes suivants $A \cdot X = B$,

(1) Résoudre le système par échelonnement,

(2) Calculer $A^{-1}$,

(3) Vérifier votre réponse en calculant $A^{-1}B$. Qu'êtes-vous censé obtenir ?

Les énoncés sont

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{40.2}$$

Nous utilisons Sage pour fournir la réponse. Le code suivant résout le système et donne l'inverse de la matrice :

```
1  # -*- coding: utf8 -*-
2
3  import outilsINGE
4
5  def exercise_1_3():
6    A=matrix([[2,1,-2],[3,2,2],[5,4,3]])
7    v=vector((10,1,4))
8    print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
9    print "Matrice inverse :"
10   print A.inverse()
```

tex/sage/exo13.sage

La sortie est ici :

```
The given matrix corresponds to the system
2*x1 + x2 - 2*x3 == 10
3*x1 + 2*x2 + 2*x3 == 1
```

```
5*x1 + 4*x2 + 3*x3 == 4
And the solutions are
[
[x1 == 1, x2 == 2, x3 == -3]
]
Matrice inverse :
[  2/7  11/7  -6/7]
[ -1/7 -16/7  10/7]
[ -2/7   3/7  -1/7]
```

△

**Exemple 40.6**

Sachant que $(-1,0,1,0)$ est un vecteur propre de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&0&1&1\\-1&1&2&1\\1&1&1&0\end{pmatrix} \tag{40.3}$$

(1) Diagonaliser $A$ au moyen d'une matrice orthogonale

(2) Écrire la forme quadratique $X^tAX$ sous forme d'une somme pondérée de carrés.

Calculons $Av$ afin de savoir la valeur propre associée au vecteur donné :

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&0&1&1\\-1&1&2&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\3\\0\end{pmatrix}. \tag{40.4}$$

La valeur propre est donc 3. Nous savons donc que $(\lambda-3)$ pourra être factorisé dans le polynôme caractéristique.

Pour le reste de l'exercice c'est standard et c'est résolu de la façon suivante :

```
1 # -*- coding: utf8 -*-
2
3 import outilsINGE
4
5 def exercise_6_5():
6   A=matrix(QQ,4,4,[2,1,-1,1,1,0,1,1,-1,1,2,1,1,1,1,0])
7   x=outilsINGE.QuadraticForm(A)
8   print x
```

tex/sage/exo65.sage

qui retourne

```
Hi guy; I'm the quadratic form associated with the matix
[ 2  1 -1  1]
[ 1  0  1  1]
[-1  1  2  1]
[ 1  1  1  0]
My eigenvalues and eigenvectors are :
3 -> (1, 0, -1, 0)
```

```
3 -> (0, 1, 2, 1)
-1 -> (1, 0, 1, -2)
-1 -> (0, 1, 0, -1)
I've the following orthonormal basis of eigenvectors :
(1/2*sqrt(2), 0, -1/2*sqrt(2), 0)
(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)
(1/6*sqrt(6), 0, 1/6*sqrt(6), -1/3*sqrt(6))
(-1/2*sqrt(1/3), 3/2*sqrt(1/3), -1/2*sqrt(1/3), -1/2*sqrt(1/3))
A matrix B such that B^tAB is diagonal is
[   1/2*sqrt(2)            1/2    1/6*sqrt(6) -1/2*sqrt(1/3)]
[             0            1/2              0  3/2*sqrt(1/3)]
[  -1/2*sqrt(2)            1/2    1/6*sqrt(6) -1/2*sqrt(1/3)]
[             0            1/2   -1/3*sqrt(6) -1/2*sqrt(1/3)]
I'm quite pretty in the following variables ...
x1 = -1/2*sqrt(1/3)*y4 + 1/2*sqrt(2)*y1 + 1/6*sqrt(6)*y3 + 1/2*y2
x2 = 3/2*sqrt(1/3)*y4 + 1/2*y2
x3 = -1/2*sqrt(1/3)*y4 - 1/2*sqrt(2)*y1 + 1/6*sqrt(6)*y3 + 1/2*y2
x4 = -1/2*sqrt(1/3)*y4 - 1/3*sqrt(6)*y3 + 1/2*y2
Look at me when I wear my cool variables
3*y1^2 + 3*y2^2 - y3^2 - y4^2
```

△

**Exemple 40.7**

Rechercher les extrema des fonctions suivantes

(1) $f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$

(2) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

(3) $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{4y^3}{3} - x^2 - 3x - 4y - 3$

Les corrigés sont créés par le script Sage `exo101.sage`

```
# -*- coding: utf8 -*-

import outilsINGE

def exercise_10_1_A():
   var('x,y')
   f(x,y)=2-sqrt(x**2+y**2)
   print outilsINGE.Extrema(f)
def exercise_10_1_B():
   var('x,y')
   f(x,y)=x**3+3*x*y**2-15*x-12*y
   print outilsINGE.Extrema(f)
def exercise_10_1_C():
   var('x,y')
   f(x,y)=x**3/3+4*y**3/3-x**2-3*x-4*y-3
   print outilsINGE.Extrema(f)
```

Des réponses :

(1)
```
The function :
   (x, y) |--> -sqrt(x^2 + y^2) + 2
```

```
Derivative x and y :
(x, y) |--> -x/sqrt(x^2 + y^2)
(x, y) |--> -y/sqrt(x^2 + y^2)
Hessian matrix :
[-sqrt(x^2 + y^2)*y^2/(x^4 + 2*x^2*y^2 + y^4)                          x*y/(x^2 + y^2)^
[                        x*y/(x^2 + y^2)^(3/2) -sqrt(x^2 + y^2)*x^2/(x^4 + 2*x^2*y^2 +
Critical points :
(0, 0)
At (0,0), the Hessian is
   power::eval(): division by zero
```

Ici nous voyons que Sage a du mal à calculer la matrice Hessienne en $(0,0)$. En effet, nous tombons sur une division par zéro. Pour résoudre l'exercice, il faut se rendre compte que la fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est toujours positive et est nulle seulement au point $(0,0)$. Donc $f$ est toujours plus petite ou égale à deux tandis que $f(0,0) = 2$. Le point est donc un maximum global.

(2)
```
The function :
(x, y) |--> x^3 + 3*x*y^2 - 15*x - 12*y
Derivative x and y :
(x, y) |--> 3*x^2 + 3*y^2 - 15
(x, y) |--> 6*x*y - 12
Hessian matrix :
[6*x 6*y]
[6*y 6*x]
Critical points :
(2, 1)
(1, 2)
(-1, -2)
(-2, -1)
At (2,1), the Hessian is
   (12, 6)
   (6, 12)
   Primary principal minors are [108, 12]
   Hessian positive defined
   local minimum
At (1,2), the Hessian is
   (6, 12)
   (12, 6)
   Primary principal minors are [-108, 6]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
At (-1,-2), the Hessian is
   (-6, -12)
   (-12, -6)
   Primary principal minors are [-108, -6]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
At (-2,-1), the Hessian is
   (-12, -6)
   (-6, -12)
   Primary principal minors are [108, -12]
   Hessian negative defined
   local maximum
```

(3)
```
The function :
```

```
(x, y) |--> 1/3*x^3 - x^2 + 4/3*y^3 - 3*x - 4*y - 3
Derivative x and y :
(x, y) |--> x^2 - 2*x - 3
(x, y) |--> 4*y^2 - 4
Hessian matrix :
[2*x - 2       0]
[      0     8*y]
Critical points :
(3, 1)
(-1, 1)
(3, -1)
(-1, -1)
At (3,1), the Hessian is
   (4, 0)
   (0, 8)
   Primary principal minors are [32, 4]
   Hessian positive defined
   local minimum
At (-1,1), the Hessian is
   (-4, 0)
   (0, 8)
   Primary principal minors are [-32, -4]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
At (3,-1), the Hessian is
   (4, 0)
   (0, -8)
   Primary principal minors are [-32, 4]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
At (-1,-1), the Hessian is
   (-4, 0)
   (0, -8)
   Primary principal minors are [32, -4]
   Hessian negative defined
   local maximum
```

△

**Exemple 40.8**

Déterminer les valeurs extrêmes et les points de selle des fonctions suivantes.

(1) $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$.
(2) $f(x,y) = e^{x^2+xy}$.
(3) $f(x,y) = e^x \sin(y)$.

Certains corrigés de cet exercice ont étés réalisés par Sage. Le script utilisé est `exo103.sage`

```
# -*- coding: utf8 -*-

import outilsINGE

```

```
def exercise_10_3_A():
  var('x,y')
  f(x,y)=x**2+4*x+y**2-2*y
  print outilsINGE.Extrema(f)

def exercise_10_3_H():
  var('x,y')
  f(x,y)=exp(x**2+x*y)
  print outilsINGE.Extrema(f)

def exercise_10_3_Q():
  var('x,y')
  f(x,y)=exp(x)*sin(y)
  print outilsINGE.Extrema(f)
```

tex/sage/exo103.sage

Des réponses :

(1)
```
The function :
(x, y) |--> x^2 + y^2 + 4*x - 2*y
Derivative x and y :
(x, y) |--> 2*x + 4
(x, y) |--> 2*y - 2
Hessian matrix :
[2 0]
[0 2]
Critical points :
(-2, 1)
At (-2,1), the Hessian is
   (2, 0)
   (0, 2)
   Primary principal minors are [4, 2]
   Hessian positive defined
   local minimum
```

(2)
```
The function :
(x, y) |--> e^(x^2 + x*y)
Derivative x and y :
(x, y) |--> (2*x*e^(x^2) + y*e^(x^2))*e^(x*y)
(x, y) |--> x*e^(x^2 + x*y)
Hessian matrix :
[(4*x*y*e^(x^2) + y^2*e^(x^2) + 2*(2*x^2 + 1)*e^(x^2))*e^(x*y)                    (x*y
[                  (x*y*e^(x^2) + (2*x^2 + 1)*e^(x^2))*e^(x*y)
Critical points :
(0, 0)
At (0,0), the Hessian is
   (2, 1)
   (1, 0)
   Primary principal minors are [-1, 2]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
```

(3)
```
The function :
(x, y) |--> e^x*sin(y)
Derivative x and y :
```

```
(x, y) |--> e^x*sin(y)
(x, y) |--> e^x*cos(y)
Hessian matrix :
[ e^x*sin(y)  e^x*cos(y)]
[ e^x*cos(y) -e^x*sin(y)]
Critical points :
   I'm not able to solve these equations.
   I'm not able to solve these equations.
At (   ,I), the Hessian is
   I'm not able to solve these equations.
At (   ,I), the Hessian is
   I'm not able to solve these equations.
```

Ici, Sage n'est pas capable de résoudre les équations qui annulent le jacobien. Les équations à résoudre sont pourtant faciles :

$$\begin{cases} e^x \cos(y) = 0 & \text{(40.5a)} \\ e^x \sin(y) = 0 & \text{(40.5b)} \end{cases}$$

Étant donné que l'exponentielle ne s'annule jamais, il faudrait avoir en même temps $\cos(y) = 0$ et $\sin(y) = 0$, ce qui est impossible. La fonction n'a donc aucun extrema local.

△

**Exemple 40.9**

Considérons la fonction

$$f(x, y) = xy^2 e^{-(x^2+y^2)/4}. \tag{40.6}$$

(1) Montrer qu'il y a une infinité de points critiques.

(2) Déterminer leur nature.

Voici la fonction Sage qui fournit les informations :

```
1 # -*- coding: utf8 -*-
2
3 import outilsINGE
4
5 def exercise_10_4():
6   var('x,y')
7   f(x,y)=x*y**2*exp(-(x**2+y**2)/4)
8   print outilsINGE.Extrema(f)
```

tex/sage/exo104.sage

La sortie est

```
The function :
(x, y) |--> x*y^2*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)
Derivative x and y :
(x, y) |--> -1/2*(x^2 - 2)*y^2*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)
(x, y) |--> -1/2*(x*y^3 - 4*x*y)*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)
Hessian matrix :
[                1/4*(x^3 - 6*x)*y^2*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2) 1/4*((x^2 - 2)*y^3 - 4*(x^2 - 2)*y
[1/4*((x^2 - 2)*y^3 - 4*(x^2 - 2)*y)*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)         1/4*(x*y^4 - 10*x*y^2 + 8*x
```

```
Critical points :
(r17, 0)
(-sqrt(2), -2)
(sqrt(2), -2)
(-sqrt(2), 2)
(sqrt(2), 2)
At (r17,0), the Hessian is
   (0, 0)
   (0, 2*r17*e^(-1/4*r17^2))
   Primary principal minors are [0, 0]
   Hessian positive semidéfinite
   I don't conclude
   Hessian negative semidefinite
   I don't conclude
At (-sqrt(2),-2), the Hessian is
   (4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
   (0, 4*sqrt(2)*e^(-3/2))
   Primary principal minors are [32*e^(-3), 4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
   Hessian positive defined
   local minimum
At (sqrt(2),-2), the Hessian is
   (-4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
   (0, -4*sqrt(2)*e^(-3/2))
   Primary principal minors are [32*e^(-3), -4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
   Hessian negative defined
   local maximum
At (-sqrt(2),2), the Hessian is
   (4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
   (0, 4*sqrt(2)*e^(-3/2))
   Primary principal minors are [32*e^(-3), 4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
   Hessian positive defined
   local minimum
At (sqrt(2),2), the Hessian is
   (-4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
   (0, -4*sqrt(2)*e^(-3/2))
   Primary principal minors are [32*e^(-3), -4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
   Hessian negative defined
   local maximum
```

Notez la présence de `r1` comme paramètres dans les solutions. Tous les points avec $y = 0$ sont des points critiques. Cependant, Sage [1] ne parvient pas à conclure la nature de ces points $(x, 0)$.

Notons que le nombre $f(x, y)$ a toujours le signe de $x$ parce que $y^2$ et l'exponentielle sont positives. Toujours ? En tout cas lorsque $x \neq 0$. Prenons un point $(a, 0)$ avec $a > 0$. Dans un voisinage de ce point, nous avons $f(x, y) > 0$ parce que si $a > 0$, alors $x > 0$ dans un voisinage de $a$. Le point $(a, 0)$ est un minimum local parce que $0 = f(a, 0) \leqslant f(x, y)$ pour tout $(x, y)$ dans un voisinage de $(a, 0)$.

De la même façon, les points $(a, 0)$ avec $a < 0$ sont des maxima locaux parce que dans un voisinage, la fonction est négative.

Le point $(0, 0)$ n'est ni maximum ni minimum local. C'est un point de selle.

△

1. ou, plus précisément, le programme que j'ai écrit avec Sage.

**Exemple 40.10**

Dériver les fonctions suivantes.

(1) $\sin\big(\ln(x)\big)$

(2) $\dfrac{\sin x}{x}$ ;

(3) $e^{x^2}$

(4) $\cos(x)^{\sin(x)}$

Le programme suivant par Sage résout l'exercice :

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

var('x')
f=sin(ln(x))
print f.diff(x)
f=sin(x)/x
print f.diff(x)
f=exp(x**2)
print f.diff(x)
f=cos(x)**(sin(x))
print f.diff(x)
```

tex/sage/corrDerive_0002.sage

Le résultat est :

```
cos(log(x))/x
cos(x)/x - sin(x)/x^2
2*x*e^(x^2)
(log(cos(x))*cos(x) - sin(x)^2/cos(x))*cos(x)^sin(x)
```

△

**Exemple 40.11**

Donner une approximation de ln(1.0001).

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.5.3, Release Date: 2010-09-04                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: numerical_approx(ln(1.0001))
0.0000999950003332973
```

△

# Chapitre 41

# Épilogue : la constante de Weiner

Nous voici à la fin du Frido. Nous avons étudié beaucoup de math, et beaucoup reste à voir. En guise de conclusion, je voudrais vous parler de la constante de Weiner, introduite dans []. Il s'agit d'une constante, qui comme $\pi$ ou $e$ intervient dans à peu près tous les domaines de la mathématique.

Comme toujours, il existe énormément de définitions équivalentes différentes ; nous choisissons celle-ci, motivée par le lemme 24.54 [1] .

**Définition 41.1.**
*La **constante de Weiner** est l'unique entier $p$ tel que l'espace $L^p$ soit un espace de Hilbert.*

Cette constante intervient de façon centrale dans de nombreux résutats dans tous les domaines ; nous en citons quelques uns.

(1) La moyenne de tout couple de réels peut être calculée ne divisant leur somme par la constante de Weiner [2].

(2) La constante de Weiner donne l'indice du groupe alterné dans le groupe symétrique pour tous les ordres, théorème 8.41.

(3) La constante de Weiner donne une borne inférieure optimale pour l'ensemble des nombres premiers.

(4) L'unique point fixe non trivial de la fonction factorielle est la constante de Weiner.

(5) La fameuse droite critique de la conjecture de Riemann est donnée par l'inverse de la constante de Weiner.

(6) Tout automorphisme d'anneau a un polynôme minimal dont le degré est donné par la constante de Weiner.

(7) Pour l'anecdote, la constante de Weiner donne le rapport $\tau/\pi$.

(8) L'égalité $ab = 0$ dans un anneau n'implique pas spécialement $a = 0$ ou $b = 0$ lorsque la caractéristique de l'anneau est égale à la constante de Weiner, et seulement dans ce cas.

D'aucuns pourraient objecter que tout cela n'est que fantaisie et trivialité. Il n'en est rien. La preuve que la constante de Weiner est centrale en mathématique est précisément qu'elle avait déjà un nom et un symbole réservé bien avant le début de l'histoire des mathématiques.

Le fait est que toutes les mathématiques que vous connaissez se basent sur les nombres entiers ; cela n'est pas du tout une trivialité.

1. Et surtout par la note du problème 25. Si vous pouviez rédiger quelque chose à ce sujet, ce serait sympa.

2. C'est historiquement la première propriété énoncée de la constante de Weiner ; elle suggère également une notion de constante de Weiner généralisée pour moyenner un nombre arbitraire de nombres. La construction des nombres de Weiner généralisés est en projet dans la section 2.2.

# Chapitre 42

# GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008
Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

http://fsf.org/

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

## Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom : to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation : a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals ; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

## APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical

connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The "**publisher**" means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties : any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

## COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts : Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

## MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version :

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
D. Preserve all the copyright notices of the Document.
E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.
I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another ; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

## COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original

documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

## COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

## TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

## FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/ .

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

## RELICENSING

"Massive Multiauthor Collaboration Site" (or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration" (or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

"Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is "eligible for relicensing" if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

## ADDENDUM : How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page :

> Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the “with . . . Texts.” line with this :

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

# Bibliographie


[1] L'auteur de ces lignes. Invention personnelle, lire avec prudence et merci de me dire si c'est correct.

[2] Arnaud Girand. Développements pour l'agrégation externe de mathématiques. 18 août 2012. URL http://perso.univ-rennes1.fr/arnaud.girand/pdf/dvp_agreg/dvp.pdf.

[3] Rémi Peyre and Frédéric Simon. Travaux dirigés de probabilités. 2009. URL http://www.normalesup.org/~rpeyre/pro/enseignement/td09pbas-e.pdf.

[4] Sylvie Benzoni. Distributions tempérées. 13 novembre 2013. URL http://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/Agreg/Distributions.pdf.

[5] A. Casamayou, N Cohen, G. Connan, T. Dumont, and Maltey F. Fousse, L., and Mezzarobba M. Meulien, M., C. Pernet, M. N. Thiéry, and Zimmermann P.

[6] Wikipédia. Axiome du choix — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Axiome_du_choix&oldid=116151439. [En ligne ; Page disponible le 9-septembre-2015].

[7] O. Teytaud, C. Antonini, J.-B. Bardet, J.-F. Quint, M. De Crisenoy, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, and A. Chateau. Les mathématiques pour l'Agrégation. 21 mai 2002. http://les.mathematiques.free.fr/pdf/agreg.zip.

[8] Christine Laurent-Thiébaut. Aximatique des nombres. URL http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ax/ax.pdf.

[9] Patrice Tauvel. *Cours d'algèbre*. Dunod, 1999. ISBN 2-10-005490-3.

[10] Frédéric Paulin. Topologie, analyse et calcul différentiel. 2008-2009. http://www.math-question-center.com/publications-pdf/cours_d'analyse+topologie_et_calcul_differntiel_Frederic_Paulin.pdf.

[11] Peter Hendrikus Kropholler. Groups rings and fields. 2004-2005. http://www.maths.gla.ac.uk/~phk/ulearning.pdf.

[12] Anonyme. Théorie des groupes. 2008. http://theoriedesgroupes.perso.sfr.fr/cours/theoriePDF.pdf.

[13] Wikiversité. Arithmétique/divisibilité et congruences dans z — wikiversité,, 2017. URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Arithm%C3%A9tique/Divisibilit%C3%A9_et_congruences_dans_Z&oldid=650617. [En ligne ; accédé le 25-mai-2017].

[14] Mongi Amorri. Théorème de bezout, théorème de gauss. http://lux.lyceefrancais-brasilia.net/documents/cours/ts/bezout_gauss.pdf.

[15] Gilles Costantini. pgcd et ppcm dans $\mathbb{Z}$, théorème de Bezout, applications. . http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/bezout.pdf.

[16] Wikipédia. Lemme d'euclide — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Lemme_d%27Euclide&oldid=112046247. [En ligne ; Page disponible le 28-juin-2015].

[17] Wikipédia. Théorème fondamental de l'arithmétique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_fondamental_de_l%27arithm%C3%A9tique&oldid=110036012. [En ligne ; Page disponible le 26-juin-2015].

[18] title = Algèbre générale et algèbre linéaire year = 6 mars 2015 url = "http ://www.math.univ-paris-diderot.fr/_media/formations/prepa/agreginterne/polycopiealgebre.pdf" Skandalis, Georges.

[19] Jean Luc W. groupe-quotient et création de nouveaux sous-groupes. 2007. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion:Groupe_quotient.

[20] Wikipédia. Théorème de cauchy (groupes) — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2017. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Cauchy_(groupes)&oldid=140167231. [En ligne ; Page disponible le 17-septembre-2017 ].

[21] Alexei Pantchichkine. Algèbre2. 2004-2005. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~panchish/05ensl.pdf.

[22] François Combes. *Algèbre et géométrie*. Bréal, 2003. ISBN 2-84291-202-0.

[23] Niels Borne. Fiche numéro 2 : morphismes, sous-groupe distingué, quotient. 2009-2012. http://math.univ-lille1.fr/~borne/Enseignement/TD2_M308.pdf.

[24] Pierre Lissy. Théorème de Jordan-Hölder. 6 avril 2010. http://www.ljll.math.upmc.fr/~lissy/Agreg/developpements/JordanHolder.pdf.

[25] Fabrice Castel. Groupes finis. 2009-2012. http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Groupes_finis.pdf.

[26] Jean Delcourt. Groupes-permutations. URL http://delcourt.u-cergy.fr/StrucAlg/chap_5.pdf.

[27] Marc Sage. Sons, fréquences, harmoniques, tons : le compromis du piano. http://www.normalesup.org/~sage/Musique/Harmonie.pdf.

[28] Wikipédia. Caractéristique d'un anneau — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2017. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Caract%C3%A9ristique_d%27un_anneau&oldid=136316021. [En ligne ; Page disponible le 22-mai-2017].

[29] Wikipédia. Algèbre sur un corps — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Alg%C3%A8bre_sur_un_corps&oldid=98992040. [En ligne ; Page disponible le 6-mars-2014].

[30] Anonyme. sans titre. http://www.ac-grenoble.fr/champo/IMG/arithmetique.pdf.

[31] Wikipédia. Primalité dans un anneau — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Primalit%C3%A9_dans_un_anneau&oldid=127919489. [En ligne ; Page disponible le 30-mai-2017].

[32] Danny-Jack Mercier. Anneaux factoriels. 5 octobre 2003. http://megamaths.perso.neuf.fr/cours/ari/cann0001.pdf.

[33] Wikipédia. Anneau euclidien — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Anneau_euclidien&oldid=126145344. [En ligne ; Page disponible le 1-juin-2017].

[34] Sébastien Pellerin. Développements d'algèbre pour l'oral de l'agrégation. . http://pellerin.xyz/doc/agreg/algebre.pdf.

[35] Wikipédia. Triplet pythagoricien — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Triplet_pythagoricien&oldid=114628048. [En ligne ; Page disponible le 24-juin-2015].

[36] Wikipédia. Primalité dans un anneau — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Primalit%C3%A9_dans_un_anneau&oldid=127919489. [En ligne ; Page disponible le 1-juin-2017].

[37] Wikipédia. Lemme de gauss (polynômes) — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Lemme_de_Gauss_(polyn%C3%B4mes)&oldid=112056131. [En ligne ; Page disponible le 1-juin-2017].

[38] Wikipédia. Corps ordonné — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Corps_ordonn%C3%A9&oldid=125185412. [En ligne ; Page disponible le 22-mai-2017].

[39] Automorphisme de R et continuité. 2008. URL http://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/261451-automorphisme-de-r-continuite.html.

[40] Sylvain Duchet. Congrugence dans $\mathbb{Z}$, anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, applications. http://epsilon.2000.free.fr/Csup/congruences.pdf.

[41] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Le théorème de wedderburn. . URL http://www.les-mathematiques.net/d/a/w/node5.php.

[42] Wikipédia. Extension de corps — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Extension_de_corps&oldid=89826304. [En ligne ; Page disponible le 1-mai-2013].

[43] Patrick Polo. Extensions normales, séparables, galoisiennes. corps fini. 2007-2008. http://www.math.jussieu.fr/~polo/M1/ATG07chVIII.pdf.

[44] Olivier Dodane. Le théorème de zéros de Hilbert. 8 octobre 2007. http://www.math.ens.fr/~debarre/nullstellensatz.pdf.

[45] Patrick Polo. Polynômes symétriques et résolutions d'équations. 13 décembre 2004. http://www.math.jussieu.fr/~polo/M1/ATGch9.pdf.

[46] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. Sur c tout est connexe ! URL http://objagr.gforge.inria.fr/documents/files/connexite-polynome.pdf.

[47] Wikipédia. Polynôme cyclotomique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Polyn%C3%B4me_cyclotomique&oldid=93751495. [En ligne ; Page disponible le 25-juin-2013].

[48] Adam Parusinski. Théorème de Dirichlet (version faible). 2010-2011. http://math.unice.fr/~parus/AGREG/Dev/dirichlet.pdf.

[49] Michel Merle. corps finis. 2005-2006. http://www-math.unice.fr/~merle/Complements/corps_finis.pdf.

[50] Gabriel Peyré. Corps finis. 2007. https://objectifagregation.github.io/.

[51] François Rodier. Corps finis. http://iml.univ-mrs.fr/~rodier/Cours/RappelCorpsfinis.pdf.

[52] Stephane Vento. La loi de réciprocité quadratique. 2005. http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/nourdin/LeSiteDeLAgregatif/vento2.pdf.

[53] Christian Squarcini. Anneaux factoriels. . URL http://christian-squarcini.pagesperso-orange.fr/AgregInterne/Anneauxcorps/3_2.pdf.

[54] Wikipédia. Fonction de möbius — wikipédia, l'encyclopédie libre, mai 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction_de_M%C3%B6bius&oldid=91236321. [En ligne ; Page disponible le 1-mai-2013].

[55] Wikipédia. Corps fini — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Corps_fini&oldid=92489466. [En ligne ; Page disponible le 1-mai-2013].

[56] Wikipédia. Nombre constructible — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_constructible&oldid=103130793. [En ligne ; Page disponible le 13-mai-2014].

[57] Wikipédia. Théorème de wantzel — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Wantzel&oldid=103220511. [En ligne ; Page disponible le 13-mai-2014].

[58] Wikipédia. Nombre de fermat — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_de_Fermat&oldid=103080861. [En ligne ; Page disponible le 18-juin-2014].

[59] El Hage. Équation générale de degré $n$. http://les.mathematiques.free.fr/pdf/gal10.pdf.

[60] Wikipédia. Théorème fondamental de l'algèbre — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2017. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_fondamental_de_l%27alg%C3%A8bre&oldid=139327371. [En ligne ; Page disponible le 20-août-2017 ].

[61] Éric Brunelle. Norme matricielle. http://www.dms.umontreal.ca/~math1600/6Supplement/Normematricielle-1.pdf.

[62] Guillaume Carlier. Analyse fonctionnelle. 2009-20010. URL https://www.ceremade.dauphine.fr/~carlier/poly2010.pdf.

[63] Raz Kupferman. Topological vector spaces. URL http://www.ma.huji.ac.il/~razk/iWeb/My_Site/Teaching_files/TVS.pdf.

[64] Ron Freiwald. Chapter iv completeness and compactness. URL http://www.math.wustl.edu/~freiwald/ch4.pdf.

[65] Huiqiang Jiang. Functional analysis. URL http://www.math.pitt.edu/~hqjiang/2303/functional.pdf.

[66] Nicolas Bourbaki. General topology 2 chapters 5 - 10. URL https://books.google.be/books?id=bQwhdmL6IjUC. Oui je sais c'est une honte de citer Bourbaki en anglais en pointant vers une version partielle disponible sur Googlebooks. Mais c'est surtout une honte que ce livre ne soit pas disponible gratuitement en version électronique.

[67] Wikipédia. Suite de cauchy — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Suite_de_Cauchy&oldid=98046451. [En ligne ; Page disponible le 11-mars-2014].

[68] Wikipédia. Espace séparé — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Espace_s%C3%A9par%C3%A9&oldid=97013072. [En ligne ; Page disponible le 27-septembre-2013].

[69] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Généralités. . URL http://www.les-mathematiques.net/a/a/b/node19.php.

[70] Emmanuel Vieillard Baron. Sous-espaces compacts. 2001. URL http://www.les-mathematiques.net/a/t/c/node5.php.

[71] Wikipédia. Théorème de borel-lebesgue — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Borel-Lebesgue&oldid=96560796. [En ligne ; Page disponible le 11-mars-2014].

[72] Wikipédia. Continuité — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Continuit%C3%A9&oldid=96548980. [En ligne ; Page disponible le 17-septembre-2013].

[73] Wikipédia. Théorème des fermés emboités — Wikipédia, l'encyclopédie libre, 2012. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_des_ferm%C3%A9s_emboit%C3%A9s&oldid=85987870. [En ligne ; Page disponible le 1-avril-2013].

[74] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Complété d'un espace métrique. . URL http://www.les-mathematiques.net/a/a/b/node26.php.

[75] Zied Ammari. Analyse fonctionnelle : Pré-requis. http://perso.univ-rennes1.fr/zied.ammari/other/pdf/chapitre1.pdf.

[76] Wikipédia. Connexité (mathématiques) — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Connexit%C3%A9_(math%C3%A9matiques)&oldid=123744973. [En ligne ; Page disponible le 26-avril-2016].

[77] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Connexité. . URL http://www.les-mathematiques.net/a/a/b/node23.php.

[78] Bill Casselman. Cauchy's criterion for convergence. 2000. http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m220-00/cauchy.pdf.

[79] Jean Saint Raymond. Semi-normes. URL http://www.math.jussieu.fr/~raymond/preprints/seminormes.pdf.

[80] Stéphane Mischler. Semi-norme et introduction aux evtlcs. Février 2007. URL https://www.ceremade.dauphine.fr/~mischler/Enseignements/AFAENS/Chap1evtlcs.pdf.

[81] Wikipédia. Semi-norme — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Semi-norme&oldid=89981857. [En ligne ; Page disponible le 22-septembre-2013].

[82] Wikipédia. Théorème de baire — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Baire&oldid=95077621. [En ligne ; Page disponible le 4-août-2013].

[83] Daniel Ferrand. Étendre le corps. Juillet 2007. URL http://webusers.imj-prg.fr/~daniel.ferrand/ExtCorps.pdf.

[84] Marc Sage. Dualité en dimension finie. 24 octobre 2005. http://www.normalesup.org/~sage/Enseignement/Cours/DualDimFinie.pdf.

[85] Wikipédia. Théorème de cauchy (groupes) — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Cauchy_(groupes)&oldid=122684298. [En ligne ; Page disponible le 1-août-2017 ].

[86] Wikiversité. Groupe (mathématiques)/exercices/premiers résultats sur les groupes simples — wikiversité,, 2016. URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Groupe_(math%C3%A9matiques)/Exercices/Premiers_r%C3%A9sultats_sur_les_groupes_simples&oldid=597195. [En ligne ; accédé le 31-mai-2017 ].

[87] Wikiversité. Groupe (mathématiques)/automorphismes d'un groupe cyclique — wikiversité,, 2016. URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Groupe_(math%C3%A9matiques)/Automorphismes_d%27un_groupe_cyclique&oldid=595608. [En ligne ; accédé le 3-juin-2017 ].

[88] Structure des groupes d'ordre $pq$. URL http://agregmaths.free.fr/doc/docs_nicolas/developpementAlgebre/grouped'ordrepq.pdf.

[89] Wikipédia. Permutation — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Permutation&oldid=89805226. [En ligne ; Page disponible le 24-juin-2013].

[90] Olivier Debarre. Td4 : produit semi-direct. 2015-2016. URL http://www.math.ens.fr/~debarre/TDC4.pdf.

[91] Christophe Mourougane. Théorie des groupes et géométrie. 2009-2010. http://perso.univ-rennes1.fr/christophe.mourougane/enseignements/2009-10/THGG/poly.groupes.pdf.

[92] Michel Emsalem and Pierre Dèbes. Théorème de sylow. http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00023.pdf.

[93] N.G.J. Pagnon. Le groupe symétrique et le groupe alterné. URL http://amatheux.com/IMG/pdf/groupe_symetrique.pdf.

[94] Emmanuel Vieillard Baron. Déterminant d'une matrice, d'une application linéaire. 2001. http://www.les-mathematiques.net/b/e/d/node5.php.

[95] Robert Rolland. Le théorème de Müntz-szász. . http://megamaths.perso.neuf.fr/rr/fichexo_201.pdf.

[96] Wikipédia. Résultant — wikipédia, l'encyclopédie libre, Mai 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=R%C3%A9sultant&oldid=90109864. [En ligne ; Page disponible le 24-mai-2013].

[97] Jean-Etienne Rombaldi. Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. applications. . http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AgregInterne/Oral1/110.pdf.

[98] Rached Mneimé. *Réduction des endomorphismes*. Calvage et Mounet, 2006. ISBN 2-916352-01-5.

[99] Matthieu Romagny. Endomorphismes cycliques. 2012. URL https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/dvt/endom_cycliques.pdf.

[100] Callus. URL http://math.stackexchange.com/questions/1829332/prove-that-if-v-is-finite-dimensional-then-v-is-even-dimensional.

[101] La taverne de l'Irlandais. De la réduction des endomorphismes. 2001. URL http://tanopah.jo.free.fr/epilogues/reduction.pdf.

[102] Wikipédia. Trigonalisation — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Trigonalisation&oldid=109085753. [En ligne ; Page disponible le 22-décembre-2014].

[103] Henry C. King. Unitary diagonalization of matrices. http://www-users.math.umd.edu/~hck/Normal.pdf.

[104] David Delaunay. Nilpotence. 10 juillet 2014. URL http://mp.cpgedupuydelome.fr/pdf/Réductiondesendomorphismes-Nilpotence.pdf.

[105] G Donald Allen. Lectures on linear algebras. 2004. http://www.math.tamu.edu/~dallen/m640_03c/readings.htm.

[106] Wikipedia. Spectral theorem — wikipedia, the free encyclopedia, 2013. URL http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Spectral_theorem&oldid=575488135. [Online ; accessed 21-October-2013].

[107] Michel Granget. Normes matricielles, conditionnement. URL http://math.univ-angers.fr/~granger/ananum/Chapitre_II.pdf.

[108] Maxime Pouvreau. Pseudo-réduction simultanée. 2013-2014. URL http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Pseudored.pdf.

[109] Robert Rollan. Produit tensorile d'espaces vectoriels. URL http://robert.rolland.acrypta.com/telechargements/algebre/tensor.pdf.

[110] Ministère de l'éducation nationale. Rapport de jury de concours – agrégation de mathématiques, concours externe. 2011. http://agreg.org/Rapports/rapport2011provisoire.pdf.

[111] Hervé Carrieu, Maurice Fadel, Etienne Fieux, Patrice Lassère, and Frédéric Rodriguez. Autour des matrices de Frobenius ou compagnon. 2007. http://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/pdf/vfcomp.pdf.

[112] Grégory Vial. Autour du théorème des invariants de similitude. Octobre 2005. http://w3.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/gregory.vial/files/cplts/ivs.pdf.

[113] Arnaud Moncet. Invariants de similitude. http://blogperso.univ-rennes1.fr/arnaud.moncet/public/IVS.pdf.

[114] Commutant d'un endomorphisme. . URL http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Commutant.pdf.

[115] Bernard Alken. Dans un commentaire de «dimension du commutant d'une matrice». 2009. URL http://www.mathoman.com/index.php/1538-dimension-du-commutant-d-une-matrice.

[116] Wikipédia. Théorème de burnside (problème de 1902) — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Burnside_(probl%C3%A8me_de_1902)&oldid=98510166. [En ligne ; Page disponible le 2-novembre-2015].

[117] Pierre Monmarché. Développements. 18 mai 2011. URL http://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/1-total.pdf.

[118] Wikipédia. Forme quadratique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Forme_quadratique&oldid=103591878. [En ligne ; Page disponible le 7-mai-2014].

[119] Christian Squarcini. Dégénérescence. 2005. URL http://christian-squarcini.pagesperso-orange.fr/AgregInterne/Algebrelineaire/2_2.pdf.

[120] William F. Trench. Introduction to real analysis. 2010. http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH_REAL_ANALYSIS.PDF.

[121] Wikipédia. Norme d'opérateur — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Norme_d%27op%C3%A9rateur&oldid=125963366. [En ligne ; Page disponible le 26-avril-2017].

[122] Wikipedia. Spectral radius — wikipedia, the free encyclopedia, 2017. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Spectral_radius&oldid=758072091. [Online ; accessed 26-April-2017].

[123] Pierre-Emmanuel Jabin. Analyse numérique, correction du TD 8. 2008-2009. URL http://math.unice.fr/~jabin/CTD3-8.pdf.

[124] Christian Squarcini. Applications linéaires. . URL http://christian-squarcini.pagesperso-orange.fr/AgregInterne/Topo/4_3.pdf.

[125] Espaces métriques et espaces normés. URL http://www.les-mathematiques.net/a/a/b/node4.php.

[126] Gilles Costantini. Espaces vectoriels de dimension infinie, normes usuelles, équivalence de normes. . URL http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/evn.pdf.

[127] Gallouët !Thierry. Norme et conditionnement d'une matrice. URL https://www.i2m.univ-amu.fr/~gallouet/licence.d/anum.d/anum-tg2.pdf.

[128] URL https://www.torproject.org/about/torusers.html.en.

[129] URL https://www.torproject.org/projects/torbrowser.html.en.

[130] Wikipédia. Formule de stirling — wikipédia, l'encyclopédie libre, Mai 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Formule_de_Stirling&oldid=93224272. [En ligne ; Page disponible le 20-mai-2013].

[131] H. Jerome Keisler. Elementaty calculus, an infinitesimal approach. 2010. http://www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-810.pdf.

[132] Wikipédia. Suite arithmético-géométrique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Suite_arithm%C3%A9tico-g%C3%A9om%C3%A9trique&oldid=88168841. [En ligne ; Page disponible le 16-juin-2013].

[133] Gabriel Nagy. Operator theory in Hilbert spaces. URL https://www.math.ksu.edu/~nagy/real-an/2-07-op-th.pdf.

[134] Marie-Claure David, Frédéric Haglund, and Daniel Perrin. Géométrie affine. 8 décembre 2003. http://webens.math.u-psud.fr/~mcld/GAEL/Gael/bar.pdf.

[135] Jean-Marc Decauwert. Géométrie affine. 8 novembre 2011. URL http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ga/ga.pdf.

[136] Wikiversité. Barycentre/théorème de l'associativité du barycentre — wikiversité,, 2016. URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Barycentre/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_l%27associativit%C3%A9_du_barycentre&oldid=582092. [En ligne ; accédé le 16-janvier-2017].

[137] Wikipédia. Opérations sur les dérivées — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Op%C3%A9rations_sur_les_d%C3%A9riv%C3%A9es&oldid=99099598. [En ligne ; Page disponible le 28-juillet-2014].

[138] Wikipédia. Opérations sur les dérivées — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Op%C3%A9rations_sur_les_d%C3%A9riv%C3%A9es&oldid=99099598. [En ligne ; Page disponible le 10-avril-2016].

[139] Wikipédia. Théorème de rolle — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Rolle&oldid=132483699. [En ligne ; Page disponible le 28-décembre-2016].

[140] Wikipédia. Règle de l'hôpital — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=R%C3%A8gle_de_L%27H%C3%B4pital&oldid=131491717. [En ligne ; Page disponible le 29-décembre-2016].

[141] Jerome E. Marsden and Tudor S. Ratiu. Manifolds, tensor analysis and applications. 2002. URL http://www.springer.com/gp/book/9780387967905.

[142] F. Laudenbach. *Calcul différentiel et intégral*. les Éd. de l'École polytechnique, 2000. ISBN 9782730207249. URL http://books.google.fr/books?id=Ws9A7ZoRJNEC.

[143]

[144] Wikiversité. Calcul différentiel/théorèmes utiles — wikiversité,, 2017. URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Calcul_diff%C3%A9rentiel/Th%C3%A9or%C3%A8mes_utiles&oldid=657239. [En ligne ; accédé le 10-juillet-2017 ].

[145] Giuseppe De Marco. *Analisi due*. 1999.

[146] Wikipédia. Convergence uniforme — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Convergence_uniforme&oldid=95493463. [En ligne ; Page disponible le 15-octobre-2013].

[147] Suites et séries de fonctions. URL http://blog.psi945.fr/public/maths-psi/cours-psi-suites-series-fonctions.pdf.

[148] F. Poupaud. Analyse fonctionnelle pour la licence. URL http://math.unice.fr/~rascle/pdffiles/coursanapp/ana-fonc.pdf.

[149] Rached Mneimé and Frédéric Testard. *Groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986. ISBN 2-7056-6040-2.

[150] Yoann Gelineau. Générateurs du groupe linéaire. . URL http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/devagreg/Generateurs_Groupe_Lineaire.pdf.

[151] Sandrine Caruso. Générateurs de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$. URL http://sandrine.toonywood.org/pageperso/agreg/geneSL.pdf.

[152] Wikipédia. Théorème de cayley-hamilton — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Cayley-Hamilton&oldid=104470625. [En ligne ; Page disponible le 10-juin-2014].

[153] David Monniaux. 9 juin 2014. URL http://david.monniaux.free.fr/dotclear/index.php/post/2014/06/09/Mémoire-à-effaçage-rapide. David Monniaux esquisse la preuve dans un commentaire à cette note.

[154] Pierre Lissy. Décomposition polaire. 30 avril 2010. URL http://www.ljll.math.upmc.fr/~lissy/Agreg/developpements/DecPol.pdf.

[155] Wikipédia. Décomposition polaire — wikipédia, l'encyclopédie libre, avril 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=D%C3%A9composition_polaire&oldid=90240040. [En ligne ; Page disponible le 24-avril-2013].

[156] Jean-Etienne Rombaldi. Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel. applications. . http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AgregInterne/Oral1/120.pdf.

[157] Brice Loustau. Développements d'algèbre pour l'agrégation. 2008. URL http://brice.loustau.free.fr/deval.pdf.

[158] Michel Coste. Sous-groupes compacts du groupe linéaire. 29 septembre 2006. URL http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/ssgrpecompact.pdf.

[159] Daniel Li. Notions fondamentales de la théorie des probabilités. . http://labomathlens.free.fr/Liens/ProbaM1/PROBA01.pdf.

[160] Daniel Saada. Tribu de borel et tribu de baire d'un espace topologique. 2009. URL http://www.daniel-saada.eu/fichiers/16-Tribus_de_Baire.pdf.

[161] Daniel Li. Construction de la mesure de lebesgue. 28 javier 2008. http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=11183 http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=9387.

[162] ProofWiki. Outer measure of limit of increasing sequence of sets — proofwiki,, 2012. URL http://www.proofwiki.org/w/index.php?title=Outer_Measure_of_Limit_of_Increasing_Sequence_of_Sets&oldid=85952. [Online ; accessed 2-February-2014].

[163] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Quelques résultats d'unicité. . URL http://www.les-mathematiques.net/a/i/d/node1.php#T42.

[164] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Ensembles négligeables et complétion de tribus. . URL http://www.les-mathematiques.net/a/i/c/node1.php.

[165] Wikipédia. Complétion d'une mesure — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Compl%C3%A9tion_d%27une_mesure&oldid=89819650. [En ligne ; Page disponible le 27-mars-2014].

[166] Daniel Li. Tribus et mesures. 24 mars 2011. http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=11183 http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=9387.

[167] Gerald Teschl. Topics in real and functional analysis. 2013. URL http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/fa.pdf.

[168] Emmanuel Vieillard Baron. Les fonctions mesurables. 2001. URL http://www.les-mathematiques.net/a/i/b/node1.php.

[169] Wikipédia. Fonction étagée — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction_%C3%A9tag%C3%A9e&oldid=104836104. [En ligne ; Page disponible le 6-septembre-2015].

[170] B. Mauray. Intégration jusqu'au théorème de Lebesgue. 2006. URL https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/agreg/Textes/Lebesgue.pdf.

[171] Gilles Dubois. URL http://dubois.gilles.pagesperso-orange.fr/analyse_reelle/intlimites.html.

[172] Daniel Choï. Mathématiques pour la mécanique. 2008. http://www.meca.unicaen.fr/Enseignement/Document/CoursChoi/mathmeca.pdf.

[173] Daniel Li. Construction de l'intégrale de lebesgue. 10 février 2011. http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=11183 http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=9387.

[174] Yao Jianfeng. Statistique et logiciels. 2010. http://perso.univ-rennes1.fr/jian-feng.yao/pedago/statlog/.

[175] Daniel Li. Théorème de radon-nikodým et applications. . http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=11183 http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=9387.

[176] Bruce Driver. Analysis tools with applications. April 10, 2003. URL http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/240-01-02/Lecture_Notes/anal.pdf.

[177] Daniel Li. Intégration sur un espace produit. 29 mars 2011. http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=11183 http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=9387.

[178] B. Mauray. Préparation à l'agrégation, analyse. 2011. http://www.math.jussieu.fr/~maurey/agreg/index.html.

[179] Thierry Gallouët and Raphaèle Herbin. Mesure, intégration, probabilités. 2012. http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/licence.d/mes-int-pro.pdf.

[180] Wikipédia. Ensemble de vitali — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Vitali&oldid=100925109. [En ligne ; Page disponible le 9-septembre-2015].

[181] John Hunter. Measure theory. 2011. URL https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_notes.pdf.

[182] Bruno Demange. Théorème de changement de variables. 2012. URL https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demange/integration/2012/integration-chap5.pdf.

[183] Daniel Li. Changement de variables dans les intégrales sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. 8 juin 2010. URL http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/Integration/change-v.pdf.

[184] Wikipédia. Intégrale impropre — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Int%C3%A9grale_impropre&oldid=103902526. [En ligne ; Page disponible le 5-août-2014].

[185] Philippe Spindel. Éléments de géométrie différentielle pour la mécanique analytique et le gravitation. Novembre 2010. https://portail.umons.ac.be/EN2/universite/facultes/fs/services/institut_physique/mecanique_et_gravitation/Documents/Textespédagogiques/geodiff.pdf.

[186] Olivier Casterá. Différentielles totales exactes. http://o.castera.free.fr/pdf/Differentielle_totale_exacte.pdf.

[187] Wikipédia. Lemme de hadamard — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Lemme_de_Hadamard&oldid=90659396. [En ligne ; Page disponible le 14-juillet-2014].

[188] Intégration de fractions rationnelles. URL http://blascheck.franck.free.fr/IMG/pdf/IntegFracRat.pdf.

[189] Romain Boillaud. Séries de fonctions. 2010-2011. URL http://www.rblld.fr/cours/chap6.pdf.

[190] Gérard Eguether. Ex-séries entières. URL http://iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/EX.pdf.

[191] Georges Skandalis. Analyse, résumés et exercices. 6 mars 2015. URL https://www.math.univ-paris-diderot.fr/_media/formations/prepa/agreginterne/polycopieanalyse.pdf.

[192] ENS Cachan. Théorème de stabilité de Lyapunov. URL http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Lyapunov.pdf.

[193] Transformation laissant invariante une forme quadratique. URL http://www.ilemaths.net/forum-sujet-500814.html.

[194] Éric Jourdain. Angles. URL https://perso.univ-rennes1.fr/eric.jourdain/GEEU/Cours/Angles.pdf.

[195] David Cimasoni. Cours de géométrie I, semestre de printemps. Printemps 2014. URL http://www.unige.ch/math/folks/cimasoni/GeometrieI.pdf.

[196] Christophe Mourougane. Théorie des groupes et géométrie. 2008-2009. http://perso.univ-rennes1.fr/christophe.mourougane/enseignements/2008-9/THGG/poly.groupes.pdf.

[197] Philippe Picart. Définition de cos et sin par les séries entières. URL http://trucsmaths.free.fr/telech/exp_cos_sin.pdf.

[198] Alfred Gray. Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica. 1998. URL http://webmath2.unito.it/paginepersonali/sergio.console/CurveSuperfici/.

[199] Wikipédia. Pi — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2017. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Pi&oldid=133197907. [En ligne ; Page disponible le 3-janvier-2017].

[200] Daniel Perrin. Isométries du plan. URL https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/isometries11-12.pdf.

[201] Groupes diédraux. http://theoriedesgroupes.perso.sfr.fr/cours/Diedraux.pdf.

[202] Pierre Lissy. 6 avril 2010. URL http://www.ljll.math.upmc.fr/~lissy/Agreg/developpements/Died.pdf.

[203] Pierre Renfer. Roulettes et colliers. http://les.mathematiques.free.fr/pdf/collier.pdf.

[204] Wikipédia. Angle — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Angle&oldid=130370952. [En ligne ; Page disponible le 15-novembre-2016].

[205] B. Guesmi. Théorème de l'angle inscrit. URL http://s999cdfd874dd6835.jimcontent.com/download/version/1427398317/module/5509391568/name/theoremedel'arccapable.pdf1.pdf.

[206] Frédéric Hélein. Géométrie euclidienne. 2005-2006. URL `https://webusers.imj-prg.fr/~frederic.helein/cours/euclide.pdf`.

[207] Laurent Dietrich. Les sous-groupes finis de so(3). 16 mai 2011. URL `http://www.math.cmu.edu/~ldietric/doc/ssgrso3.pdf`.

[208] Sous groupes finis de so(3,r). 2013-2014. URL `http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Sous-groupes_finis_SO3.pdf`.

[209] Sébastien Pellerin. Développements d'analyse pour l'oral de l'agrégation. . `http://pellerin.xyz/doc/agreg/analyse.pdf`.

[210] Matthieu Romagny. Représentations linéaires des groupes finis. 2010-2011. `http://www.math.jussieu.fr/~romagny/agreg/theme/rlgf_paysage.pdf`.

[211] Michael Gechele. Théorème de stone-weierstrass. `http://michael.gechele.perso.neuf.fr/Agregation/Theoreme_Stone_Weierstrass.pdf`.

[212] Primitives et intégrales. URL `http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.primitive.pdf`.

[213] Kevin Quirin. Théorème de Müntz. `http://kevin.quirin.free.fr/Trucs/agreg/Dvt_Muntz.pdf`.

[214] Pierre Lissy. Déterminant de cauchy et application au théorème de Müntz. 5 mai 2010. `http://www.ljll.math.upmc.fr/~lissy/Agreg/developpements/CauchyMuntz.pdf`.

[215] Benjamin Dadoun. Théorème de Müntz. URL `http://benjamin.dadoun.free.fr/muntz.pdf`.

[216] Jean-Pierre Demailly. Analyse numérique et équations différentielles. 1991.

[217] Clémence Minazzo and Kelsey Rider. Théorèmes du point fixe et applications aux équations différentielles. 2006-2007. `http://math.unice.fr/~eaubry/Enseignement/M1/memoire.pdf`.

[218] Ivan Nourdin. *Leçons d'analyse, probabilités algèbre et géométrie*. Dunod, 2001. ISBN 2-10-005668-9.

[219] William K Allard. The Brouwer fixed point theorem. 2004. `http://www.math.duke.edu/~wka/math204/fixed.pdf` see also `http://www.math.duke.edu/~wka/math204/`.

[220] Kenneth Kuttler. Topics in analysis. Janvier 2012. `http://www.math.byu.edu/~klkuttle/SobolevSpacesB.pdf` Juste un indice : ce document fait 2086 pages . . . j'y arriverais, courage !

[221] Hervé Le Dret. Notes de cours M2 Équations aux dérivées partielles élliptiques. 4 mars 2010. URL `https://www.ljll.math.upmc.fr/~ledret/M2Elliptique/chapitre4.pdf`.

[222] Bachir Bekka. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani : applications à l'existence de mesures de haar et aux chaînes de Markov. 2005. `http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/PointFixe.pdf`.

[223] Sandrine Caruso. Théorème de Cauchy-Lipschitz. 2009. `http://boumbo.toonywood.org/sandrine/pageperso/agreg/cauchy-lipschitz.pdf` Voir aussi la page toute pleine de développement `http://boumbo.toonywood.org/sandrine/pageperso/agreg.html`.

[224] Franck Boyer. Équations différentielles ordinaires. 2012. URL http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/Agreg/cours_EDO_Agreg_FBoyer.pdf.

[225] Théo Pierron. Théorème de Cauchy-Lipschitz global. 5 janvier 2014. URL http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tpier758/agreg/dvpt/maths/cauchy_lipschitz.pdf.

[226] Thierry Audibert. Le problème de Cauchy, résultats fondamentaux. URL http://www.univenligne.fr/Documents/PolycopiesAgreg/EDO1.pdf.

[227] Thomas Budzinski. Théorème de Cauchy-Lipschitz. 2014. URL https://www.eleves.ens.fr/home/budzinsk/polys/Nonolympique/2014_cauchylipschitz.pdf.

[228] Wikipédia. Théorème d'inversion locale — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27inversion_locale&oldid=100975433. [En ligne ; Page disponible le 19-février-2014].

[229] Antoine Chambert-Loir. Introduction aux groupes et algèbres de Lie. 2004-2005. URL http://www.math.u-psud.fr/~chambert/enseignement/2004-05/lie/lie.pdf.

[230] E.P. van den Ban. Lie groups. 2003. http://www.math.uu.nl/people/ban/lecnot.html.

[231] Joachim Stubbe. URL http://mathaa.epfl.ch/prob/enseignement/analyse2/series/AnalysisE.pdf.

[232] Laurent Guillopé. Optimisation sous contrainte. 2015-2016. URL https://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~guillope/l3-osc/osc.pdf.

[233] Bruno Galerne. Optimisation, algorithmique. 2016-2017. URL http://www.math-info.univ-paris5.fr/~bgalerne/m1_opti_algo/poly_opti_algo.pdf.

[234] Wikipédia. Fonction convexe — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction_convexe&oldid=94429550. [En ligne ; Page disponible le 8-août-2013].

[235] Wikipédia. Fonction convexe — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction_convexe&oldid=98971686. [En ligne ; Page disponible le 8-février-2014].

[236] Wikiversité. Fonctions convexes/définition et premières propriétés — wikiversité,, 2013. URL http://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Fonctions_convexes/D%C3%A9finition_et_premi%C3%A8res_propri%C3%A9t%C3%A9s&oldid=381775. [En ligne ; accédé le 9-février-2014].

[237] Wikiversité. Fonctions convexes/fonctions convexes dérivables — wikiversité,, 2013. URL http://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Fonctions_convexes/Fonctions_convexes_d%C3%A9rivables&oldid=379779. [En ligne ; accédé le 9-février-2014].

[238] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. Convex optimization. 2004. URL http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf.

[239] Document 33 : fonctions convexes. . URL http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.convexe.pdf.

[240] Wikipédia. Inégalité arithmético-géométrique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9_arithm%C3%A9tico-g%C3%A9om%C3%A9trique&oldid=99682278. [En ligne ; Page disponible le 1-juillet-2014].

[241] Wikipédia. Inégalité de kantorovitch — wikipédia, l'encyclopédie libre, juillet 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9_de_Kantorovitch&oldid=102417007. [En ligne ; Page disponible le 1-juillet-2014].

[242] Georges Comte. Lemme de Morse. 2009-2010. URL http://gc83.perso.sfr.fr/Agregation/LemmedeMorse.pdf.

[243] Louis Fauchier-Magnan. Introduction à la théorie de Morse. URL http://cqfd.epfl.ch/webdav/site/cqfd/shared/projets/igat/IntroductionàlathéoriedeMorse-LouisFauchier-Magnan.pdf.

[244] Michel Rascle. Analyse fonctionnelle pour la licence. http://math.unice.fr/~rascle/pdffiles/coursanapp/ana-fonc.pdf.

[245] B. Mauray. Analyse fonctionnelle et théorie spectrale (version longue). 2001–2002. http://www.math.jussieu.fr/~maurey/ts012/poly/lths.pdf.

[246] Mourad Besbes. Chapitre 5 : espaces métriques complets, espaces de banach. http://besbes.mourad.free.fr/Enseignement/Topologie/Chapitre5.pdf.

[247] Wikipédia. Espace complet — Wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Espace_complet&oldid=91125353. [En ligne ; Page disponible le 1-avril-2013].

[248] gb. Cercle circonscrit à une courbe. URL http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,750556,750586.

[249] Mohammad Ghomi. Lecture note on differential geometry. 2007. URL http://people.math.gatech.edu/~ghomi/LectureNotes/LectureNotes5U.pdf.

[250] Wikipedia. Convex curve — wikipedia, the free encyclopedia, 2015. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Convex_curve&oldid=685739052. [Online ; accessed 13-April-2016].

[251] Wikipédia. Théorème de jordan — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Jordan&oldid=124990679. [En ligne ; Page disponible le 6-avril-2016].

[252] Les quadrilatères. URL http://ddata.over-blog.com/xxxyyy/4/39/08/01/cinquieme/5eme.parallelogramme.jeu-set-et-maths.mathematiques.pdf.

[253] Robert Rolland. Géométrie projective. . http://robert.rolland.acrypta.com/telechargements/geometrie/pr0.pdf.

[254] Daniel Bertrand. Géométrie projective. 2009-2010. http://www.math.jussieu.fr/~bertrand/Enseignement/epdf/Algeo09_chap2.pdf.

[255] Nicolas Jacon. Géométrie projective. URL http://njacon.perso.math.cnrs.fr/jacon_Geometrieproj.pdf.

[256] François Labourie. Géométrie affine et projective. 9 février 2019. URL http://math.unice.fr/~labourie/preprints/pdf/geomproj.pdf.

[257] Matthieu Romagny. Droites projectives, homographies. 2005-2006. URL https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/droite_projective_Halberstadt.pdf.

[258] Arnaud Bodin. L'inversion. 2012. URL http://math.univ-lille1.fr/~bodin/geometrie/ch_inversion.pdf.

[259] Laurent Dietrich. Le groupe circulaire. 21 mai 2011. URL http://www.math.cmu.edu/~ldietric/doc/groupecirc.pdf.

[260] Florian Bouget. Le groupe circulaire. URL http://florian.bouguet.free.fr/doc/developpements/Groupe_circulaire.pdf.

[261] Florian Bouguet. Le groupe circulaire. URL http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Groupe_circulaire.pdf.

[262] 182 : utilisation des nombres complexes en géométrie. Homographies. 2015-2016. URL http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/182_2015-2016.pdf.

[263] Sébastien Pellerin. Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaréé. . http://dynamaths.free.fr/docs/lecons/developpement_algebre_6.pdf.

[264] Alexandre Alessandri. Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré. 2011-2012. http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Dvt_psl2.pdf.

[265] Aline Kurtzmann. Espérance conditionnelle. http://www.iecn.u-nancy.fr/~kurtzman/cours/agreg/esperance-conditionnelle.pdf.

[266] Wikipédia. Théorème de projection sur un convexe fermé — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_projection_sur_un_convexe_ferm%C3%A9&oldid=90246160. [En ligne ; Page disponible le 3-mai-2013].

[267] Michel Merle. Espaces de Hilbert. 2004-2005. URL http://www-math.unice.fr/~merle/Algebre_et_geometrie/hilbert.pdf.

[268] Douglas N. Arnold. Functional analysis. 1997. URL http://www.math.umn.edu/~arnold/502.s97/functional.pdf.

[269] Wikipédia. Base de hilbert. . URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Base_de_Hilbert?oldid=128533376.

[270] Remsirems. Re : Réponses à quelques questions. 2016. URL http://linuxfr.org/nodes/110155/comments/1675813.

[271] Jonathan Bain. Kochen-Specker and measurement. 2011. http://faculty.poly.edu/~jbain/philqm/lectureslides/08.KS&Measurement.pdf.

[272] Michel Kern. Introduction à la méthode des éléments finie. 2004-2005. URL http://mms2.ensmp.fr/ef_paris/formulation/polycop/f_coursEF.pdf.

[273] Wikipédia. Théorème d'Ascoli — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27Ascoli&oldid=92958118. [En ligne ; Page disponible le 11-mai-2013].

[274] Wikipédia. Théorème de banach-steinhaus — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Banach-Steinhaus&oldid=92377069. [En ligne ; Page disponible le 31-août-2013].

[275] B. Maurey. 9 mars 2011. http://www.math.jussieu.fr/~maurey/IntegProba/Cours/CoursIP101-14.pdf.

[276] Danarmk. 2016. URL http://linuxfr.org/nodes/110155/comments/1675589.

[277] B. Mauray. Convolution, inégalités, approximations et régularisation. 2007. URL https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/agreg/Textes/Convolution.pdf.

[278] Schilling. Minkowsky's inequality for integrals. URL http://math.ucsd.edu/~lni/math240/suppl-1.pdf.

[279] Charles Suquet. Intégration, analyse de fourier,probabilités. 2003-2004. http://math.univ-lille1.fr/~suquet/ens/IFP/Cours/cours04/CoursIFP04.html.

[280] Wikipédia. Théorème de Riesz-Fischer — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Riesz-Fischer&oldid=90074115. [En ligne ; Page disponible le 3-mai-2013].

[281] Daniel Li. Espaces de hilbert. . http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=11183 http://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=9387.

[282] Gilles Leborgne. Introduction à la théorie des distributions. 16 mai 2013. URL http://www.isima.fr/~leborgne/IsimathDistributions/distrib.pdf.

[283] Wikipédia. Espace Lp — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Espace_Lp&oldid=92618226. [En ligne ; Page disponible le 10-mai-2013].

[284] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983. ISBN 2-225-77198-7. Théorie et applications.

[285] MoebiusCorzer Giraudo, Davide. Show smooth functions of compact support are dense in the Schwartz space. 2012. URL http://math.stackexchange.com/questions/229751/show-smooth-functions-of-compact-support-are-dense-in-the-schwartz-space.

[286] B. Maurey. Holomorphie. 7 février 2005. http://www.math.jussieu.fr/~maurey/agreg/Textes/Holomorphe045.pdf.

[287] Pascal Dingoyan. Chapitre 5. URL http://www.math.jussieu.fr/~dingoyan/lescours/lm367-pageweb/lm367-chapitre5.pdf.

[288] Corentin. Re : formule de cauchy et dérivation. URL http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,385272,385289.

[289] Philippe Charpentier. Analyse complexe. Septembre 2010. http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pcharpen/enseignement/fichiers-master1/Analyse_Complexe.pdf.

[290] Christian Kkein. Séries de laurent, résidus. URL http://math.u-bourgogne.fr/IMB/klein/Complement_dAnalyse_files/chap607.pdf.

[291] Romain Boillaud. Séries entières. http://www.rblld.fr/cours/chap8.pdf.

[292] Noach Dana-Picard. The logarithm of a complex number. URL http://ndp.jct.ac.il/tutorials/complex/node26.html.

[293] Guillaume Carlier. Analyse complexe. 2012-2013. URL https://www.ceremade.dauphine.fr/~carlier/analysecomplexe.pdf.

[294] Wikiversité. Fonctions d'une variable complexe/le logarithme complexe — wikiversité,, 2016. URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Fonctions_d%27une_variable_complexe/Le_logarithme_complexe&oldid=617412. [En ligne ; accédé le 16-décembre-2016].

[295] Jean-Marie Lion. Fonctions holomorphes d'une variable. 5 mai 2004. http://perso.univ-rennes1.fr/jean-marie.lion/coursholo.pdf.

[296] Richard Gomez. Séries de Fourier. 10 octobre 2010. URL http://megamaths.perso.neuf.fr/rg/fourier.pdf.

[297] David Delaunay. Séries de Fourier. 8 juin 2012. http://mp.cpgedupuydelome.fr/pdf/SériesdeFourier.pdf.

[298] Wikipédia. Théorème de jordan — wikipédia, l'encyclopédie libre, Mai 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Jordan&oldid=92525205. [En ligne ; Page disponible le 25-mai-2013].

[299] B. Maurey. Notes de cours : analyse hilbertienne et de Fourier. 2008-2009. http://www.math.jussieu.fr/~maurey/FourHilb/PolyFH.pdf.

[300] Bachir Bekka. Le théorème d'inversion de Fourier du point de vue des distributions. URL http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Theoreme-Inversion-Fourier.pdf.

[301] Erdős László. Fourier transform. 2008. URL https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lerdos/WS08/QM/four08.pdf.

[302] Richard Zekri. Analyse de fourier. 15 septembre 2009. URL http://lumimath.univ-mrs.fr/infoetudiant/ANALYSEDEFOURIERMASTER2009.pdf.

[303] Michel Crouzeix. Compléments d'analyse. URL https://perso.univ-rennes1.fr/michel.crouzeix/publis/anep.pdf.

[304] Claude Zuily. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles.* Dunod, 2002.

[305] Peter Young. Singular Fourier transforms and the integral representation of the Dirac delta function. November, 2009.

[306] Daniel Choï. Méthode des éléments-finis par l'exemple. Avril 2010. URL http://meca.unicaen.fr/~choi/pdf/cours-mef.pdf.

[307] Michael Reiter and Arthur Schuste. Fourier transform and Sobolev spaces. 2008. URL http://www.mat.univie.ac.at/~stein/lehre/SoSem08/sobolev_fourier.pdf.

[308] Arkhnor. Densité des fonctions Cinfty à support compact. 2014. URL http://www.ilemaths.net/sujet-densite-des-fonctions-c-infty-a-support-compact-587937.html.

[309] Gilles Leborgne. Complément : espaces de Sobolev fractionnaires. 2007. URL http://ws.isima.fr/~leborgne/IsimathDistributions/sobolev_frac.pdf.

[310] Richard B. Melrose. Lecture notes for 18.155, fall 2002. 2002. URL https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-155-differential-analysis-fall-2004/lecture-notes/section10.pdf.

[311] Julien Vovelle. Équations différentielles, cours no 2. URL http://math.univ-lyon1.fr/~vovelle/2Cours.pdf.

[312] Olivier Debarre. Équations différentielles. URL http://www.math.ens.fr/~debarre/EquaDiff.pdf.

[313] Sylvie Benzoni-Gavage. Propagation d'ondes. URL http://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/Ondes.pdf.

[314] Sonia Fliss. L'équation de transport à coefficients variables. URL http://perso.ensta-paristech.fr/~fliss/Sonia_Fliss_web_page/Enseignement_files/Amphi3_2014.pdf.

[315] Sylvie Benzoni-Gavage. Équations différentielles ordinaires. 11 mai 2007. URL http://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/EDO-M1.pdf.

[316] Wikipédia. Flot (mathématiques) — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2017. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Flot_(math%C3%A9matiques)&oldid=134130419. [En ligne ; Page disponible le 1-février-2017].

[317] Alexander Grigor'yan. Ordinary differential equation. 2009. URL https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/odelec2009.pdf.

[318] Christopher P. Grant. Theory of ordinary differential equation. 2007. URL http://www.math.pitt.edu/~bard/bardware/classes/2920/Grant_4july2007.pdf.

[319] John B. Picard-lindelöf theorem with parameter : what regularity ? 2017. URL http://math.stackexchange.com/questions/2126539/picard-lindelöf-theorem-with-parameter-what-regularity.

[320] Kevin Quirin. Développements. 2011-2012. URL http://kevin.quirin.free.fr/Trucs/agreg/developpements.pdf.

[321] Wikipédia. Équations de lotka-volterra — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%89quations_de_Lotka-Volterra&oldid=113756354. [En ligne ; Page disponible le 5-juillet-2015].

[322] Predrag Cvitanović. Partial differential equations. 2012. URL http://www.cns.gatech.edu/~predrag/courses/PHYS-6124-12/StGoChap6.pdf.

[323] Ralph Chill. Introduction aux équations aux dérivées partielles. 2010-2011. URL http://www.math.univ-metz.fr/~chill/edp.pdf.

[324] Gianluca Bontempi. Un cours d'analyse numérique et de matlab. 2009. http://www.ulb.ac.be/di/map/gbonte/calcul/.

[325] Wikipedia. Two's complement — wikipedia, the free encyclopedia, 2016. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Two%27s_complement&oldid=706335033. [Online ; accessed 6-April-2016].

[326] Wikipédia. Ieee 754 — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=IEEE_754&oldid=120234746. [En ligne ; Page disponible le 12-avril-2016].

[327] Comprendre les nombres à virgules flottantes. URL http://blog.netinfluence.ch/2009/09/24/comprendre-les-nombres-a-virgule-flottante/.

[328] Harald Schmidt. IEEE754 converter. URL http://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html.

[329] David Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. 1991. URL http://docs.oracle.com/cd/E19957-01/806-3568/ncg_goldberg.html#11655.

[330] Emmanuel Frénod. Calcul scientifique. 2011-2012. URL http://web.univ-ubs.fr/lmam/frenod/IMG/DocEtudiant/MTH1504/calculscientifique.pdf.

[331] Franck Boyer. Agrégation externe de mathématiques. Analyse numérique. 14 octobre 2014. URL http://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/_media/enseignements/agreg/cours_an_agreg_fboyer_2014.pdf.

[332] Antoine Chambert-Loir. Autour de la méthode de newton. http://perso.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir/2005-06/agreg/newton.pdf.

[333] Wikipédia. Vitesse de convergence — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Vitesse_de_convergence&oldid=110252913. [En ligne ; Page disponible le 22-mai-2016].

[334] Martin Pinto Campos. Approximations polynomiales de fonctions et et des intégrales. 21 décembre 2006. D'après le cours de Laurence Halpern http://documents.lamacs.fr/cours/macs1/cours-macs1-pinto1.pdf.

[335] Ming Yang. Matrix decomposition. URL http://users.eecs.northwestern.edu/~mya671/files/Matrix_YM_.pdf.

[336] Benjamin Ambrosio. Chapitre 3 : Méthodes directes de résolution du système $Ax = b$. URL http://lmah.univ-lehavre.fr/~ambrosio/CoursMN/Chapitre3.pdf.

[337] Emmanuel Frénod. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires. URL http://web.univ-ubs.fr/lmam/frenod/IMG/DocEtudiant/MTH1504/methodes-directes.pdf.

[338] Christian Lécot. Analyse numérique matricielle. 2009-2010. URL https://www.lama.univ-savoie.fr/~lecot/data/M1_ANM.pdf.

[339] Wikipédia. Matrice à diagonale dominante — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrice_%C3%A0_diagonale_dominante&oldid=132268176. [En ligne ; Page disponible le 4-mai-2017].

[340] Habib Joulak. Méthodes des différences finies en élasticité. 1974. URL https://ori-nuxeo.univ-lille1.fr/nuxeo/site/esupversions/0e05f3d2-fe12-4d67-b74f-f622869539f2.

[341] Philippe Briand. Probabilités de base. 2005-2006. http://www.lama.univ-savoie.fr/~briand/proba/g12_cours.pdf.

[342] Vincent Bansaye. Variables aléatoires, espérance, indépendance. http://www.cmap.polytechnique.fr/~bansaye/CoursTD2.pdf.

[343] Alfio Marazzi. There are 22 chapters in 22 files. http://www.iumsp.ch/Unites/us/Alfio/polybiostat/ch06.pdf.

[344] Cédric Boutillier. 2016. URL https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/16#issue-180279120.

[345] Wikipédia. Inégalité de jensen — wikipédia, l'encyclopédie libre, août 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9_de_Jensen&oldid=90235295. [En ligne ; Page disponible le 9-août-2013].

[346] Gérard Letac. Calcul des probabilités, Deug 2ième année. juin 2001. http://les.mathematiques.free.fr/pdf/proba.zip.

[347] Daniel Saada. Note sur le théorème de transfert pour les variables aléatoires réelles. 18 octobre 2012. http://www.les-mathematiques.net/phorum/file.php?12,file=17435,filename=th_du_tranfert.pdf.

[348] Christophe Sabot. Différents types de convergence de suites de v.a. URL http://math.univ-lyon1.fr/~sabot/Convergence.pdf.

[349] Antonin Macé and Thomas Pradeau. Exposé de maîtrise. Estimations de densités de probabilité. 2007. Encadré par Gilles Stoltz. http://www.eleves.ens.fr/home/amace/travaux/exposemaitrise.pdf.

[350] Wikipedia. Continuous mapping theorem — wikipedia, the free encyclopedia, 2013. URL http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Continuous_mapping_theorem&oldid=545523937. [Online ; accessed 15-June-2013].

[351] Wikipédia. Inégalité de markov — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9_de_Markov&oldid=100208179. [En ligne ; Page disponible le 11-février-2014].

[352] Charles Suquet. Simulation. 2005-2006. http://math.univ-lille1.fr/~suquet/ens/Agr/simul06.pdf.

[353] Yoann Gelineau. Vecteurs gaussiens. . http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/files/vecteurs_gaussiens.pdf.

[354] Wikipédia. Nombre normal — wikipédia, l'encyclopédie libre, avril 2013. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_normal&oldid=89848922. [En ligne ; Page disponible le 28-avril-2013].

[355] Wikipédia. Théorème de glivenko-cantelli — wikipédia, l'encyclopédie libre, . URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Glivenko-Cantelli&oldid=90841113. [En ligne ; Page disponible le 15-juin-2013].

[356] Vincent Rivoirard and Gilles Stoltz. Estimation de densité de probabilités. URL http://www.math.ens.fr/statenaction/PDF/Densite-Principal.pdf.

[357] Nils Berglund. Chaînes de Markov. Décembre 2007. URL http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/markov.pdf.

[358] Arnaud Guyader. Espérance conditionnelle et chaînes de Markov. 200-2008. http://www.sites.univ-rennes2.fr/laboratoire-statistique/AGUYADER/doc/proba/poly.pdf.

[359] Massimiliano Gubinelli. Comportement asymptotique des martingales. 2011-2012. http://www.ceremade.dauphine.fr/~mgubi/e1112/pd3.pdf.

[360] Jean Lacroix and Pierre Priouret. Probabilités approfondies. 2005-2006. http://www.proba.jussieu.fr/cours/processus.pdf.

[361] Wikipedia. Optional stopping theorem — wikipedia, the free encyclopedia, 2013. URL http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Optional_stopping_theorem&oldid=547547174. [Online ; accessed 14-August-2013].

[362] Nizar Touzi. Martingales en temps discret et chaîne de Markov. Septembre 2009. URL http://www.cmap.polytechnique.fr/~touzi/MAP432-Poly.pdf.